Geneigter Leser,

Ein Wort zu den Symbolen und Lösungen:

Es bedeuten
- ◊ Empfohlene Aufgabe
- • Schwierige Aufgabe
- •◊ Schwierige, empfohlene Aufgabe
- ⁞ Anspruchsvolle Aufgabe

Die Lösungen sind gedacht als Entwurf, sie sind von keiner anderen Instanz durchgesehn oder korrigiert worden.

Bitte schicken Sie uns keine gut gemeinten Berichtigungsvorschläge:
Wir können sie nicht mehr einarbeiten, denn die guten FrameMaker–Dateien aus den 90er Jahren sind auf unsern heutigen Rechnern nicht mehr lesbar und auf wenigen alten unzuverlässigen Exemplaren nur noch mit größter Mühe zu öffnen und zu bearbeiten.

Und nun viel Erfolg !

Friedrich Barth, e.f.barth@t-online.de
Gert Krumbacher, grafioso@t-online-de

München, im Frühjahr 2017

I. Funktion und Graph

1. Grundbegriffe

1.1 Zuordnung

1 **a)** f(x) ist die Quersumme von x.

x	1	2	3	4	5	8	10	12	20
f(x)	1	2	3	4	5	8	1	3	2

b) f(x) ist die Anzahl der Teiler von x.

x	1	2	3	4	5	8	10	12	20
f(x)	1	2	2	3	2	4	4	6	6

c) f(x) ist die Anzahl der echten Teiler von x.

x	1	2	3	4	5	8	10	12	20
f(x)	0	1	1	2	1	3	3	5	5

d) f(x) ist die Anzahl der Primfaktoren 2 in x.

x	1	2	3	4	5	8	10	12	20
f(x)	0	1	0	2	0	3	1	2	2

e) f(x) ist der größte gemeinsame Teiler von x und 30.

x	1	2	3	4	5	8	10	12	20
f(x)	1	2	3	2	5	2	10	6	10

◊2 **a)** f(x) ist das Quadrat von x.

x	–100	$-\pi$	–0,2	0	0,5	1	2,5	3,5	100
f(x)	10000	π^2	0,04	0	0,25	1	6,25	12,25	10000

b) f(x) ist das arithmetische Mittel der Zahlen 1 und x.

x	–100	$-\pi$	–0,2	0	0,5	1	2,5	3,5	100
f(x)	–49,5	$(1-\pi)/2$	0,4	0,5	0,75	1	1,75	2,25	50,5

c) f(x) ist der absolute Betrag von x.

x	–100	$-\pi$	–0,2	0	0,5	1	2,5	3,5	100
f(x)	100	π	0,2	0	0,5	1	2,5	3,5	100

d) f(x) ist die ganze Zahl, die x am nächsten liegt.
Bei gleichen Abständen nimmt man die gerade Zahl.

x	–100	$-\pi$	–0,2	0	0,5	1	2,5	3,5	100
f(x)	–100	–3	0	0	0	1	2	4	100

e) f(x) ist das Vorzeichen von x, das heißt, f(x) = –1 für negative x,
f(x) = +1 für positive x und f(0) = 0.

x	–100	$-\pi$	–0,2	0	0,5	1	2,5	3,5	100
f(x)	–1	–1	–1	0	1	1	1	1	1

f) f(x) ist die kleinste ganze Zahl, die größer oder gleich x ist.

x	–100	$-\pi$	–0,2	0	0,5	1	2,5	3,5	100
f(x)	–100	–3	0	0	1	1	3	4	100

g) f(x) ist die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist.

x	–100	$-\pi$	–0,2	0	0,5	1	2,5	3,5	100
f(x)	–100	–4	–1	0	0	1	2	3	100

h) f(x) = 1 für rationale x und f(x) = 0 sonst.

x	–100	$-\pi$	–0,2	0	0,5	1	2,5	3,5	100
f(x)	1	0	1	1	1	1	1	1	1

3 a) f(x) = max(1, x)

x	–2	–1	–0,5	0	0,5	0,9	1	2	10
f(x)	1	1	1	1	1	1	1	2	10

b) f(x) = min(0, x)

x	–2	–1	–0,5	0	0,5	0,9	1	2	10
f(x)	–2	–1	–0,5	0	0	0	0	0	0

c) f(x) = max(x, x^2)

x	–2	–1	–0,5	0	0,5	0,9	1	2	10
f(x)	4	1	0,25	0	0,5	0,9	1	4	100

4 a) Für jeden a-Wert hat die Gleichung genau eine Lösung:
Die Vorschrift ist eine Funktion.

b) Schon 2 Geraden schneiden sich nicht oder sie schneiden sich,
Anzahlen der möglichen Schnittpunkte: 0 und 1.
Die Vorschrift ist keine Funktion.

c) Zur Zahl n=5 gehören die beiden Punkte (3|4) und (4|3).
Die Vorschrift ist keine Funktion.

5

a) $f_n = 2^{n-1} - 1$

n	1	2	3	4	5	6
f_n	0	1	3	7	15	? = 31

b) $f_n = n^2 + 1$

n	1	2	3	4	5	6
f_n	2	5	10	17	26	? = 37

c) $f_n = f_{n-1} + n$

$f_1 = 1$

n	1	2	3	4	5	6
f_n	1	3	6	10	15	? = 21

1.2 Funktionsterm und maximale Definitionsmenge

◊1 $f(x) = 2x - 1$

a) $f(-2{,}5) = -6$ **b)** $f(-a^2) = -2a^2 - 1$ **c)** $f(x+h) = 2x + 2h - 1$

d) $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2}{x} - 1$ **e)** $f(f(x)) = 2(2x-1) - 1 = 4x - 3$

◊2 $f(x) = x - x^2$ Term als Produkt $f(x) = x(1-x)$

a) $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2} - 2$ **b)** $f(-x) = -x - x^2 = -x(1+x)$

c) $f(x-1) = (x-1) - (x-1)^2 = -x^2 + 3x - 2 = (x-1)(2-x) = -(x-1)(x-2)$

d) $f(x+h) = x+h - (x+h)^2 = x + h - x^2 - 2hx - h^2 = (x+h)(1-x-h)$

e) $f(x-h) = x-h - (x-h)^2 = x - h - x^2 + 2hx - h^2 = (x-h)(1-x+h)$

3 $f(x) = \frac{x+2}{2x-1}$

a) $f(x-2) = \frac{x-2+2}{2(x-2)-2-1} = \frac{x}{2x-5}$ **b)** $f(-x) = \frac{-x+2}{-2x-1}$ **c)** $f(2x) = \frac{2x+2}{4x-1}$

d) $f(f(x)) = f\left(\frac{x+2}{2x-1}\right) = \frac{\frac{x+2}{2x-1}+2}{2\frac{x+2}{2x-1}-1} = \frac{x+2+4x-2}{2x+4-2x+1} = x =: d(x)$

e) $f(f(f(x))) = f(d(x)) = f(x) = \frac{x+2}{2x-1}$

4 $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $g(x) = \frac{x+1}{x}$

a) $f(-1) = \frac{1}{2}$, $g(-1) = 0$ **b)** $f(-x) = \frac{1}{1+x}$, $g(-x) = \frac{-x+1}{-x} = \frac{x-1}{x}$

c) $f(g(x)) = f(\frac{x+1}{x}) = \frac{1}{1-\frac{x+1}{x}} = \frac{x}{x-x-1} = -x$

$g(f(x)) = g(\frac{1}{1-x}) = \frac{\frac{1}{1-x}+1}{\frac{1}{1-x}} = \frac{1+1-x}{1} = 2-x$

5 $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

a) $f(1) = 0$ **b)** $f(x^2-1) = \sqrt{\frac{x^2-1-1}{x^2-1+1}} = \frac{\sqrt{x^2-2}}{|x|}$

c) $f(x^2) - 1 = \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}} - 1$ **d)** $(f(x))^2 - 1 = \frac{x-1}{x+1} - 1 = \frac{-2}{x+1}$

•6 $f(x) = mx + t$

a) $f(f(x)) = f(x)$

$f(mx + t) = mx + t$

$m(mx+t) + t = mx + t$

$(m^2-m)x + mt = 0$

$m(m-1)x + mt = 0$, weil diese Gleichung für alle x gilt, müssen die Koeffizienten $m(m-1)$ und mt gleich null sein

1. Fall: $m = 0$ und t beliebig, dann ergibt sich $f(x) = t$

2. Fall: $m \neq 0$, also $m = 1$ und $t = 0$, dann ergibt sich $f(x) = x$

b) $f(f(x)) = x$

$f(mx + t) = x$

$m(mx+t) + t = x$

$(m^2-1)x + t(m+1) = 0$

$(m-1)(m+1)x + t(m+1) = 0$

1. Fall: $m = -1$ und t beliebig, dann ergibt sich $f(x) = -x + t$

2. Fall: $m = 1$ und $t = 0$, dann ergibt sich $f(x) = x$

:7 $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ Es soll sein: $f(f(x)) = x$, also $f(\frac{ax+b}{cx+d}) = x$

$$\frac{a\frac{ax+b}{cx+d}+b}{c\frac{ax+b}{cx+d}+d} = x \Rightarrow c(a+d)x^2 + (a+d)(d-a)x - b(a+d) = 0$$

$(a+d)(cx^2 + (d-a)x - b) = 0$

1. Fall: $a = -d$ und b,c beliebig, aber a und c nicht beide gleich 0, dann ergibt sich $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$

2. Fall: $a = d \neq 0$ und $c = b = 0$, dann ergibt sich $f(x) = \frac{ax}{a} = x$

◊**8** **a)** $f(x) = \frac{x}{x-4}$ $D_{max} = \mathbb{R}\setminus\{4\}$

b) $f(x) = \frac{x^2}{x^2-4}$ $D_{max} = \mathbb{R}\setminus\{-2, 2\}$

c) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+4}$ $D_{max} = \mathbb{R}$

d) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+4}$ $D_{max} = \mathbb{R}\setminus\{-4,0\}$

e) $f(x) = \frac{x^2}{-x^2-2x-1}$ $D_{max} = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$

f) $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-4}$ $D_{max} = \mathbb{R}\setminus\{-2, 2\}$

◊**9** **a)** $f(x) = \sqrt{x-4}$ $D_{max} = [4\,;+\infty[$

b) $f(x) = \sqrt{4-x}$ $D_{max} =]-\infty;4]$

c) $f(x) = \sqrt{x^2+4}$ $D_{max} = \mathbb{R}$

d) $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ $D_{max} = [-2;2]$

e) $f(x) = \sqrt{2-x}\sqrt{2+x}$ $D_{max} = [-2;2]$

f) $f(x) = \sqrt{x^2-4x}$ $D_{max} =]-\infty\,;0]\cup[4;+\infty[$

g) $f(x) = \sqrt{x^2-4}$ $D_{max} =]-\infty\,;-2]\cup[2;+\infty[$

h) $f(x) = \sqrt{x-2}\sqrt{x+2}$ $D_{max} = [2;+\infty[$

i) $f(x) = \sqrt{x^2-4x+4}$ $D_{max} = \mathbb{R}$

•**10**

a) $f(x) = \frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}+1}$, verboten ist $x = 0$ und $\frac{1}{x}+1 = 0$, also $D_{max} = \mathbb{R}\setminus\{-1, 0\}$

b) $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{x^2-1}}$, es muss sein $x^2 - 1 \geqq 0$ und $1-\sqrt{x^2-1} \geqq 0$

$x^2 \geqq 1$ und $1 \geq \sqrt{x^2-1}$

$|x| \geqq 1$ und $1 \geqq x^2 - 1$

$|x| \geqq 1$ und $2 \geqq x^2$

$|x| \geqq 1$ und $|x| \leqq \sqrt{2}$

$\Rightarrow D_{max} = [-\sqrt{2}\,;-1] \cup [1;\sqrt{2}\,]$

c) $f(x) = \frac{\sqrt{1-x}+\sqrt{x-1}}{x-1}$, es muss sein $x \neq 1$ und $1 - x \geqq 0$ und $x - 1 \geqq 0$

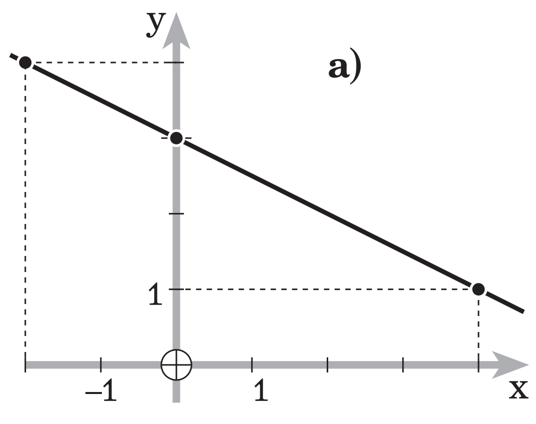
$x \neq 1$ und $1 \geqq x$ und $x \geqq 1$

Widerspruch, f ist nirgends definiert.

1.3 Funktion und Graph

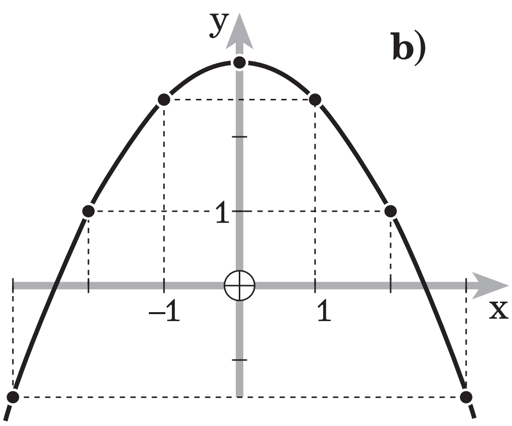
◊**1** **a)** $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$

x	–2	0	4
y	4	3	1



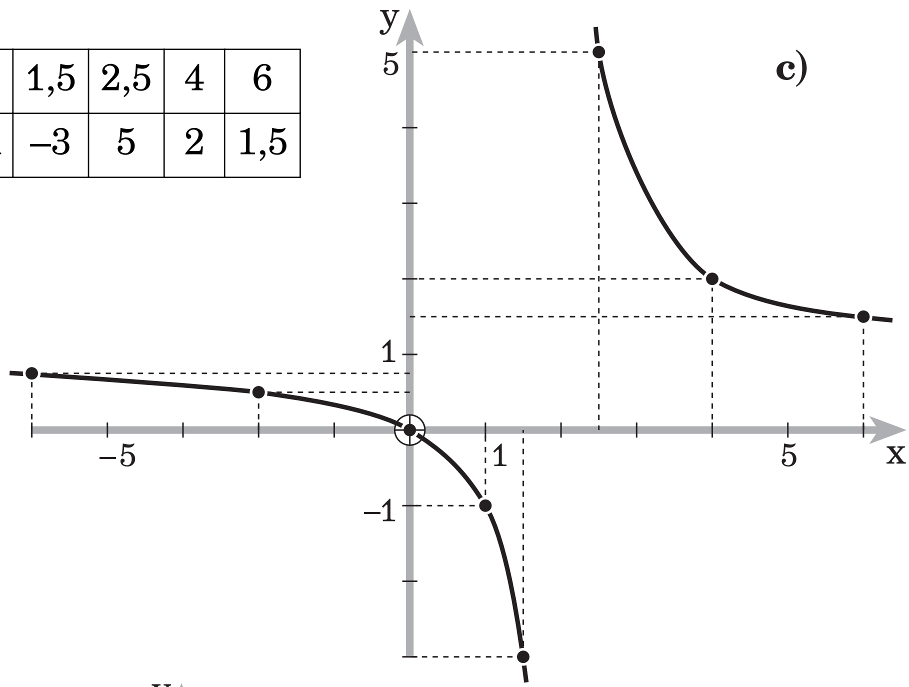
b) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3$

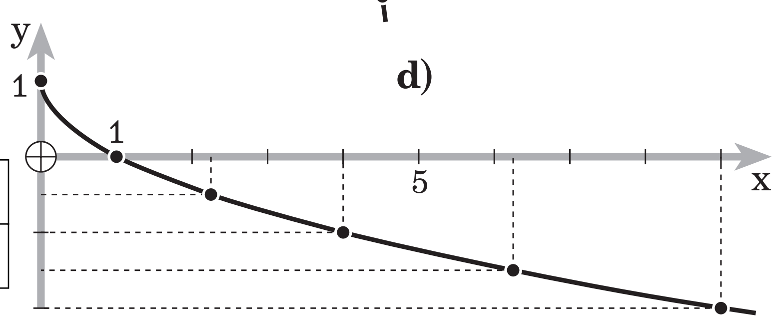
x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	–1,5	1	2,5	3	2,5	1	–1,5



c) $f(x) = \frac{x}{x-2}$

x	–6	–2	0	1	1,5	2,5	4	6
y	0,75	0,5	0	–1	–3	5	2	1,5



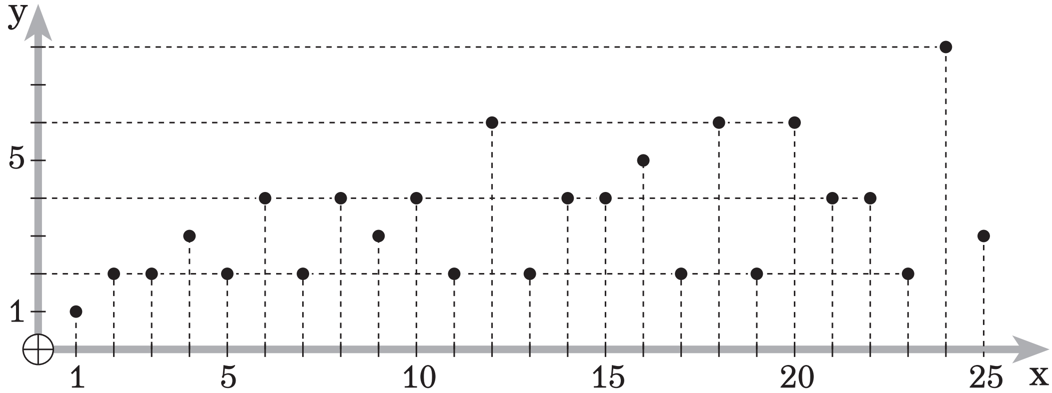


d) $f(x) = 1 - \sqrt{x}$

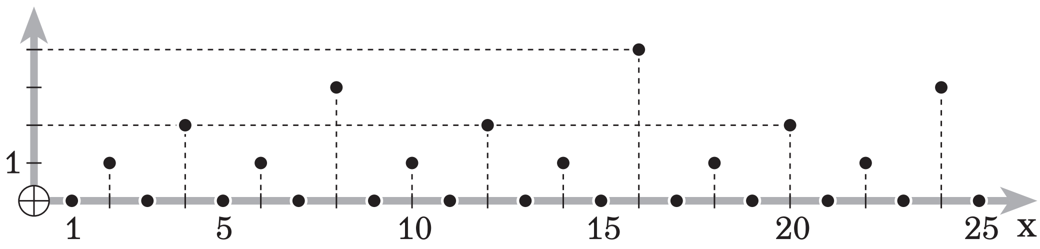
x	0	1	2,25	4	6,25	9
y	1	0	–0,5	–1	–1,5	–2

2 $D = \mathbb{R}$ und $x \in [1\,;25]$

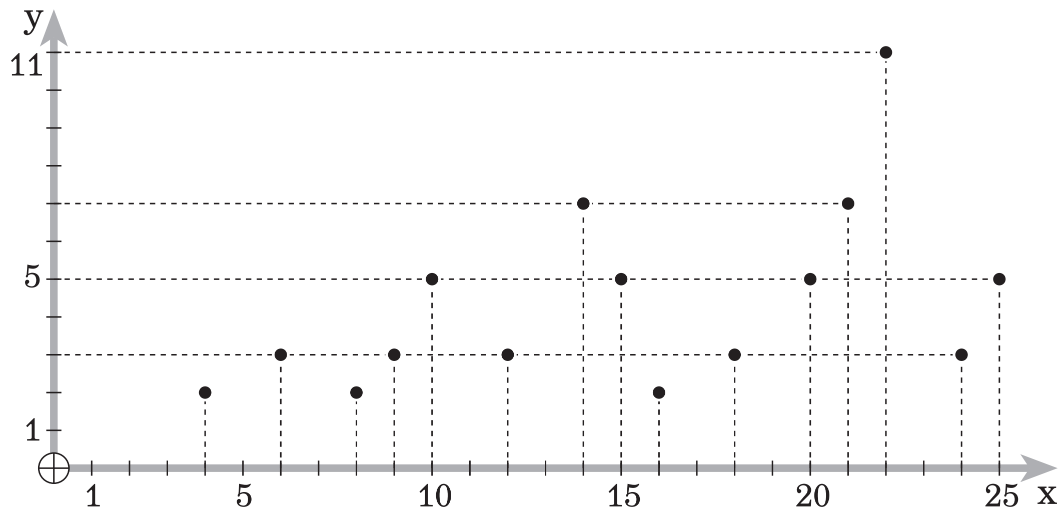
a) f(x) ist die Anzahl der Teiler von x.



b) f(x) ist die Anzahl der Primfaktoren 2 in x.



c) f(x) ist der größte Primfaktor in x, der kleiner ist als x.



3 Schaubilder von Funktionen sind in **a)** , **d)** , **e)** , **g)** , **i)** , **j)** und **k)**.

4 **a)** $f(x) = 2x - 3$ $P(1{,}5|0{,}5)$ drüber, $Q(-\frac{1}{3}|-\frac{10}{3})$ drüber, $R(\frac{1}{6}|-\frac{8}{3})$ drauf

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$ $P(\frac{2}{3}|-1)$ drunter, $Q(-\frac{2}{3}|-\frac{7}{9})$ drauf, $R(\frac{3}{2}|-\frac{1}{9})$ drüber

5 **a)** $f(x) = -\frac{21}{34}x + 2{,}1$

$P(0{,}8|1{,}6)$ und $Q(2{,}1|0{,}8)$ drunter, $R(1{,}7|1{,}05)$ drauf

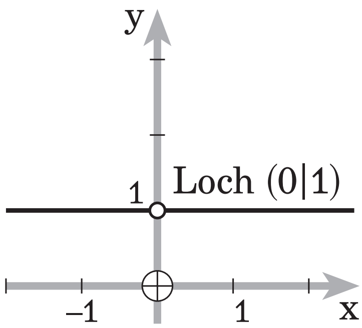
b) $f(x) = \sqrt{85^2 - x^2}$

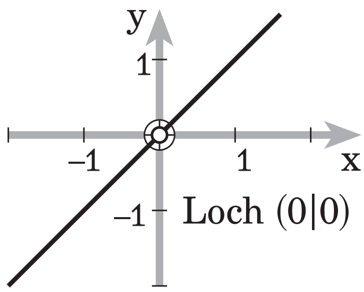
$P(75|40)$ drauf, $Q(63|57)$ drunter, $R(78|34)$ drüber

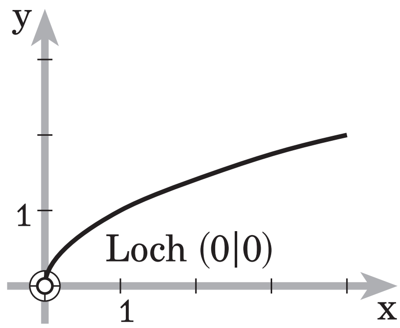
c) $f(x) = \sin x$

$P(\frac{2}{3}|\frac{13}{21})$ drunter, $Q(\sqrt{2}|\sin\sqrt{3})$ drunter, $R(\frac{11\pi}{10}|\frac{1}{4} - \sqrt{0,3125})$ drauf

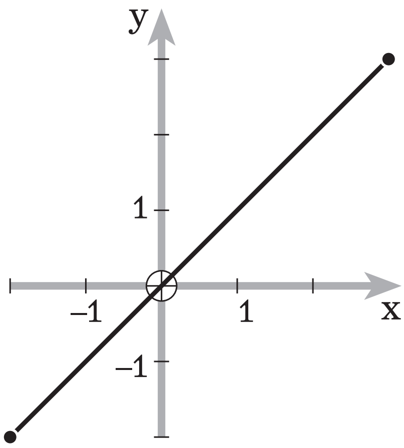
◊6 **a)** $f(x) = \frac{x}{x} = 1$ **b)** $f(x) = \frac{x^2}{x} = x$ **c)** $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$

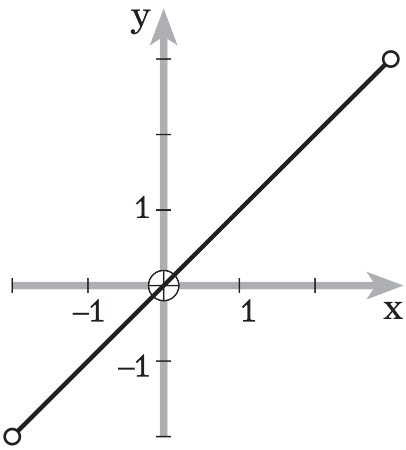


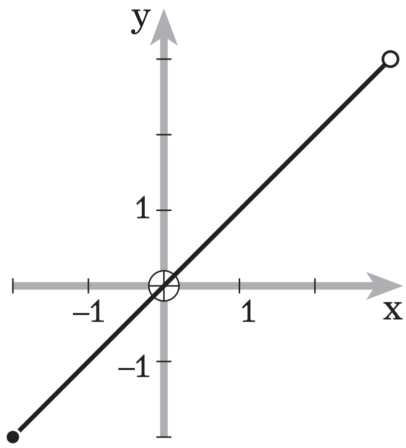




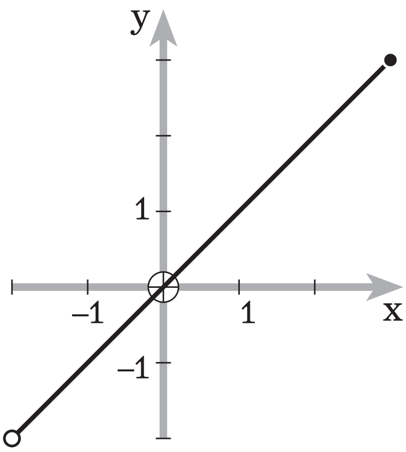
7 **a)** $D = [-2\,;3]$ **b)** $D =]-2\,;3[$ **c)** $D = [-2\,;3[$

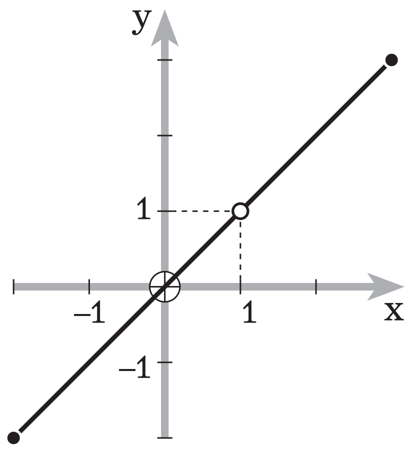






d) $D =]-2\,;3]$ **e)** $D = [-2\,;3] \setminus \{1\}$

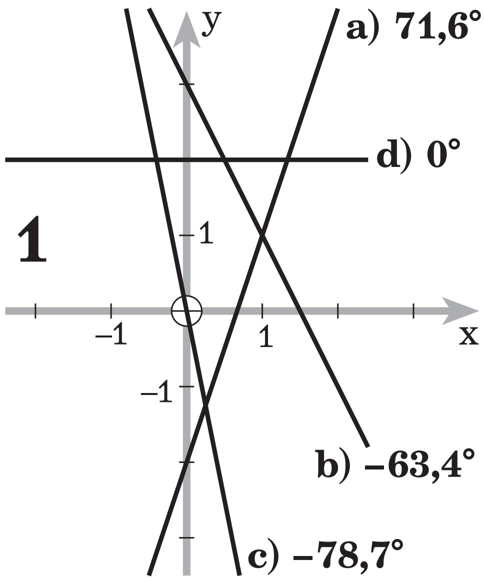


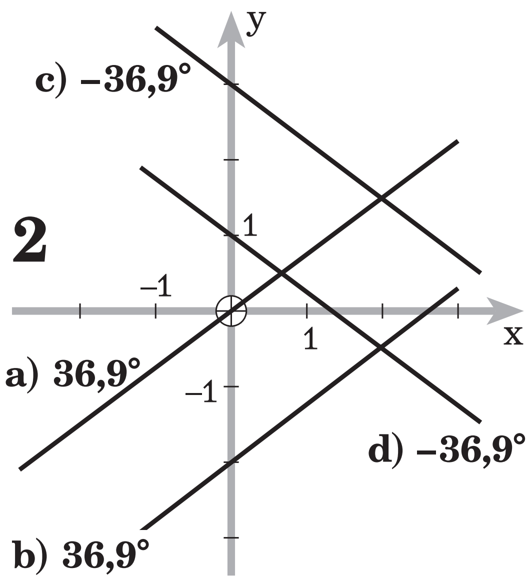


2. Affine Funktion

2.1 Definition und Graph

◊1 a) $f(x) = 3x - 2$ **b)** $f(x) = -2x + 3$ **c)** $f(x) = -5x$ **d)** $f(x) = 2$





◊2 a) $f(x) = \frac{3}{4}x$ **b)** $f(x) = \frac{3}{4}x-2$ **c)** $f(x) = -\frac{3}{4}x+3$ **d)** $f(x) = -\frac{3}{4}x+1$

◊3 a) $f(x)=-\frac{3}{2}x+6$, $(0|6)$ und $(4|0)$ **b)** $f(x)=x+\sqrt{2}$, $(0|\sqrt{2})$ und $(-\sqrt{2}|0)$

c) $f(x)=-\sqrt{2}x+\sqrt{8}$, $(0|\sqrt{8})$ und $(2|0)$ **d)** $f(x)=\frac{x}{4}-1\frac{1}{8}$, $(0|\frac{-9}{8})$ und $(\frac{9}{2}|0)$

4 $f(x) = 2x - 0{,}8$ Die Gerade geht durch $A(2|3{,}2)$, $B(-5|-10{,}8)$, $C(10{,}9|21)$, $P(0{,}4|0)$, $Q(-0{,}1|-1)$, $R(12{,}2|23{,}6)$.

◊5 a) G_f hat die Steigung $\frac{3}{4}$ und schneidet die y-Achse bei –2: $f(x) = \frac{3}{4}x - 2$

b) G_f hat die Steigung –2 und schneidet die y-Achse bei $\frac{3}{4}$: $f(x) = -2x + \frac{3}{4}$

c) G_f hat die Steigung $\frac{1}{3}$ und schneidet die y-Achse bei 2: $f(x) = \frac{1}{3}x + 2$

d) G_f hat die Steigung 0 und schneidet die y-Achse bei 0: $f(x) = 0$

e) G_f ist parallel zur Winkelhalbierenden des 2. Quadrantenund geht durch $(-\pi|\pi)$: $f(x) = -x$

f) G_f schneidet die x-Achse im Ursprung unter 120°: $f(x) = -\sqrt{3}\,x$

g) G_f ist parallel zur x-Achse und geht durch $(-\pi|-\pi)$: $f(x) = -\pi$

6 a) $f(x) = 7x - 3{,}5 = 7(x - 0{,}5) = 0 \quad \Rightarrow x = 0{,}5$
b) $f(x) = 3{,}5x + 7 = 3{,}5(x + 2) = 0 \quad \Rightarrow x = -2$
c) $f(x) = \sqrt{3}\,x - 3 = \sqrt{3}\,(x - \sqrt{3}) = 0 \quad \Rightarrow x = \sqrt{3}$

d) $f(x) = \frac{1}{5}x + 0{,}8 = \frac{1}{5}(x + 4) = 0 \;\Rightarrow x = -4$

e) $f(x) = \frac{3}{4}x - 1{,}5 = \frac{3}{4}(x - 2) = 0 \;\Rightarrow x = 2$

f) $f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{3}{2} = \frac{2}{3}(x + \frac{9}{4}) = 0 \quad \Rightarrow x = -\,\frac{9}{4}$

7 **a)** G_f schneidet die x- und y-Achse bei 100: $f(x) = -x + 100$

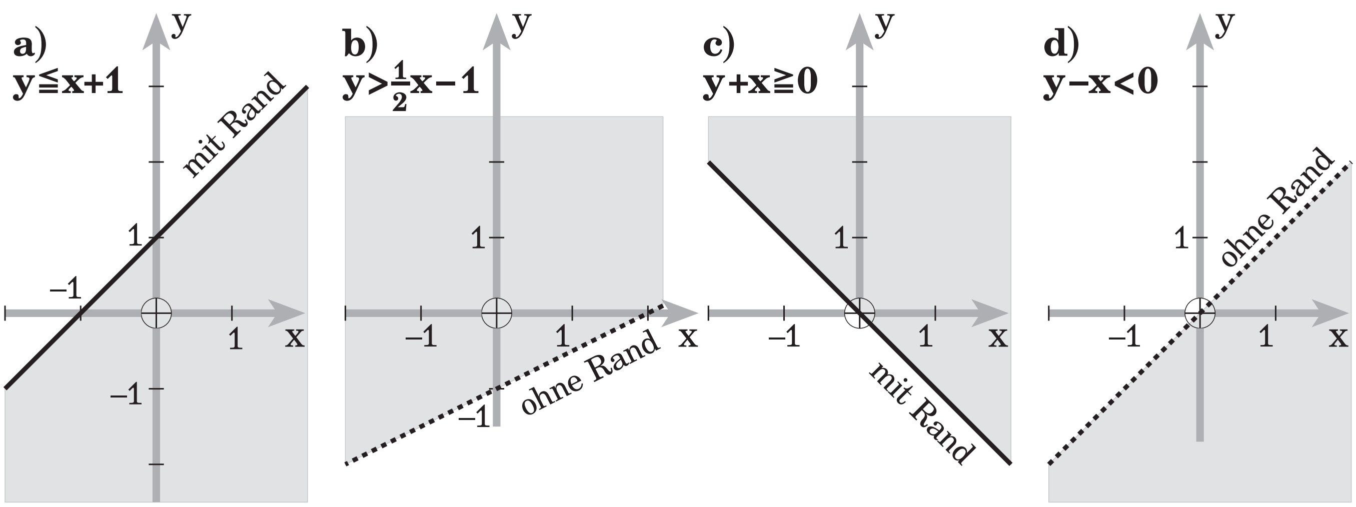
b) G_f schneidet die x-Achse bei –100, die y-Achse bei 100: $f(x) = x + 100$

c) G_f geht durch $(\sqrt{5}\,|0)$ und $(0|-\sqrt{5})$: $f(x) = -x - \sqrt{5}$

d) G_f geht durch $(\sqrt{5}\,|0)$ und $(-\sqrt{5}\,|0)$: $f(x) = 0$

e) G_f hat nur den Achsenpunkt $(0|\sqrt{5})$: $f(x) = \sqrt{5}$

•8



2.2 Geradengleichungen

◊1 **a)** $m = \frac{3}{4}$ $P(1|-2)$ $y = \frac{3}{4}x - \frac{11}{4}$ **b)** $m = -1$ $P(0|0)$ $y = -x$

c) $m = -\frac{3}{2}$ $P(2|-1)$ $y = -\frac{3}{2}x + 2$ **d)** $m = 0$ $P(0|-7)$ $y = -7$

e) $m = \sqrt{2}$ $P(\sqrt{2}\,|0)$ $y = \sqrt{2}\,x - 2$ **f)** $m = \frac{1}{a}$ $P(a|a^2)$ $y = \frac{1}{a}x + a^2 - 1$

◊2 **a)** $P(20|35)$ $Q(30|50)$ PQ: $y = \frac{3}{2}x + 5$

b) $P(35|20)$ $Q(50|30)$ PQ: $y = \frac{2}{3}x - \frac{10}{3}$

c) $P(0|0)$ $Q(-111|-111)$ PQ: $y = x$

d) $P(-30|40)$ $Q(0{,}75|-1)$ PQ: $y = -\frac{3}{4}x$

e) $P(4|-7)$ $Q(-7|-7)$ PQ: $x = -7$

f) $P(4|-7)$ $Q(4|7)$ PQ: $x = 4$

◊3 **a)** $y = -x + 5$ $m = -1$ $\alpha = -45°$ $x_N = 5$

b) $y = -\frac{1}{2}x - 3$ $m = -\frac{1}{2}$ $\alpha = -26{,}57°$ $x_N = -6$

c) $y = \sqrt{3}\,x + \sqrt{27}$ $m = \sqrt{3}$ $\alpha = 60°$ $x_N = -3$

4 **a)** $f(x) = \frac{1}{3}x + 2$ und $g(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$ $S(3|3)$ $\varphi = 45°$

b) $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{13}{2}$ und $g(x) = 2x - 6$ $S(5|4)$ $\varphi = 90°$

c) f: $8x = 13y$ und g: $8y = 5x - 1$ $S(13|8)$ $\varphi = 0{,}4°$

d) f: $8y + 13x = 88$ und g: $42y = 26x + 85$ $S(4|4{,}5)$ $\varphi = 89{,}85°$

5 **a)** $f(x) = -\frac{5}{2}(x - 3) = -\frac{5}{2}x + \frac{15}{2}$

b) $f(x) = -\frac{5}{2}(x - \frac{3}{2}) = -\frac{5}{2}x + \frac{15}{4}$

c) $f(x) = -\frac{5}{2}(x - 1) = -\frac{5}{2}x + \frac{5}{2}$

d) $f(x) = -\frac{5}{2}(x - \frac{3}{4}) = -\frac{5}{2}x + \frac{15}{8}$

6 **a)** $a(x) = 6$ b: $x = -3$ $c(x) = 3x + 5$ $d(x) = -\frac{3}{2}x + 10{,}5$

$e(x) = x + 3$ $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1{,}5$ $g(x) = -\frac{1}{3}x$ $h(x) = \frac{1}{2}x + 2{,}5$

$i(x) = \frac{1}{4}x$ $j(x) = x$ $k(x) = -2x$

b) parallel: e und j   senkrecht: a und b, c und g, h und k

c) a und b schneiden sich in $(-3|6)$ unter 90°.
b und c schneiden sich in $(-3|-4)$ unter 18,44°.

c und d schneiden sich in $(\frac{11}{9}|\frac{26}{3})$ unter 52,13°.
f und g schneiden sich in (9|–3) unter 8,13°.
h und i schneiden sich in (–10|–2,5) unter 12,53°.
d und k schneiden sich in (–21|42) unter 7,13°.

7 **a)** $y = 4$ **b)** $x = 3$ **c)** $y = -x + 7$

d) $y = \frac{2}{3}x + 2$ **e)** $y = \frac{4}{3}x + 8$ **f)** $y = \pm\frac{1}{3}\sqrt{3}x + 4 \mp \sqrt{3}$

g) $y = -4x + 16$ **h)** $y = \frac{7}{3}x - 3$

•i) $\tan\varphi = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}\right|$ einsetzen von $\varphi = 45°$, $m_1 = -5$, $m_2 = m$ liefert

$$1 = \left|\frac{m+5}{1-5m}\right| \Rightarrow \frac{m+5}{1-5m} = \pm 1$$

$$\frac{m_+ + 5}{1 - 5m_+} = +1 \Rightarrow m_+ = -\frac{2}{3} \qquad \text{Gerade} \quad y = -\frac{2}{3}x + 6$$

$$\frac{m_- + 5}{1 - 5m_-} = -1 \Rightarrow m_- = \frac{3}{2} \qquad \text{Gerade} \quad y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$$

8 Die gesuchten Punkte sind Lotfußpunkte.

a) Die Lotgerade von g durch den Ursprung $y = \frac{2}{3}x$
schneidet g im Lotfußpunkt L(–3|–2).

b) Die Lotgerade von g durch P(1|5) $y = \frac{2}{3}x + \frac{13}{3}$
schneidet g im Lotfußpunkt L(–5|1).

9 Faktorisieren und Kürzen führt zum Ziel

a) $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2 \qquad D = \mathbb{R}\setminus\{2\}$

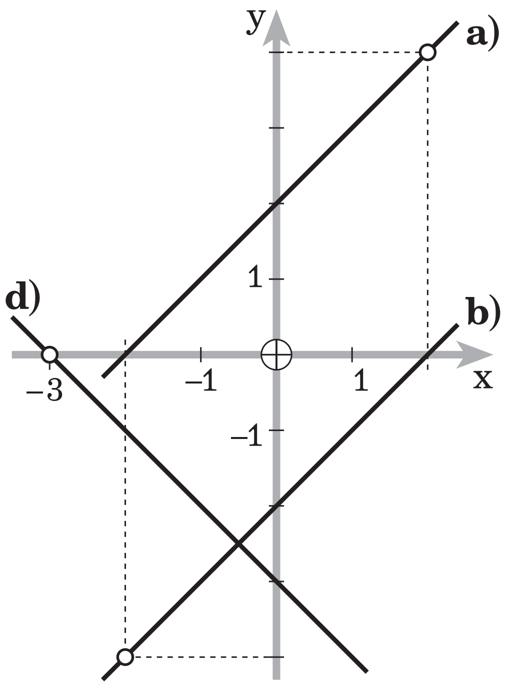
b) $f(x) = \frac{x^2-4}{x+2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x+2} = x-2 \qquad D = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$

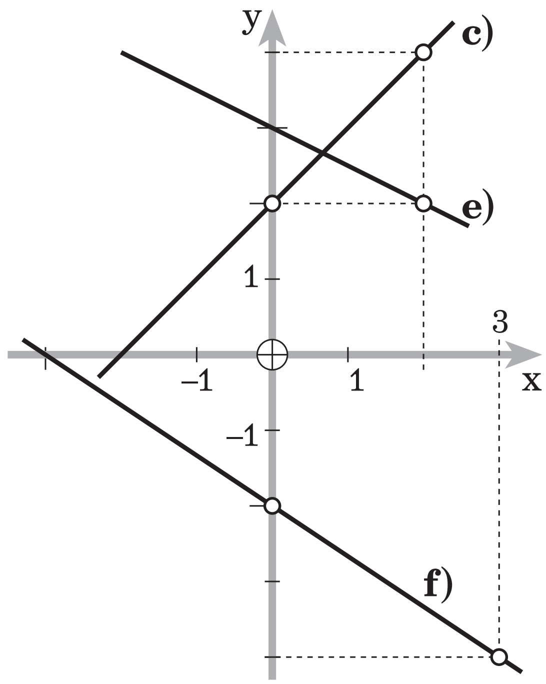
c) $f(x) = \frac{x^3-4x}{x^2-2x} = \frac{x(x-2)(x+2)}{x(x-2)} = x+2 \qquad D = \mathbb{R}\setminus\{0\,;2\}$

d) $f(x) = \frac{x^2+6x+9}{-x-3} = \frac{(x+3)^2}{-(x+3)} = -(x+3) = -x-3 \qquad D = \mathbb{R}\setminus\{-3\}$

e) $f(x) = \frac{8x-x^2-12}{2x-4} = \frac{-(x^2-8x+12)}{2(x-2)} = \frac{-(x-6)(x-2)}{2(x-2)} = -\frac{1}{2}x+3 \qquad D = \mathbb{R}\setminus\{2\}$

f) $f(x) = \frac{4x^3-24x^2+36x}{-6x^2+18x} = \frac{4x(x^2-6x+9)}{-6x(x-3)} = \frac{2x(x-3)^2}{-3x(x-3)} = -\frac{2}{3}x-2$, $D=\mathbb{R}\setminus\{0;3\}$

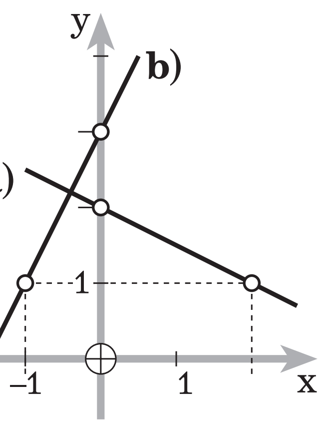




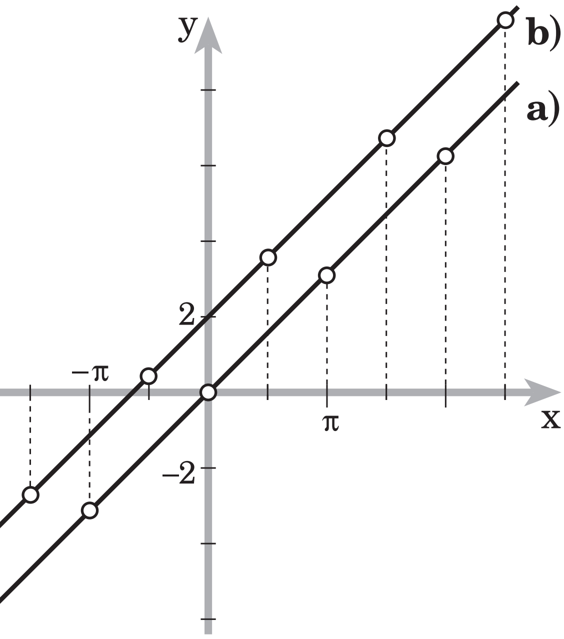
10 a) $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{x}{x} - \frac{x-2}{2-x} = -\frac{1}{2}x + 1 - (-1) = -\frac{1}{2}x + 2$ $\qquad D = \mathbb{R}\setminus\{0;2\}$

b) $f(x) = 1+x+\frac{x}{x} + \frac{x^2+2x+1}{x+1} = 1+x+1+(x+1) = 2x+3$ $\qquad D = \mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$

10



11



11 a) $f(x) = \frac{x \cdot \sin x}{\sin x} = x$ $\qquad D = \mathbb{R}\setminus\{k\pi\}$, k ist eine ganze Zahl

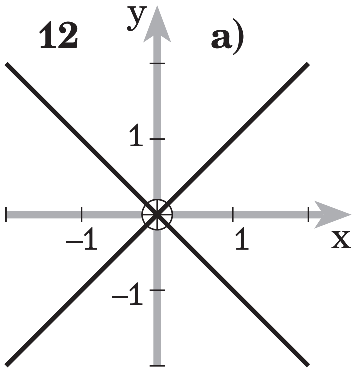
b) $f(x) = x + \frac{\cos x}{\cos x} = x + 1$ $\qquad D = \mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$, k ist eine ganze Zahl

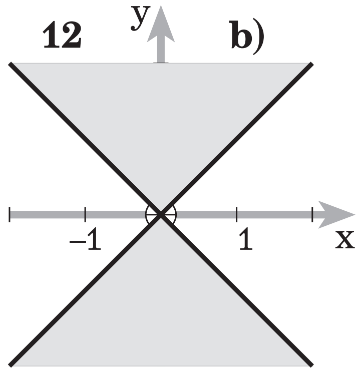
•12 a) $x^2 - y^2 = 0 \;\Rightarrow\; x^2 = y^2 \;\Rightarrow\; |x| = |y|$

$y \geqq 0:\; y = |x|$ $\qquad$ $y < 0:\; -y = |x| \;\Rightarrow\; y = -|x|$

b) $x^2 - y^2 \leq 0 \;\Rightarrow\; x^2 \leqq y^2 \;\Rightarrow\; |x| \leqq |y|$

$y \geqq 0:\; y \geqq |x|$ $\qquad$ $y < 0:\; -y \geqq |x| \;\Rightarrow\; y \leqq -|x|$





:13 a) $x^2 + y^2 - 2xy = 1 \Rightarrow\; (x - y)^2 = 1 \;\Rightarrow\; |x - y| = 1$

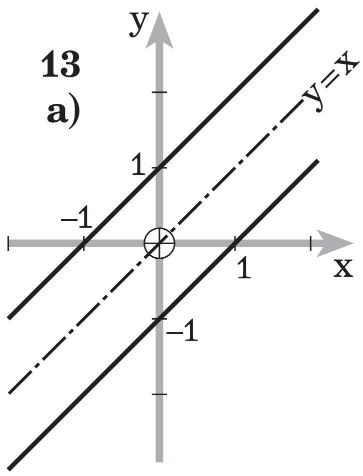
$x \geqq y:\; x - y = 1 \;\Rightarrow\; y = x - 1$

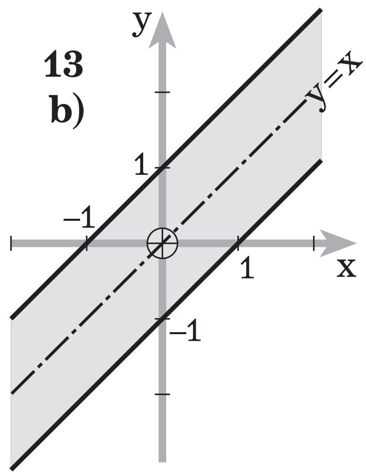
$x < y:\; -x + y = 1 \Rightarrow\; y = x + 1$

b) $x^2 + y^2 - 2xy \leq 1 \;\Rightarrow\; (x - y)^2 \leqq 1 \;\Rightarrow\; |x - y| \leqq 1$

$x \geqq y:\; x - y \leqq 1 \Rightarrow\; y \geqq x - 1$

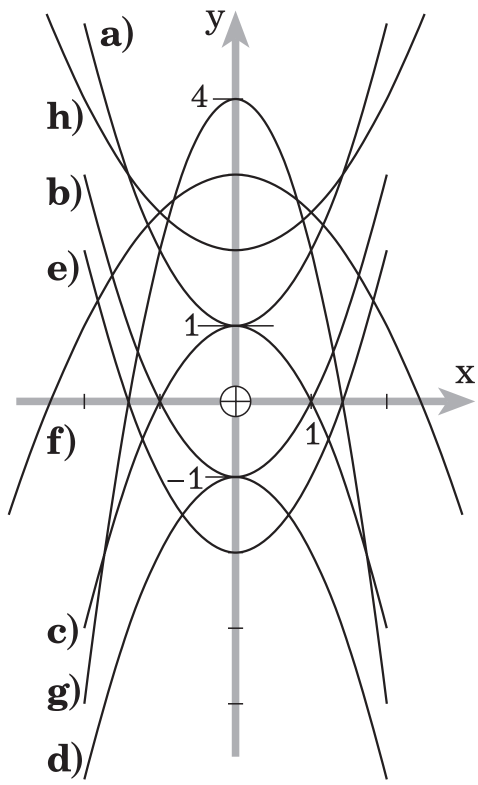
$x < y:\; -x + y \leqq 1 \Rightarrow\; y < x + 1$





3. Quadratische Funktion

3.1 Definition und Graph



◊1 a) $y = x^2 + 1 \geqq 1$
keine Nullstelle $S(0|1)$

b) $y = x^2 - 1 = 0$
Nullstellen: $+1; -1$ $S(0|-1)$

c) $y = -x^2 + 1 = 0$
Nullstellen: $+1; -1$ $S(0|1)$

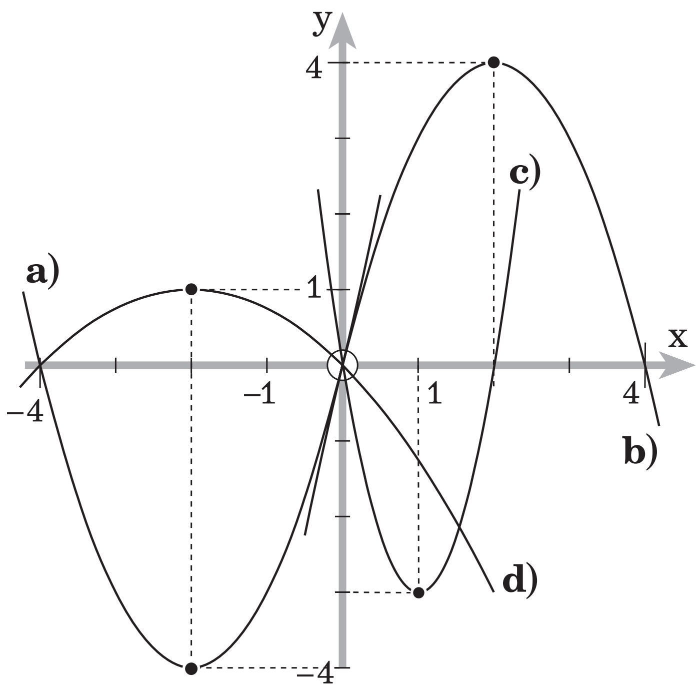
d) $y = -x^2 - 1 \leqq -1$
keine Nullstelle $S(0|-1)$

e) $y = x^2 - 2 = 0$
Nullstellen: $+\sqrt{2}\ ; -\sqrt{2}$ $S(0|-2)$

f) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3 = 0$
Nullstellen: $+\sqrt{6}\ ; -\sqrt{6}$ $S(0|3)$

g) $y = -2x^2 + 4 = 0$
Nullstellen: $+\sqrt{2}\ ; -\sqrt{2}$ $S(0|4)$

h) $y = \frac{1}{2}x^2 + 2 \geqq 2$
keine Nullstelle $S(0|2)$



◊2 a) $y = x^2 + 4x = x(x + 4) = 0$
Nullstellen: $0; -4$ $S(-2|-4)$

b) $y = 4x - x^2 = -x(x - 4) = 0$
Nullstellen: $0; 4$ $S(2|4)$

c) $y = 3x^2 + 6x = 3x(x + 2) = 0$
Nullstellen: $0; -2$ $S(-1|-3)$

d) $y = -\frac{1}{4}x^2 - x = -\frac{1}{4}x(x + 4) = 0$
Nullstellen: $0; -4$ $S(-2|1)$

◊3 a) $y = x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$ Nullstelle: -2 $S(-2|0)$

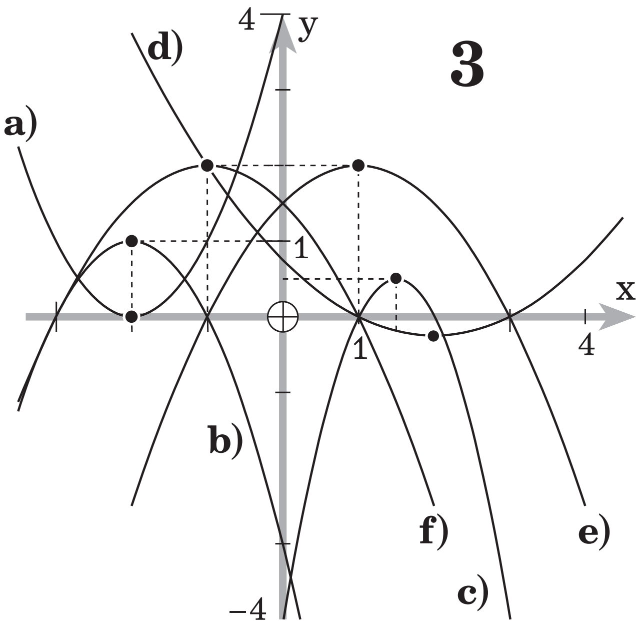
b) $y = -x^2 - 4x - 3 = -(x + 3)(x + 1)$ Nullstellen: $-3; -1$ $S(-2|1)$

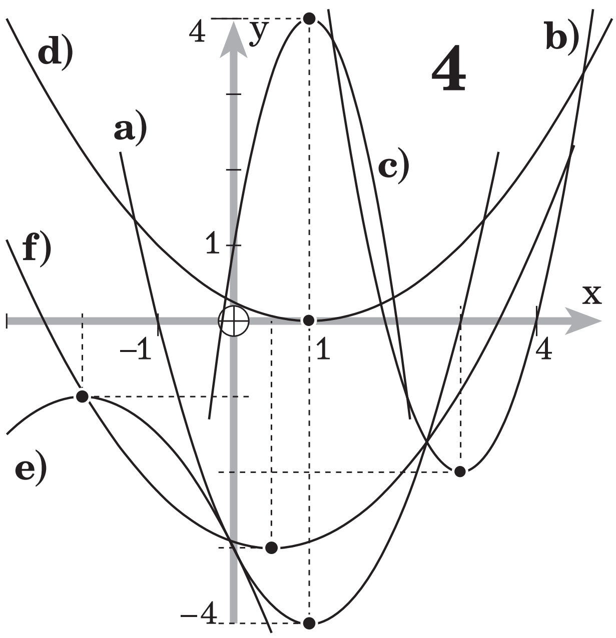
c) $y = -2x^2 + 6x - 4 = -2(x-1)(x-2)$ Nullstellen: $1; 2$ $S(1{,}5|0{,}5)$

d) $y = \frac{1}{4}x^2 - x + \frac{3}{4} = \frac{1}{4}(x - 1)(x - 3)$ Nullstellen: $1; 3$ $S(2|-0{,}25)$

e) $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}(x + 1)(x - 3)$ Nullstellen: $-1; 3$ $S(1|2)$

f) $y = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}(x + 3)(x - 1)$ Nullstellen: $-3; 1$ $S(-1|2)$





◊**4 a)**	$y = x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$	Nullstellen: –1; 3	S(1|–4)
b)	$y = 2x^2 - 12x + 16 = 2(x-2)(x-4)$	Nullstellen: 2; 4	S(3|–2)
c)	$y = -3x^2 + 6x + 1$	Nullstellen: $1 \pm \frac{2}{3}\sqrt{3}$	S(1|4)
d)	$y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(x-1)^2$	Nullstelle: 1	S(1|0)
e)	$y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x - 3$	keine Nullstelle	S(–2|–1)
f)	$y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{35}{12}$	Nullstellen: $-\frac{5}{2}; \frac{7}{2}$	S($\frac{1}{2}$|–3)

5 a) $y = x(x-4)$ **b)** $y = -(x+2)^2$ **c)** $y = -(x-1)(x-5)$
d) $y = (x+2)^2 - 3$ **e)** $y = -(x+\frac{5}{2})^2 + \frac{17}{4}$ **f)** $y = 2(x-2)^2$
g) $y = 4(x+1)(x+3)$ **h)** $y = \frac{1}{2}(x-1)^2 - 4$ **i)** $y = -\frac{1}{4}(x+1)^2 + 2$

6 a) $y = \frac{1}{2}x(x-4)$ **b)** $y = -(x-4)^2 + 2$ **c)** $y = \frac{1}{4}(x-2)^2 - 4$
d) $y = x(x-2)$ **e)** $y = -2(x-2)^2 + 1$ **f)** $y = \frac{1}{2}(x-1)^2 - 2$
g) $y = 2x(x-1)$ **h)** $y = -4(x-1)^2 + \frac{1}{2}$ **i)** $y = (x-\frac{1}{2})^2 - 1$

7 P, Q und R eingesetzt in $y=ax^2+bx+c$ ergibt ein System von 3 Gleichungen
a) P: $-3 = 4a - 2b + c$
Q: $5 = 36a - 6b + c$
R: $0 = a - b + c$ Lösung: $a = 1$, $b = 6$, $c = 5y = x^2 + 6x + 5$
$y = x^2 + 6x + 5 = (x+5)(x+1)$, Nullstellen: –5, –1 S(–3|–4)
b) P: $0{,}75 = 4a + 2b + c$
Q: $1 = a + b + c$
R: $-3 = 9a - 3b + c$
Lösung: $a = -\frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{3}{4}$,$y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$

$y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}(x+1)(x-3)$ Nullstellen: $-1, 3$ $S(1|1)$

c) Die Punkte dürfen weder auf einer Gerade liegen noch dürfen 2 Punkte senkrecht übereinander liegen.

8 a) $y = a(x+3)(x+5) = ax^2 + 8ax + 15a$
muss erfüllt werden von $x_s = -4$, $y_s = -2$:
$-2 = 16a - 32a + 15a \Rightarrow a = 2, \quad y = 2x^2 + 16x + 30$

b) $y = a(x-3)^2 + 3$ muss erfüllt werden von $x_1 = 2$, $y_1 = 0$:
$0 = a(2-3)^2 + 3 \Rightarrow a = -3, \quad y = -3x^2 + 18x - 24$

•9 a) $y = a(x+1)(x-3) = ax^2 - 2ax - 3a$ muss von P erfüllt werden
$1 = 4a - 4a - 3a \Rightarrow a = -\frac{1}{3}, \quad y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 1$

b) $y = a(x+1)(x-3) = ax^2 - 2ax - 3a$ muss von P erfüllt werden
$1 = 16a - 8a - 3a \Rightarrow a = \frac{1}{5}, \quad y = \frac{1}{5}x^2 - \frac{2}{5}x - \frac{3}{5}$

10 a) $f(x) = x^2 + 2x - 1 = x(x+2) - 1x_s = -1$ $y_s = f(-1) = -2$

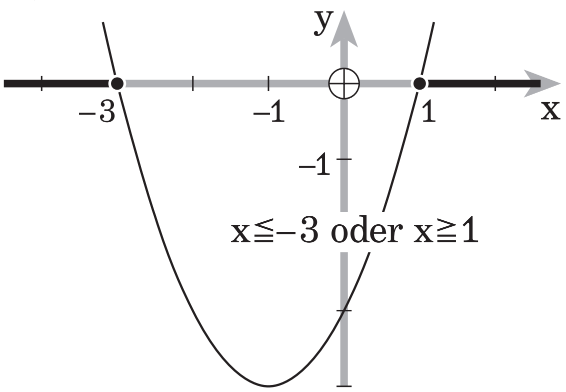
b) $f(x) = x^2 - 5x + 4 = x(x-5) + 4x_s = 2{,}5$ $y_s = f(2{,}5) = -2{,}25$

c) $f(x) = -x^2 + 4x + 96 = -x(x-4) + 96x_s = 2$ $y_s = f(2) = 100$

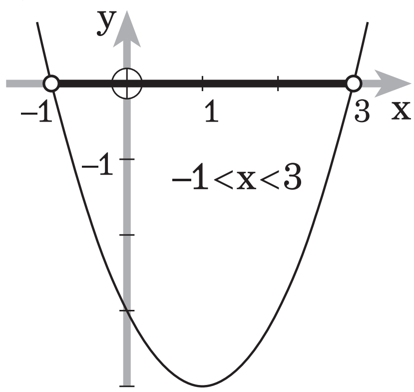
d) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}x(x-6) - \frac{5}{2}x_s = 3$ $y_s = f(3) = 2$

◊11 Skizziere die Parabel und lies im Bild die x-Werte ab, für die gilt
((auch im Lehrbuch, 1. Auflage, sollte es heißen bei **f)** $-x^2 - 4x - 4 \geqq 0$))

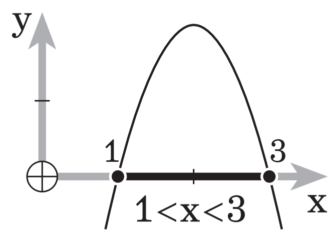
a) $\mathbf{x^2+2x-3 \geqq 0}$



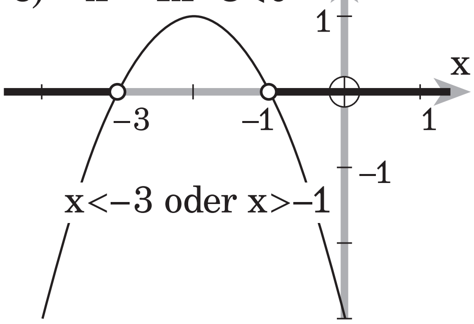
b) $\mathbf{x^2-2x-3<0}$



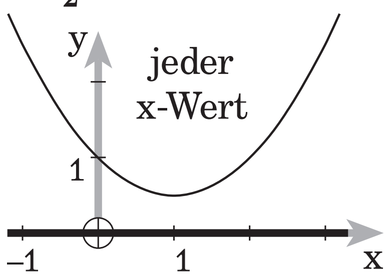
c) $\mathbf{-2x^2+8x-6 \geqq 0}$



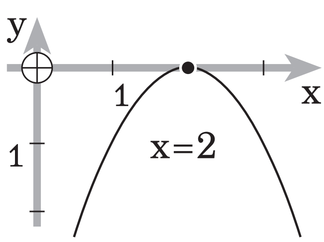
e) $\mathbf{-x^2-4x-3<0}$



e) $\mathbf{\frac{1}{2}x^2-x+1 \geqq 0}$

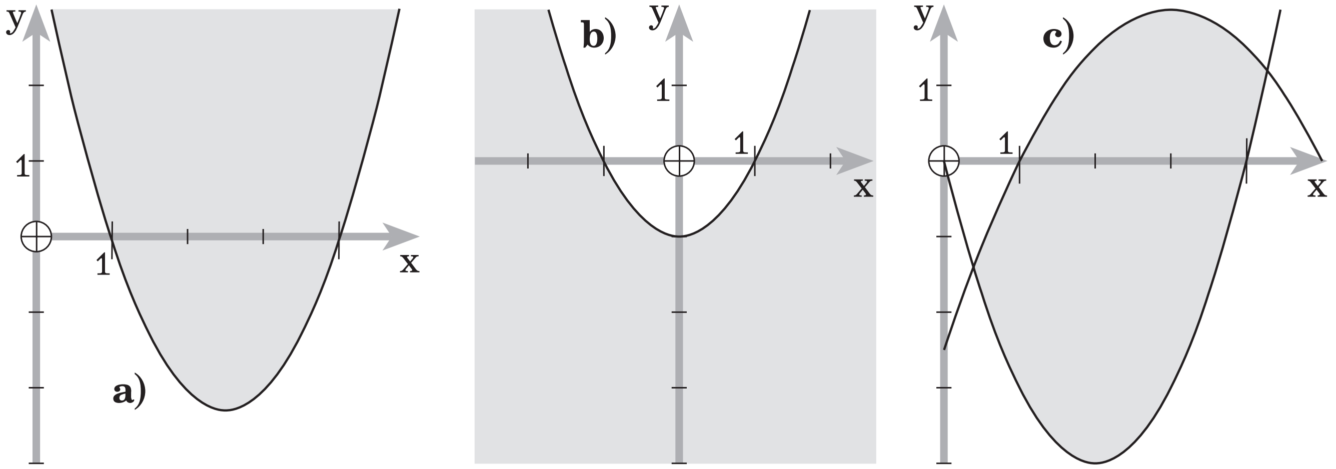


f) $\mathbf{-x^2-4x-4 \geqq 0}$



12 Kennzeichne die Menge der Punkte (x|y), für die gilt

a) $y \geqq x^2 - 5x + 4$ **b)** $y \leqq x^2 - 1$ **c)** $x^2 - 4x \leqq y \leqq -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{5}{2}$



3.2 Schnittpunkte

◊1 Gegeben ist eine Gerade g und eine Parabel p. Untersuche die Lage von g und p, bestimme gegebenenfalls die gemeinsamen Punkte.

a) g und p schneiden sich in (1|–3) und (4|0).

b) g und p schneiden sich in (–2|4) und (1|2,5).

c) g und p berühren sich im Parabelscheitel (–1|–4).

d) g und p berühren sich in (0|3).

e) g und p schneiden sich in (3|–1,5).

f) g und p treffen sich nicht.

g) g ist Passante von p.

h) g ist Passante von p.

2 p: $y = \frac{1}{4}x^2 - x$ hat den Scheitel S(2|–1),
Gleichung der Parallele g zur Winkelhalbierenden durch S: $y = x - 3$
g schneidet p in S(2|–1) und T(6|3).

3 **a)** Die Geraden haben dieselbe Steigung, es sind Parallelen.

b) Terme gleichsetzen: $\frac{1}{2}x^2 - x - 4 = 2x + t$
$x^2 - 6x - (8 + 2t) = 0$, Diskriminante $D = 36 + 4(8+2t) = 4(2t+17)$
Berührung: $D = 0$, also $2t + 17 = 0 \Rightarrow t = -8{,}5$
Berührstelle: $x = \frac{6 \pm 0}{2}$
Die Gerade mit $g_{-8,5}(x) = 2x - 8{,}5$ berührt die Parabel in (3|–2,5).

c) Schnitt: $D > 0$, also $2t + 17 > 0 \Rightarrow t > -8{,}5$

d) Gerade durch Parabelscheitel (1|–4,5): $g_{-6,5}(x) = 2x - 6{,}5$

e) Passante: $D < 0$, also $2t + 17 < 0 \Rightarrow t < -8{,}5$

•4 a) Jede Gerade geht durch $(-5|3)$.

b) Terme gleichsetzen: $-\frac{1}{4}x^2 - 2x - 3 = m(x+5) + 3$

geordnet: $x^2 + 4(m+2)x + 4(5m+6) = 0$

Diskriminante $D = 16(m+2)^2 - 16(5m+6) = 16(m^2 - m - 2)$

$D = 16(m+1)(m-2)$

Berührung: $D = 0$, also $(m+1)(m-2) = 0 \Rightarrow m = -1$ oder $m = 2$

es gibt also 2 Tangenten

Berührstellen: $x = \frac{-4(m+2) \pm 0}{2} = -2m - 4$

Fall $m = -1$: $g_{-1}(x) = -x - 2$ Berührstelle: $x = -2(-1) - 4 = -2$

$y = g_{-1}(-2) = 0$ g_{-1} berührt p in $(-2|0)$

Fall $m = 2$: $g_2(x) = 2x + 13$ Berührstelle: $x = -2(2) - 4 = -8$

$y = g_2(-8) = -3$ g_2 berührt p in $(-8|-3)$

c) Sekanten: $D > 0$, also $(m+1)(m-2) > 0$

$D = (m+1)(m-2)$ kann man in einem m-D-Koordinatensystem als Parabel deuten: diese hat die Nullstellen -1 und 2 und ist oben offen; D ist positiv, wenn $m < -1$ oder wenn $m > 2$ ist.

d) Passanten:$D < 0$, also die restlichen m-Werte: $-1 < m < 2$

•5 a) Terme gleichsetzen: $\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2} = m(x-5) + 4$

geordnet: $x^2 - 2(m+2)x + (10m - 5) = 0$

Diskriminante $D = 4(m+2)^2 - 4(10m-5) = 4(m^2 - 6m + 9) = 4(m-3)^2$

Berührung: $D = 0$, also $m - 3 = 0 \Rightarrow m = 3$

Berührstelle: $x = \frac{2(m+2) \pm 0}{2} = m + 2$, für $m = 3$ ist $x = 5$

Die Gerade mit $g_3(x) = 3x - 11$ berührt die Parabel in $(5|4)$.

b) Sekanten: $D > 0$, also $(6-2m)^2 > 0 \Rightarrow m \neq 3$

Schnittstellen: $x = \frac{2(m+2) \pm 2(m-3)}{2} = m + 2 \pm (m-3)$

$x_+ = 5$, $y_+ = g_m(5) = 4$, $x_- = 2m - 1$

$y_- = g_m(2m-1) = m(2m - 1 - 5) + 4 = 2m^2 - 6m + 4 = 2(m-2)(m-1)$

Im Schnittpunkt $(5|4)$ kommt m nicht vor, also geht durch ihn jede Gerade (was man auch am Geradenterm ablesen kann),
alle Geraden schneiden sich im Parabelpunkt $(5|4)$.
Im andern Schnittpunkt $(2m-1|2(m-1)(m-2))$ kommt m vor,
also hängt sein Ort von der jeweiligen Gerade g_m ab.

c) Die Diskriminante ist ein Quadrat, sie kann also für keinen Wert von m negativ sein. Deshalb ist keine Gerade Passante der Parabel.

•6 Terme gleichgesetzt und geordnet: $x^2 - 2(4-m)x + (11 - 6m) = 0$

Diskriminante $D = 4(m^2 - 2m + 5) = 4((m+1)^2 + 4) \geqq 4 \cdot 4 > 0$

Keine der Geraden g_m ist Tangente, keine ist Passante,
jede Gerade ist Sekante.

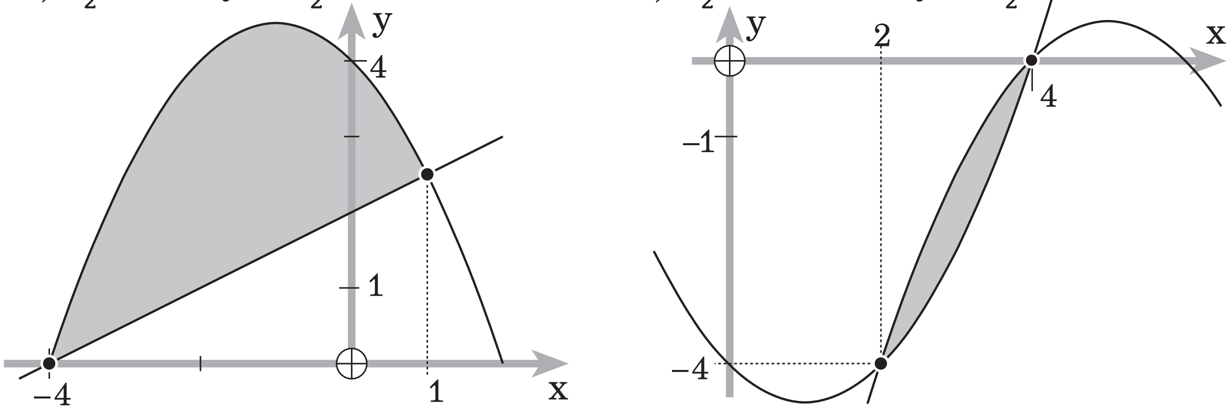
◊7 **a)** p und q schneiden sich in (–2|3) und (2|–5).
b) p und q schneiden sich in (–2|0) und (2|–4).
c) p und q haben keinen Punkt gemeinsam.
d) p und q berühren sich in (–1|2,5).
e) p und q schneiden sich in (2|0).
f) p und q haben keinen Punkt gemeinsam.
g) p und q berühren sich in (6|3).
h) p und q haben alle Punkte gemeinsam: p = q.

•8 $p_a(x) = ax^2$, $q(x) = x^2 - 10x + 20$
a) Alle Parabeln haben den Scheitel im Ursprung.
b) Terme gleichgesetzt und geordnet: $(1-a)x^2 - 10x + 20 = 0$
Diskriminante $D = 100 - 4(1-a)\cdot 20 = 20(1 + 4a)$
Berührung: $D = 0$, also $a = -1/4$
Berührstelle $x = \frac{10 \pm 0}{2(1-a)} = \frac{5}{1-a}$, für $a = -\frac{1}{4}$ ist $x = 4$
Die Parabel $p_{-1/4}$ berührt die Parabel q in (4|–4).
c) Schnitt: $D > 0$, also $1 + 4a > 0 \Rightarrow a > -\frac{1}{4}$
d) p_a muss eine Normalparabel sein, also $a = 1 \Rightarrow x = 2, y = 4$
e) kein gemeinsamer Punkt: $D < 0$, also $1 + 4a < 0 \Rightarrow a < -\frac{1}{4}$

•9 **a)** Alle Parabeln haben den Scheitel auf der x-Achse,
sind oben offene Normalparabeln.
b) Terme gleichgesetzt und geordnet: $3x^2 - 4(k+2)x + 2(k^2+5) = 0$
Diskriminante $D = 16(k+2)^2 - 12\cdot 2(k^2+5) = -8(k^2-8k+7) = -8(k-1)(k-7)$
Berührung: $D = 0$, also $k = 1$ oder $k = 7$
es berühren 2 Parabeln: p_1 und p_7
Berührstellen: $x = \frac{4(k+2) \pm 0}{6} = \frac{2}{3}(k+2)$
Fall k= 1: $p_1(x) = (x-1)^2$ Berührstelle: $x = 2$
$y = p_1(2) = 1$ p_1 berührt q in (2|1)
Fall k= 7: $p_7(x) = (x-7)^2$ Berührstelle: $x = 6$
$y = p_1(6) = 1$ p_7 berührt q in (6|1)
c) Schnitt: $D > 0$, also $-8(k-1)(k-7) > 0$
$D = -8(k-1)(k-7)$ kann man in einem k-D-Koordinatensystem als Parabel deuten: diese hat die Nullstellen 1 und 7 und ist unten offen; D ist positiv, wenn $1 < k < 7$ ist.
d) kein gemeinsamer Punkt: $D < 0 \Rightarrow k < 1$ oder $7 < k$.

10

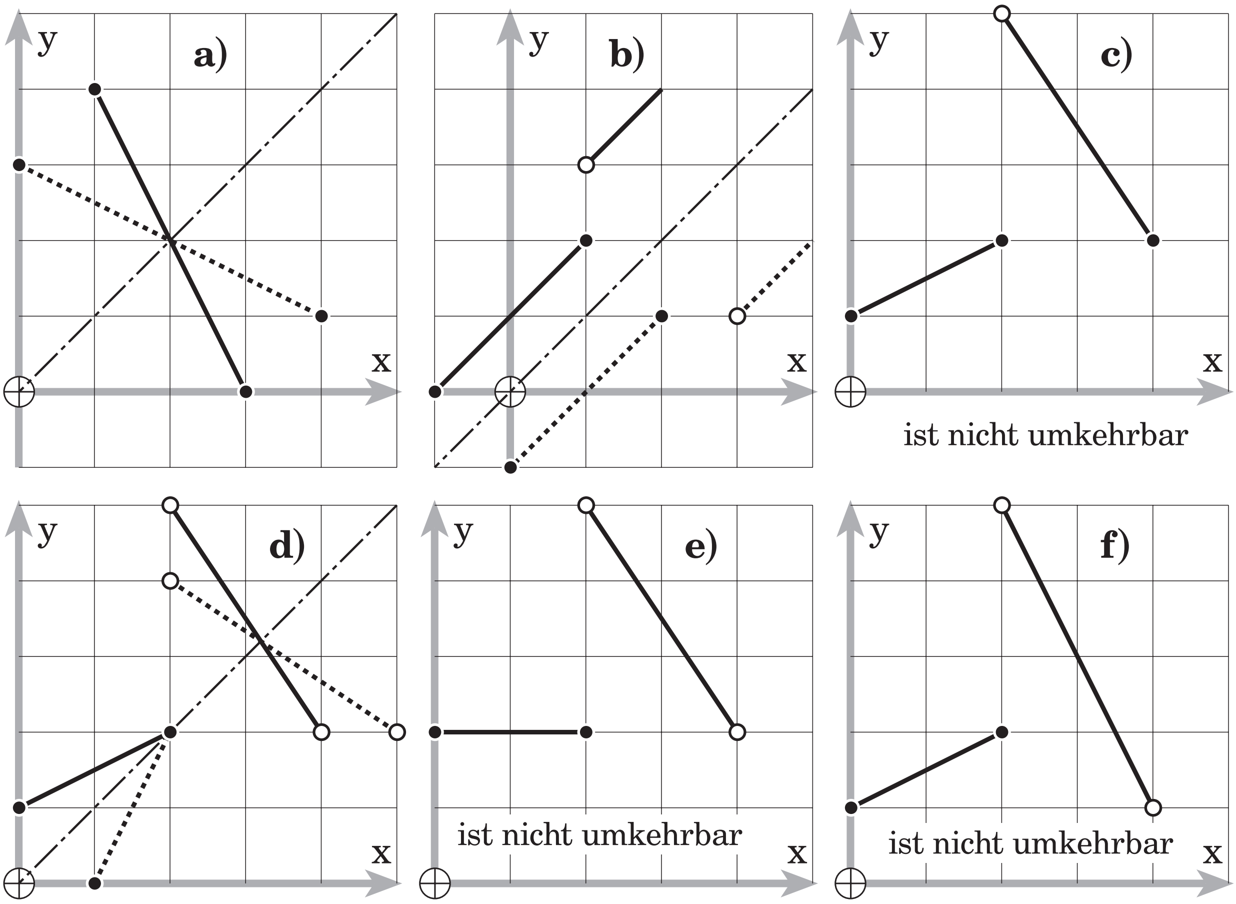
a) $\frac{1}{2}x + 2 \leqq y \leqq -\frac{1}{2}x^2 - x + 4$ **b)** $\frac{1}{2}x^2 - x - 4 \leqq y \leqq -\frac{1}{2}x^2 + 5x - 12$



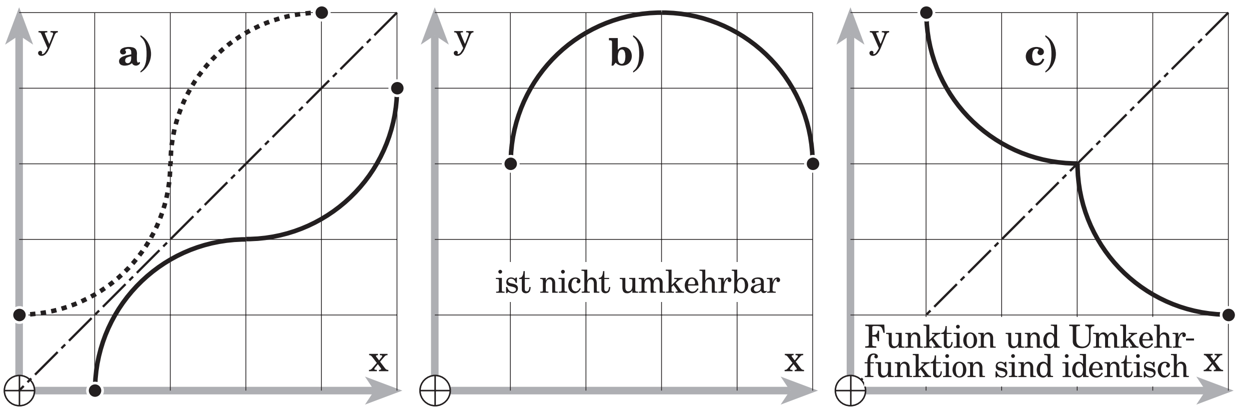
4. Umkehrfunktion und Wurzelfunktion

4.1 Umkehrfunktion

◊1



2



◊3 a) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$ mit $D_f = \mathbb{R}$

$f^{-1}(x) = -2x + 4$ mit $D_{f^{-1}} = \mathbb{R} = W_{f^{-1}}$

b) $g(x) = -\frac{1}{2}x + 2$ mit $D_g = [-2;4[$ $W_g =]0;3]$

$g^{-1}(x) = -2x + 4$ mit $D_{g^{-1}} =]0;3]$ und $W_{g^{-1}} = [-2;4[$

c) $h(x) = 3x - 3$ mit $D_h = \mathbb{R}_0^+$ $W_h =]-3;+\infty]$

$h^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + 1$ mit $D_{h^{-1}} =]-3;+\infty]$ und $W_{h^{-1}} = \mathbb{R}_0^+$

4 $f(x) = mx + t$ mit $D_f = \mathbb{R}$

$f^{-1}(x) = \frac{1}{m}x - \frac{1}{m}$ wenn $f = f^{-1}$ dann $f(x) = f^{-1}(x)$

$mx + t = \frac{1}{m}x - \frac{1}{m}$ Gerade und Umkehrgerade sind gleich

Koeffizientenvergleich: $m = \frac{1}{m} \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm 1$

$t = -\frac{1}{m} \Rightarrow mt + t = 0 \Rightarrow t(m+1) = 0$

Fall $m = 1$: $t(1+1) = 0 \Rightarrow t = 0$ $f(x) = x$ ist eine Lösung

Fall $m = -1$: $t \cdot 0 = 0 \Rightarrow t$ beliebig $f(x) = -x + t$ unendl.viele Lösungen

5 a) $f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$ mit $D_f = [-1;3[$ Umkehrfunktion: $f^{-1}(x) = \frac{3}{2}x - 2$

$f(f^{-1}(x)) = \frac{2}{3}(\frac{3}{2}x-2)+\frac{4}{3} = x-\frac{4}{3}+\frac{4}{3} = x$, Identität für $x \in D_{f^{-1}}$

$f^{-1}(f(x)) = \frac{3}{2}(\frac{2}{3}x+\frac{4}{3})-2 = x+2-2 = x$, Identität für $x \in D_f$

b) $g(x) = \frac{x}{x-1}$ mit $D_g = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ Umkehrfunktion: $g^{-1}(x) = \frac{x}{x-1}$

$$g(g^{-1}(x)) = g^{-1}(f(x)) = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}-1} = \frac{x}{x-(x-1)} = x$$

Identität für $x \in D_g = D_{g^{-1}}$

c) $h(x) = \sqrt{x}$ mit $D_h = \mathbb{R}_0^+$ Umkehrfunktion: $h^{-1}(x) = x^2$

$h(h^{-1}(x)) = \sqrt{x^2} = x$, Identität für $x \in D_{h^{-1}}$

$h^{-1}(h(x)) = (\sqrt{x})^2 = x$, Identität für $x \in D_h$

6 Weil sich Kurve und Umkehrkurve auf der Gerade $y = x$ schneiden, findet man die x-Werte der Schnittpunkte durch Lösen von $f(x) = x$

a) $f(x) = 2x^3 + x - 16$ mit $D_f = \mathbb{R}$

$2x^3 + x - 16 = x \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$ S(2|2)

b) $f(x) = x^2 + 2x - 6$ mit $D_f = [-1;+\infty[$

$x^2 + 2x - 6 = x \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow (x+3)(x-2) = 0 \Rightarrow x = 2$ S(2|2)

c) $f(x) = -x^2 + 2x$ mit $D_f =]-\infty;1[$
$-x^2 + 2x = x \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0$ (oder $x = 1 \notin D_f$)
Schnittpunkt $(0|0)$, Loch$(1|1)$

•7 $f(x) = \sqrt{x}$ mit $D_f = \mathbb{R}_0^+$, gib folgende Terme an:

a) $f^{-1}(x) = x^2$ **b)** $f(x)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

d) $f^2(x) = f(f(x)) = \sqrt{\sqrt{x}}$ **e)** $f(x)^2 = f(x)\cdot f(x) = x$ **f)** $f(x^2) = |x| = x$

g) $f^{-2}(x) = f^{-1}(f^{-1}(x)) = f^{-1}(x^2) = (x^2)^2 = x^4$

h) $(f^{-1})^{-1}(x) = \sqrt{x}$, $(f^{-1})^{-1}$ ist die Umkehrfunktion der Umkehrfunktion

i) $f^{-1}(x^{-1})^{-1} = \frac{1}{f^{-1}(x^{-1})} = \frac{1}{f^{-1}(\frac{1}{x})} = x^2$ denn $f^{-1}(x) = x^2, f^{-1}(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x^2}$

4.2 Wurzelfunktion

◊1 a) $f(x) = (x+1)(x-3)$ mit $D_f = \mathbb{R}$
Nullstellen $-1, 3$ Trennstelle 1 Scheitel $(1|-4)$
Einschränkungen: $g(x) = (x+1)(x-3)$ mit $D_g =]-\infty;1] = W_{g^{-1}}$
$h(x) = (x+1)(x-3)$ mit $D_h = [1;+\infty[= W_{h^{-1}}$
$y = x^2 - 2x - 3$, $x^2 - 2x - (3+y) = 0$ $D = 4 + 4(3+y) = 4(4+y)$
$x = 1 \pm \sqrt{4+y}$ Koordinatentausch $y = 1 \pm \sqrt{4+x}$
weil y den Wert 0 annehmen können muss, gilt das Minuszeichen,
die 0 ist enthalten in $W_{g^{-1}}$ $g^{-1}(x) = 1 - \sqrt{4+x}$ $D_{g^{-1}} = [4;+\infty[$

b) $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ mit $D_f = [-1;3]$
$y = -x^2 + 2x + 3$ $x^2 - 2x - (3-y) = 0$, $D = 4 + 4(3-y) = 4(4-y)$
$x = 1 \pm \sqrt{4-y}$ Trennstelle 1 Scheitel $(1|4)$ $W_f = [0;4]$
Einschränkungen: $g(x) = -x^2 + 2x + 3$ mit $D_g = [-1;1] = W_{g^{-1}}$
$h(x) = -x^2 + 2x + 3$ mit $D_h = [1;3] = W_{h^{-1}}$

Koordinatentausch $y = 1 \pm \sqrt{4-x}$
weil y den Wert 0 annehmen können muss, gilt das Minuszeichen,
die 0 ist enthalten in $W_{g^{-1}}$ $g^{-1}(x) = 1 - \sqrt{4-x}$ $D_{g^{-1}} = [0;4]$

c) $f(x) = x^2 + 2x - 3$ mit $D_f = \mathbb{R}_0^-$
$y = x^2 + 2x - 3$ $x^2 + 2x - (3+y) = 0$, $D = 4 + 4(3+y) = 4(4+y)$
$x = -1 \pm \sqrt{4+y}$ Trennstelle -1 Scheitel $(-1|-4)$ $W_f = [-4;+\infty[$
Einschränkungen: $g(x) = x^2 + 2x - 3$ mit $D_g =]-\infty;-1] = W_{g^{-1}}$

$h(x) = x^2 + 2x - 3$ mit $D_h = [-1;0] = W_{h^{-1}}$

Koordinatentausch $y = -1 \pm \sqrt{4+x}$

weil y den Wert 0 annehmen können muss, gilt das Pluszeichen,

die 0 ist enthalten in $W_{h^{-1}}$ $h^{-1}(x) = -1 + \sqrt{4+x}$ $D_{h^{-1}} = [-4;+\infty[$

2 $f(x) = -\sqrt{-x}$ mit $D_f = \mathbb{R}_0^-$ $W_f = D_f$ die Wurzelfunktion ist umkehrbar

$y = -\sqrt{-x}$ $(-\sqrt{-x})^2 = y^2$ $-x = y^2$ $x = -y^2$

Koordinatentausch $y = -x^2$ $f^{-1}(x) = -x^2$ $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}_0^-$

3 $f(x) = \sqrt{x-1}$

$D_f = [1;+\infty[$, $W_f = [0;+\infty[$

$y = \sqrt{x-1}$, $y^2 = x - 1$

$x = y^2 + 1$

Koordinatentausch

$y = f^{-1}(x) = x^2 + 1$ $D_{f^{-1}} = [0;+\infty[$

$g(x) = -\sqrt{5-x}$

$D_g =]-\infty;5]$, $W_g =]-\infty;0]$

$y = -\sqrt{5-x}$, $y^2 = 5 - x$

$x = -y^2 + 5$

$y = g^{-1}(x) = -x^2 + 5$ $D_{g^{-1}} =]-\infty;0]$

4 $f(x) = 1 - \sqrt{x-2}$

$D_f = [2;+\infty[$, $W_f =]-\infty;1]$

$y = 1 - \sqrt{x-2}$, $y - 1 = -\sqrt{x-2}$, $(y-1)^2 = x - 2$, $x = (y-1)^2 + 2$

Koordinatentausch: $y = f^{-1}(x) = (x-1)^2 + 2$ $D_{f^{-1}} =]-\infty;1]$

5 $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ mit $D_f = [0;1]$

f ist umkehrbar, weil zu jedem x-Wert aus $[0;1]$ ein andrer x^2-Wert und damit ein andrer Funktionwert f(x) gehört. $W_f = D_f = [0;1]$

$y = \sqrt{1-x^2}$, $y^2 = 1 - x^2$, $x^2 = 1 - y^2$, $x = \pm\sqrt{1-y^2}$

wegen $D_f = [0;1]$ darf x nicht negativ sein, also kommt »–« nicht infrage

Koordinatentausch: $y = \sqrt{1-x^2}$ $D_{f^{-1}} = [0;1]$

Der Graph von f liegt im 1. Quadranten und ist symmetrisch zu y = x

von oben $x^2 = 1 - y^2$ folgt $x^2 + y^2 = 1$

Pythagoras! Die KathetenQuadrate über x und y sind zusammen so groß wie das HypotenusenQuadrat; weil die Hypotenuse den Punkt P mit dem Ursprung verbindet, liegen die Punkte im 1. Quadranten auf dem Einheitskreis um O. Das Schaubild ist der Bogen des Einheitskreises um O, der im 1. Quadranten liegt.

II. Polynomfunktion

1. Potenzfunktion

◊1 Ergänze die Tabelle auf Millionstel gerundet.

x	0,8	0,4	0,2	0,1	0,05
x^2	0,640000	0,160000	0,040000	0,010000	0,002500
x^5	0,327680	0,010240	0,000320	0,000010	0,000000

2 Ergänze die Tabelle auf Millionstel gerundet.

x	−0,2	−0,1	−0,05
x^3	−0,008000	−0,001000	−0,000125
x^5	−0,000320	−0,000010	−0,000000
x^{15}	−0,000000	−0,000000	−0,000000

3 Ergänze die Tabelle auf Hundertstel gerundet.

x	1,1	1,5	2
x^2	1,21	2,25	4
x^5	1,61	7,59	32
x^8	2,14	25,62	256

4 Ergänze die Tabelle auf Hundertstel gerundet.

x	0,9	1	1,1
x^2	0,81	1	1,21
x^6	0,53	1	1,77
x^{20}	0,12	1	6,73

5 Für welche positiven Zahlen a, b, c und d gilt (auf Hundertstel runden):

a) $a^2 < 0{,}001 \Rightarrow a < 0{,}001^{1/2} = 0{,}0316$ $\quad b^3 < 0{,}001 \Rightarrow b < 0{,}001^{1/3} = 0{,}1$
$c^5 < 0{,}001 \Rightarrow c < 0{,}001^{1/5} = 0{,}251$ $\quad d^{10} < 0{,}001 \Rightarrow d < 0{,}001^{1/10} = 0{,}501$

b) $a^2 > 1000 \quad a > 1000^{1/2} = 31{,}62$ $\quad b^3 > 1000 \Rightarrow b > 1000^{1/3} = 10$
$c^5 > 1000 \quad c > 1000^{1/5} = 3{,}98$ $\quad d^{10} > 1000 \Rightarrow d > 1000^{1/10} = 1{,}995$

2. Polynomfunktion

2.1 Definition; Verhalten im Unendlichen

1 a) $f(x) = -x^4 + x^3 - 2x$ Grad 4, $c_4 = -1$, $c_3 = 1$, $c_2 = c_0 = 0$, $c_1 = -2$

b) $f(x) = x^{17} - 1$ Grad 17, $c_{17} = 1$, $c_0 = -1$, c_1 bis $c_{16}: = 0$

c) $f(x) = 0,1x^{10} + \frac{1}{2}x^8 - x^6 + \sqrt{3}x^4$ $c_0 = c_1 = c_2 = c_3 = c_5 = c_7 = c_9 = 0$

Grad 10, $c_{10} = 0,1$; $c_8 = 0,5$; $c_6 = -1$; $c_4 = \sqrt{3}$;

2 a) $c_1 = -1$, $c_0 = 7$ $f(x) = -x + 7$

b) $c_2 = 2$, $c_1 = c_0 = -13$ $f(x) = 2x^2 - 13x - 13$

c) $c_{12} = 12$, $c_6 = -6$, $c_1 = 1$, alle andern $a_i = 0$ $f(x) = 12x^{12} - 6x^6 + x$

d) $c_i = -(-i)^i$, $i \in \{1, \ldots, 5\}$ $f(x) = 3125x^5 - 256x^4 + 27x^3 - 4x^2 + x$

3 a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x^3 + x^2 - 12) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}(x^3) = \pm\infty$

G_f kommt von $-\infty$ und geht nach $+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x^4 - 2^4) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}(x^4) = +\infty$

G_f kommt von $+\infty$ und geht nach $+\infty$

c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(-4x^4 + 16x^3 - 9x^2 + 5^{20}) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}(-4x^4) = -\infty$

G_f kommt von $-\infty$ und geht nach $-\infty$

d) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(-\frac{3}{2}x^3 + 7x^2 - 7x + 1) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}(-\frac{3}{2}x^3) = \mp\infty$

G_f kommt von $+\infty$ und geht nach $-\infty$

•4 a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(-2(x-5)^5) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}(-2(x^5\ldots)) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}(-2x^5) = \mp\infty$

G_f kommt von $+\infty$ und geht nach $-\infty$

b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}((x-3)(3-x)^3) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}((x\ldots)(\ldots -x^3)) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}(-x^4) = -\infty$

G_f kommt von $-\infty$ und geht nach $-\infty$

c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}((x-1)(2-x)(2x-3)(4-3x)) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}((-x^2)(-6x^2)) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}(6x^4) = +\infty$

G_f kommt von $+\infty$ und geht nach $+\infty$

d) Es geht auch so: $f(x) = -5x^5(x-5)^5(25-x^3)^5 = -5x^5(x^5\ldots)(\ldots -x^{15}) = 5x^{25}\ldots$

G_f kommt von $-\infty$ und geht nach $+\infty$

2.2 Symmetrie

1 Wenn sich G_g und G_f schneiden, dann auf ihrer Symmetrieachse: $y = 0$. Die x-Werte der Schnittpunkte sind die Nullstellen von f.

a) $f(x) = \frac{3}{2}x - 6$ $\quad g(x) = -f(x) = -\frac{3}{2}x + 6$

Schnitt: $f(x) = g(x) \Rightarrow x = 4$ Schnittpunkt $(4|0)$

b) $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ $\quad g(x) = -f(x) = x^2 - 4x + 3$

Schnitt: $f(x) = g(x) \Rightarrow$ Schnittpunkte $(1|0)$, $(3|0)$

c) $f(x) = x(x^2 - 4)$ $\quad g(x) = -f(x) = -x(x^2 - 4)$

Schnitt: $f(x) = g(x) \Rightarrow$ Schnittpunkte $(0|0)$, $(2|0)$, $(-2|0)$

2 a) $f(x) = \frac{3}{2}x - 6$ $\quad g(x) = f(-x) = -\frac{3}{2}x - 6$

Schnitt: $f(x) = g(x) \Rightarrow x = 0$ Schnittpunkt $(0|-6)$

b) $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ $\quad g(x) = f(-x) = -(-x)^2 + 4(-x) - 3 = -x^2 - 4x - 3$

Schnitt: $f(x) = g(x) \Rightarrow x = 0$ Schnittpunkt $(0|-3)$

c) $f(x) = x(x^2 - 4)$ $\quad g(x) = f(-x) = -x(x^2 - 4)$

Schnitt: $f(x) = g(x) \Rightarrow$ Schnittpunkte $(0|0)$, $(2|0)$, $(-2|0)$

3 a) $f(x) = \frac{3}{2}x - 6$ $\quad g(x) = -f(-x) = \frac{3}{2}x + 6$

beide Geraden sind parallel, also kein Schnitt

b) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 2$ $\quad g(x) = -f(-x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2$

Schnitt: $f(x) = g(x) \Rightarrow$ Schnittpunkte $(-2|-4)$, $(2|4)$

c) $f(x) = x(x^2 - 4)$ $\quad g(x) = -f(-x) = x(x^2 - 4)$

Kurve und ihr Spiegelbild sind identisch, die Kurve ist symm. zu O.

◊4 a) $f(x) = 2x - 1$ keine Symmetrie

b) $f(x) = 4$ Symmetrie zur y-Achse

c) $f(x) = 4 - x^2 + 3x^4$ Symmetrie zur y-Achse

d) $f(x) = x - 4x^3$ Symmetrie zum Ursprung

e) $f(x) = x(x^2 - 4)$ Symmetrie zum Ursprung

f) $f(x) = x^2(x - 4)$ keine Symmetrie

g) $f(x) = 2(x - x^3)^2$ Symmetrie zur y-Achse

h) $f(x) = 2(1 - x^2)^3$ Symmetrie zur y-Achse

i) $f(x) = (5 - x)(5 + x)x$ Symmetrie zum Ursprung

5 a) $f(x) = x - a$ $a = 0$: Symmetrie zum Ursprung

b) $f(x) = x(x - a)$ $a = 0$: Symmetrie zur y-Achse

c) $f(x) = x(x - a)^2$ $a = 0$: Symmetrie zum Ursprung

d) $f(x) = x(x^2-a)$ für jedes a: Symmetrie zum Ursprung

e) $f(x) = ax^2-(1-a)x + a$ a = 0: Symmetrie zum Ursprung
a = 1: Symmetrie zur y-Achse

f) $f(x) = x^2(x-2a)(x+2a)$ für jedes a: Symmetrie zur y-Achse

6 Begründe: Eine bei 0 definierte Kurve, die symmetrisch ist zum Ursprung, geht durch den Ursprung.
Wenn $f(-x) = -f(x)$, dann $f(0) = -f(0)$, also $f(0) = 0$

•7 Spiegle die Parabel mit $p(x) = (x + 1)(x - 3)$ an

a) $y = -1$; $q(x) = 2\cdot(-1) - p(x) = -2 - x^2 + 2x + 3 = -x^2 + 2x + 1$

b) $x = -1$; $q(x) = p(-2-x) = (-2-x + 1)(-2-x - 3) = (x + 1)(x + 5)$

c) $x = 1$; $q(x) = p(2-x) = (2-x + 1)(2-x - 3) = (x - 3)(x + 1)$

d) $(2|-2)$; $q(x) = 2\cdot(-2) - p(4-x) = -4 - (4-x + 1)(4-x - 3) =$
$= -4 - (5-x)(1-x) = -x^2 + 6x - 9 = -(x-3)^2$

:8 a) G_f mit $f(x) = x^4+4x^3+4x^2$ ist symmetrisch zu x = s.
Term handlicher machen: $f(x) = x^2(x^2 + 4x + 4) = x^2(x + 2)^2$
Symmetrie-Bedingung $f(2s-x) = f(x)$ anwenden:
$(2s-x)^2(2s-x + 2)^2 = x^2(x + 2)^2$
muss auch gelten für x=0: $4s^2(2s+ 2)^2 = 0 \iff s^2(s+1)^2 = 0$
s=0: $x^2(-x + 2)^2 = x^2(x + 2)^2 \Rightarrow x^2 = 0$ oder
$(-x + 2)^2 = (x + 2)^2 \Rightarrow x = 0$, also nicht allgemein gültig
s=–1: $(-2 - x)^2(-2- x + 2)^2 = x^2(x + 2)^2$
$(-2 - x)^2(-x)^2 = x^2(x + 2)^2$ allgemein gültige Gleichung
also ist x=–1 Symmetrieachse von G_f

b) G_f mit $f(x) = 3x^2 - x^3$ ist symmetrisch zum Punkt (s|t).
Symmetrie-Bedingung $f(2s-x) = 2f(s) - f(x)$ anwenden auf
$f(x) = x^2(3-x)$: $(2s-x)^2(3-2s+x) = 2s^2(3-s) - x^2(3-x)$
muss auch gelten für x=0: $4s^2(3-2s) = 2s^2(3-s) \iff 6s^2(s-1) = 0$
s=0: $x^2(3+x) = - x^2(3-x) \Rightarrow x = 0$, also nicht allgemein gültig
s=1: $(2-x)^2(1+x) = 4 - x^2(3-x) \iff x^3 - 3x^2 + 4 = x^3 - 3x^2 + 4$
allgemein gültige Gleichung, also ist $(1|f(1)) = (1|2)$
Symmetriezentrum von G_f

•9 a) $f(4-x) = -6 - f(x)$ oder $f(2\cdot\mathbf{2}-x) = 2\cdot(\mathbf{-3}) - f(x)$, Symm.Punkt $(\mathbf{2}|\mathbf{-3})$

b) $f(-8-x) = f(x)$ oder $f(2\cdot(\mathbf{-4}) - x) = f(x)$, Symmetrieachse $x = \mathbf{-4}$

10 Wie viele Symmetrieachsen (oder Symmetriezentren) kann der Graph einer Funktion haben ?
Keine(s), genau eine(s) oder unendlich viele.

2.3 Schieben und Strecken

◊1 $f(x) = x^2 - 2x + 3$

a) Verschiebung von G_f um 3 nach unten: $g(x) = f(x) - 3 = x^2 - 2x$

b) Der Scheitel von G_g muss auf der y-Achse liegen,
Scheitelform $f(x) = (x^2 - 2x + 1) + 2 = (x-1)^2 + 2$, Scheitel $(1|2)$
Verschiebung von G_f um 1 nach links: $g(x) = f(x+1) = x^2 + 2$

c) Verschiebung von G_f um 1 nach links und 2 nach unten:
$g(x) = f(x+1) - 2 = x^2$

2 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}$

Term vereinfachen: $f(x) = -\frac{1}{2}(x^2 + 2x - 3) = -\frac{1}{2}(x + 3)(x - 1)$

die Nullstellen sind -3 und 1, es gibt 2 Schiebe-Möglichkeiten:

Verschiebung von G_f um 1 nach links: $g_1(x) = f(x+1) = -\frac{1}{2}(x + 4)x$

Verschiebung von G_f um 3 nach rechts: $g_2(x) = f(x-3) = -\frac{1}{2}x(x-4)$

3 Scheitelformen herstellen:

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{11}{2} = \frac{1}{2}(x^2 - 6x+9) - \frac{9}{2} + \frac{11}{2} = \frac{1}{2}(x-3)^2 + 1$, Scheitel $(3|1)$

$g(x) = \frac{1}{2}x^2 + x = \frac{1}{2}(x^2 + 2x+1) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x+1)^2 - \frac{1}{2}$, Scheitel $(-1|-0{,}5)$

schiebe G_f 4 nach links und 1,5 nach unten; $g(x) = f(x+4) - 1{,}5$

4 $f(x) = x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x-2)(x+2)$

a) Das Polynom hat nur ungerade Hochzahlen, also Symmetrie zu $(0|0)$

b) G_g hat Symmetriezentrum $(2|-1)$: $g(x) = f(x-2) - 1 = (x-2)(x-4)x - 1$

5 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$

a) $g(x) = f(\frac{x}{k}) = \frac{1}{2}(\frac{x}{k})^2 - 2\frac{x}{k} = \frac{x^2}{2k^2} - 2\frac{x}{k}$; wenn eine Normalparabel heraus-
kommen soll, muss sein: $2k^2 = 1$, also $k = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{k} = \pm\sqrt{2}$
für eine oben offene Normalparabel gilt »+«: $g(x) = x^2 - 2\sqrt{2}\,x$

b) $g(x) = c\cdot f(x) = \frac{c}{2}x^2 - 2cx$, oben offene Normalpar.: $c = 2$, $g(x)=x^2-4x$

c) unten offene Normalparabel: $c = -2$, $g(x)=-x^2+4x$

•6 Beschreibe den Zusammenhang zwischen G_f und G_g, wenn gilt:

a) $g(x) = f(x) + 3$: G_g ist der 3 nach oben geschobene G_f

b) $g(x) = f(x + 3)$: G_g ist der 3 nach links geschobene G_f

c) $g(x) = f(2(x+3))$: G_h ist der 3 nach links geschobene G_f
G_g ist der auf die Hälfte in x-Richtung gestauchte G_h

d) $g(x) = f(\frac{1}{2}x-2) = f(\frac{1}{2}(x-4))$

G_h ist der 4 nach rechts geschobene G_f

G_g ist der aufs Doppelte in x-Richtung gestreckte G_h

e) $g(x) = \frac{1}{2}f(3x+6) - 1 = \frac{1}{2}f(3(x+2)) - 1$

G_h ist der 2 nach links geschobene G_f

G_i ist der auf $\frac{1}{3}$ in x-Richtung gestauchte G_h

G_j ist der auf $\frac{1}{2}$ in y-Richtung gestauchte G_i

G_g ist der 1 nach unten geschobene G_j

•7 a) $g(x) = u \cdot f(v \cdot x)$
ZentrischeStreckung:
gleiche Streckung in x- und y-Richtung
Argument $v \cdot x$ bewirkt Streckung mit $1/v$ in x-Richtung
gleiche Streckung in y-Richtung mit $u = 1/v$

b) Zeige: Alle Parabeln sind ähnlich.

für zentrische Streckung ist wegen **a)** $g(x) = \frac{1}{v}f(vx)$

$g(x) = \frac{1}{v}f(vx) = \frac{1}{v}a(vx)^2 + \frac{1}{v}b(vx) + \frac{1}{v}c = avx^2 + bx + \frac{1}{v}c = x^2 + dx + e$

mit der Bedingung für Normalparabel $v = \frac{1}{a}$ gilt dann: $d = b$, $e = a \cdot c$

2.4 Nullstellen und Faktorisierung

◊1 a)	$f(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9$	$\{\pm1, \pm3, \pm9\}$	$f(1) = f(3) = f(-3) = 0$
b)	$f(x) = x^3 - 8x^2 + 5x + 14$	$\{\pm1, \pm2, \pm7, \pm14\}\}$	$f(-1) = f(2) = f(7) = 0$
c)	$f(x) = x^5 - 1$	$\{\pm1\}$	$f(1) = 0$
d)	$f(x) = x^5 + 1$	$\{\pm1\}$	$f(-1) = 0$
•e)	$f(x) = x^3 + 2x^2 - 8x$	$\{0, \pm1, \pm2, \pm4, \pm8\}$	$f(0) = f(-4) = f(2) = 0$
f)	$f(x) = x^3 - x - 7$	$\{\pm1, \pm7\}$	keine gefunden

•2 a) $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 2 = \frac{1}{2}(2x^3 - x^2 - 8x + 4)$
$\{\pm1, \pm2, \pm4\}$ $f(-2) = f(2) = 0$

b) $f(x) = x^3 - \frac{2}{3}x^2 + x - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}(3x^3 - 2x^2 + 3x - 2)$
$\{\pm1, \pm2\}$ keine gefunden

3 **a)** $x^3 - x^2 + 2x - 4 = (x-2)\cdot(x^2 + x + 4) + 4$

b) $3x^4 - 4x^2 - 12 = (x+1)\cdot(3x^3 - 3x^2 - x + 1) - 13$

c) $x^5 = (x-1)\cdot(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) + 1$

◊4 **a)** $a = 2,\ f(x) = x^3 - x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x^2 + x - 1) = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

b) $a = -5,\ f(x) = 4x^3 + 20x^2 - 8x - 40 = 4(x+5)(x^2 - 2) = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

◊5 **a)** $f(x) = x^3 + x^2 - 9x - 9$ $f(-3) = f(-1) = f(3) = 0$

b) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 26x - 24$ $f(2) = f(3) = f(4) = 0$

c) $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x - 2$ $f(1) = 0$

d) $f(x) = x^4 - 12x^3 + 21x^2 + 98x$ $f(-2) = f(0) = f(7) = 0$

6 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Bestimme a, b und c so, dass f die Nullstellen hat:

a) 1, 2 und 3	$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$	$a = -6,\ b = 11,\ c = -6$
b) –1, 2 und –3	$f(x) = (x+1)(x-2)(x+3)$	$a = 2,\ b = -5,\ c = -6$
c) 0, 10 und 100	$f(x) = x(x-10)(x-100)$	$a = -110,\ b = 1000,\ c = 0$

:7 Ist G_f symmetrisch zum Koordinatensystem, dann liegen alle Nullstellen symmetrisch zu 0. Begründe oder widerlege mit einem Gegebeispiel:

a) Liegen alle Nullstellen von f so, dass mit jeder Nullstelle a auch –a eine Nullstelle ist,dann ist G_f symmetrisch zum Koordinatensystem.

Der Satz ist falsch, Gegenbeispiel: $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 + x + 1)$

b) Liegen die n Nullstellen eines Polynoms vom Grad n so, dass mit jeder Nullstelle a auch –a eine Nullstelle ist, dann ist G_f symmetrisch zum Koordinatensystem.

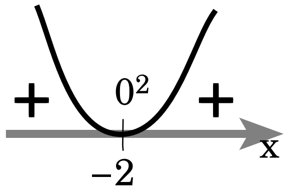
Der Satz ist richtig:
Nullstellen seien a, b, c, … $f(x) = (x^2 - a^2)(x^2 - b^2)(x^2 - c^2)\cdot\ldots$
alle x-Exponenten sind gerade, G_f ist symmetrisch zur y-Achse,
Nullstellen seien 0, a, b, c, …$f(x) = x(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)(x^2 - c^2)\cdot\ldots$
alle x-Exponenten sind ungerade, G_f ist symmetrisch zum Ursprung.

8 Vom Polynom $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ist bekannt, dass es 4 Nullstellen hat. Was kann man daraus schließen ? (Beachte: Es heißt nicht »genau 4 Nullstellen«)

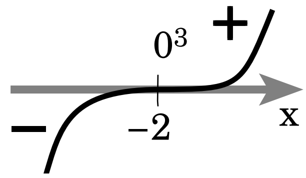
Wegen der 4 Nullstellen kann f(x) kein Polynom vom Grad 3 oder kleiner sein. Also ist $a = b = c = d = 0$, das heißt $f(x) = 0$, jede Zahl ist Nullstelle.

2.5 Mehrfache Nullstellen

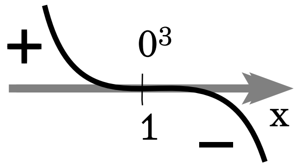
◊1 **a)** $f(x) = (x + 2)^2$



b) $f(x) = (x + 2)^3$

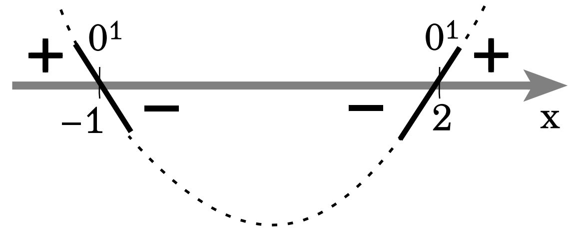


c) $f(x) = -(x - 1)^3$

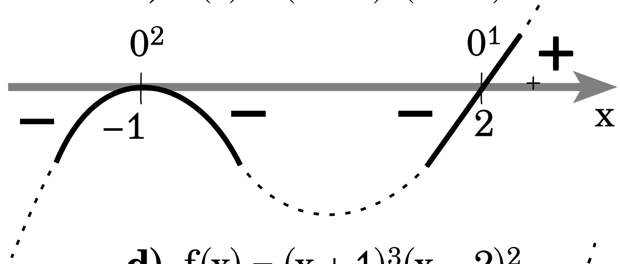


◊2 Gib die Nullstellen mit ihrer Vielfachheit an und skizziere die Kurve.

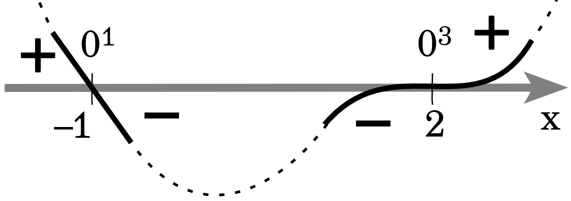
a) $f(x) = (x + 1)(x - 2)$



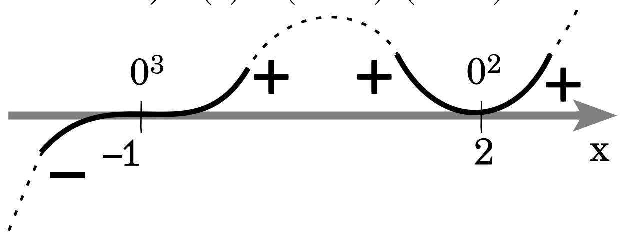
b) $f(x) = (x + 1)^2(x - 2)$



c) $f(x) = (x + 1)(x - 2)^3$

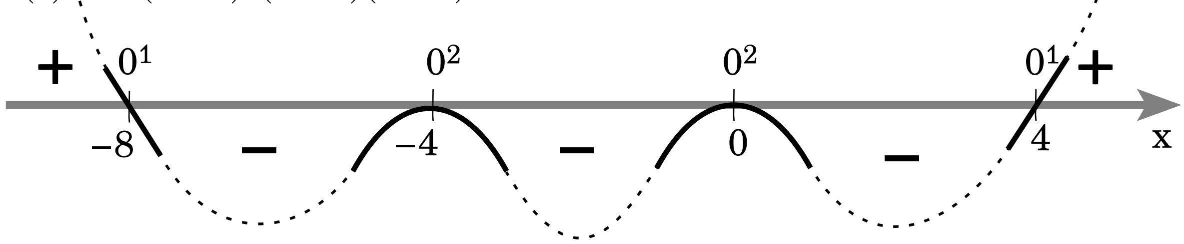


d) $f(x) = (x + 1)^3(x - 2)^2$

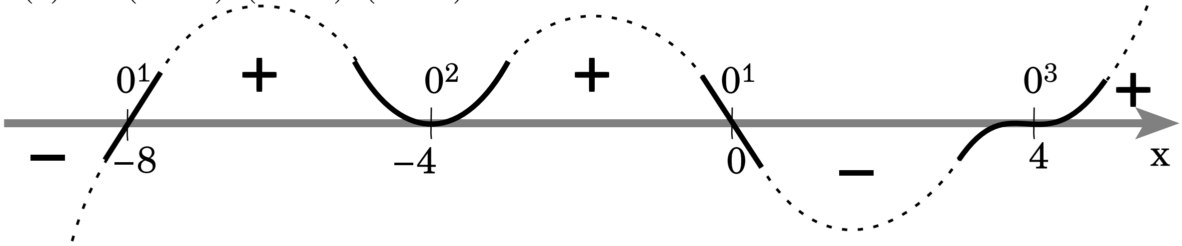


3 Gib die Nullstellen mit ihrer Vielfachheit an und skizziere die Kurve.

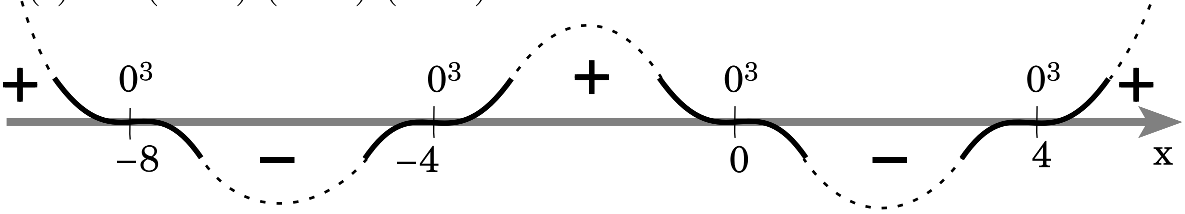
a) $f(x) = x^2(x + 4)^2(x - 4)(x + 8)$



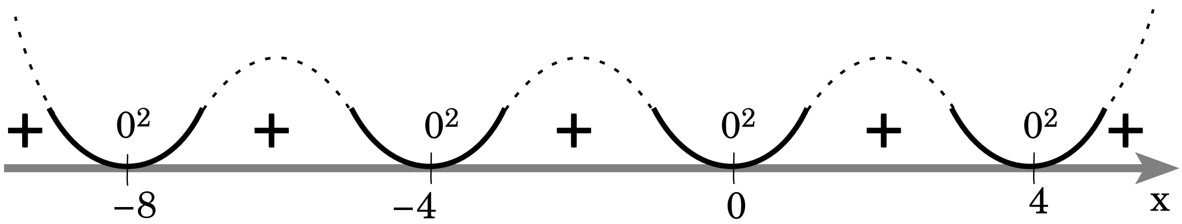
b) $f(x) = x(x + 4)^2(x - 4)^3(x + 8)$



c) $f(x) = x^3(x + 4)^3(x - 4)^3(x + 8)^3$

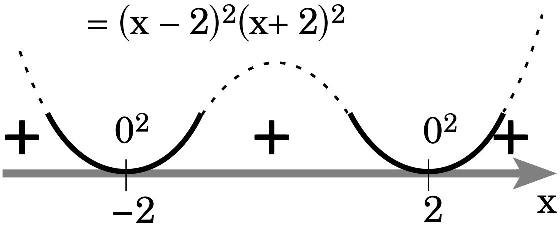


d) $f(x) = x^2(x+4)^2(x-4)^2(x+8)^2$

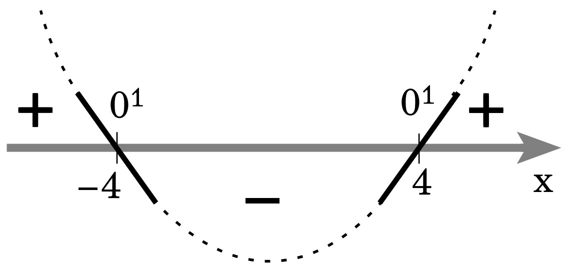


4 Faktorisiere und skizziere:

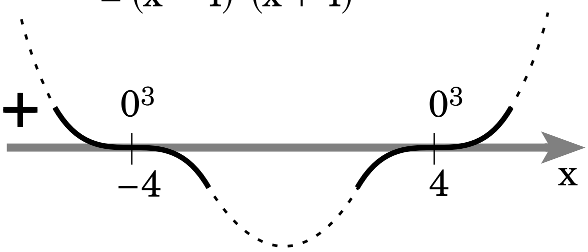
a) $f(x) = (x^2-4)^2 = ((x-2)(x+2))^2$
$= (x-2)^2(x+2)^2$



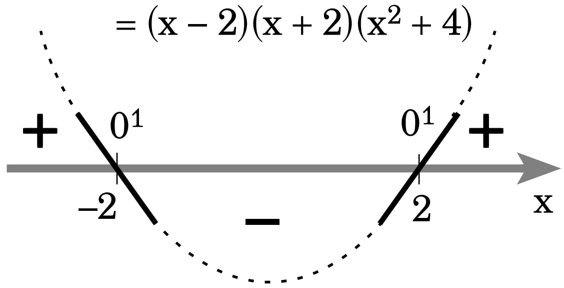
b) $f(x) = x^2 - 4^2 = (x-4)(x+4)$



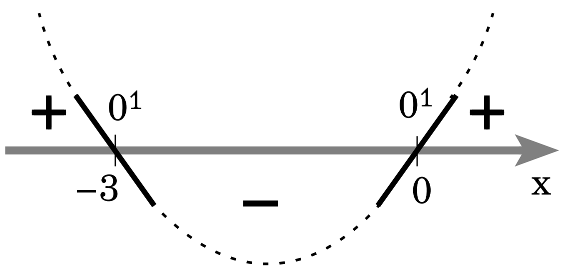
c) $f(x) = (x^2-4^2)^3 = ((x-4)(x+4))^3$
$= (x-4)^3(x+4)^3$



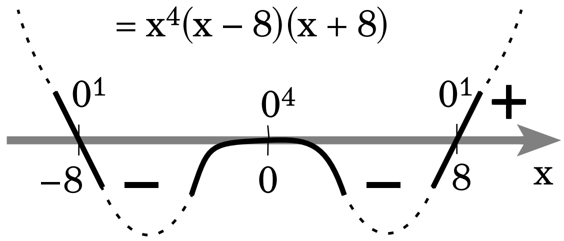
d) $f(x) = x^4 - 2^4 = (x^2-2^2)(x^2+2^2)$
$= (x-2)(x+2)(x^2+4)$



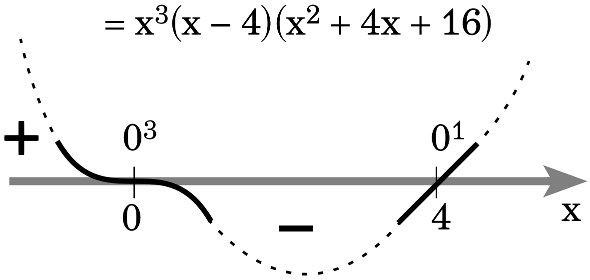
e) $f(x) = x^4 + 27x = x(x^3+27)$
$= x(x+3)(x^2-3x+9)$



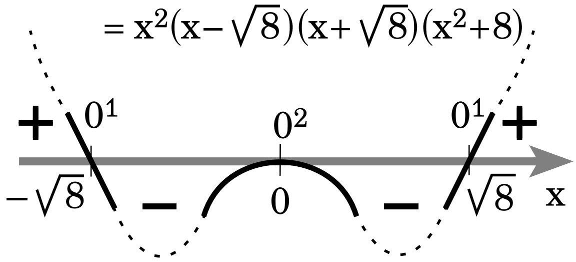
f) $f(x) = x^6 - 64x^4 = x^4(x^2-64)$
$= x^4(x-8)(x+8)$



g) $f(x) = x^6 - 64x^3 = x^3(x^3-64)$
$= x^3(x-4)(x^2+4x+16)$



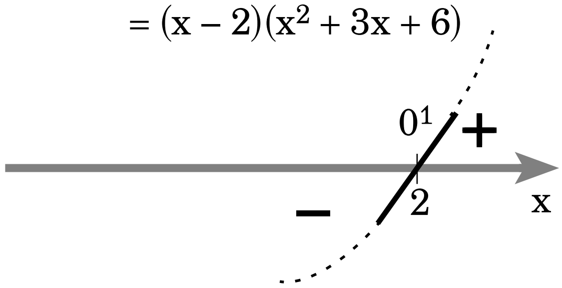
h) $f(x) = x^6 - 64x^2 = x^2(x^4-64)$
$= x^2(x^2-8)(x^2+8)$
$= x^2(x-\sqrt{8})(x+\sqrt{8})(x^2+8)$



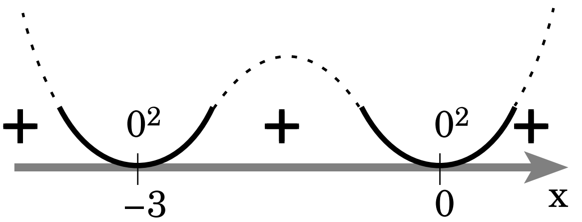
i) $f(x) = x^6 - 64 = (x^3-8)(x^3+8)$
$= (x-2)(x^2+2x+4)(x+2)(x^2-2x+4)$
Verlauf wie in **d)**

◊5 Faktorisiere und skizziere:

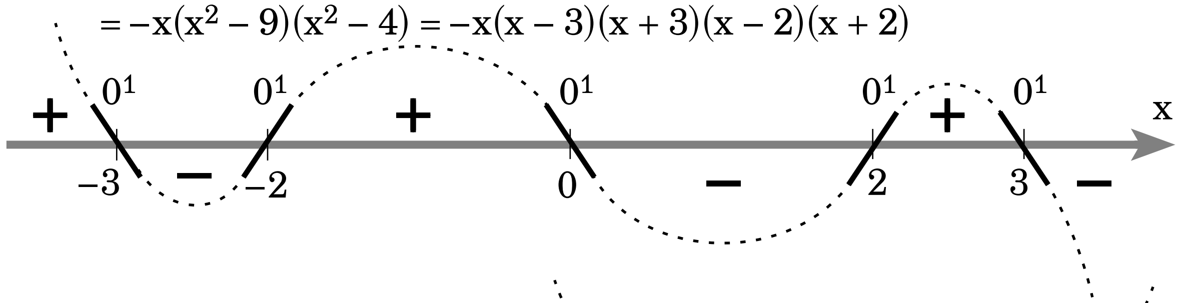
a) $f(x) = x^3 + x^2 - 12$
$= (x - 2)(x^2 + 3x + 6)$



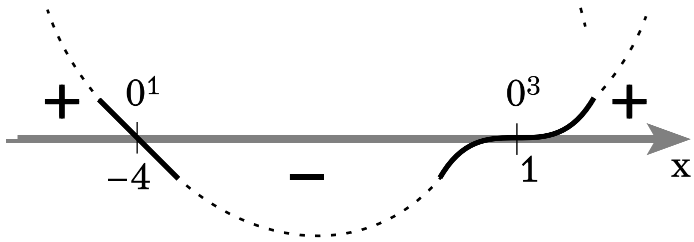
b) $f(x) = x^4 + 6x^3 + 9x^2$
$= x^2(x^2 + 6x + 9) = x^2(x + 3)^2$



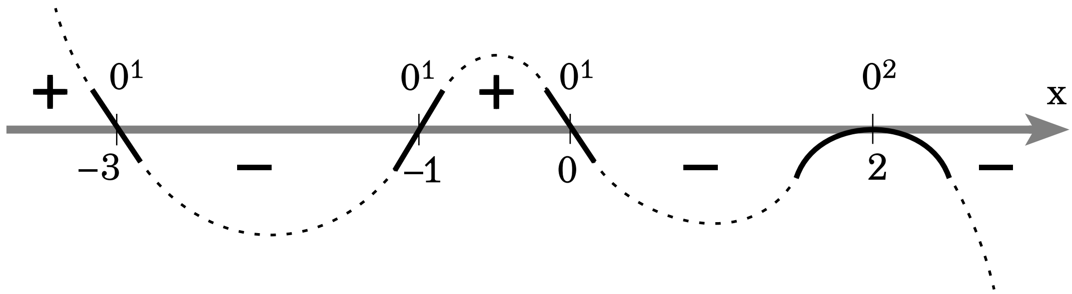
c) $f(x) = -x^5 + 13x^3 - 36x = -x(x^4 - 13x^2 + 36)$
$= -x(x^2 - 9)(x^2 - 4) = -x(x - 3)(x + 3)(x - 2)(x + 2)$



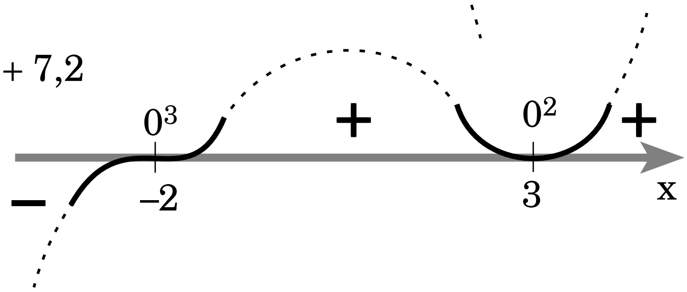
d) $f(x) = x^4 + x^3 - 9x^2 + 11x - 4$
$= (x + 4)(x - 1)^3$



e) $f(x) = -x^5 + 9x^3 - 4x^2 - 12x = -x(x + 1)(x + 3)(x - 2)^2$



f) $f(x) = 0{,}1x^5 - 1{,}5x^3 - x^2 + 6x + 7{,}2$
$= 0{,}1(x - 3)^2(x + 2)^3$



6 a) 2 ist 1fache Nullstelle, –3 ist 2fache Nullstelle und $f(0) = -9$
Ansatz: $f(x) = k(x - 2)(x + 3)^2$,
Bedingung: $f(0) = -9 = k(-2)(3)^2$, $k = 0{,}5$ $f(x) = 0{,}5(x - 2)(x + 3)^2$

b) 1 ist 1fache, –2 ist 2fache, 3 ist 3fache Nullstelle und $f(0) = 9$
Ansatz: $f(x) = k(x - 1)(x + 2)^2(x - 3)^3$,
Bed.: $f(0) = 9 = k(-1)\cdot 4\cdot(-27)$, $k = \frac{1}{12}$ $f(x) = \frac{1}{12}(x-1)(x+2)^2(x-3)^3$

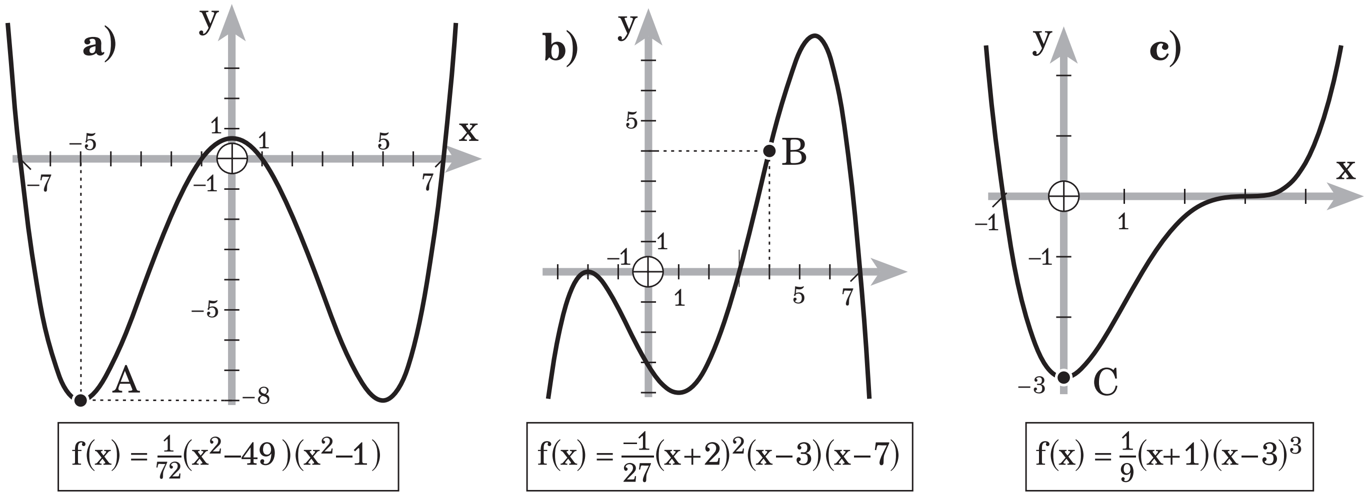
c) 2 ist 3-fache, 3 ist 2-fache, 0 ist 1fache Nullstelle und $f(1) = -4$
Ansatz: $f(x) = kx(x-2)^3(x-3)^2$,
Bedingung: $f(1) = -4 = k \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 4$, $k = 1$ $\quad f(x) = x(x-2)^3(x-3)^2$

d) 1 ist 100-fache Nullstelle und $f(0) = 1$
$f(x) = k(x-1)^{100}$, $f(0) = 1 = k \cdot 1 f(x) = (x-1)^{100}$

7 a) Ansatz: $f(x) = k(x+7)(x+1)(x-1)(x-7)$
Bedingung: Kurve durch A(–5|–8), also $f(-5) = -8$
$k(2)(-4)(-6)(-12) = -8$, $k = \frac{1}{72}$ $\quad f(x) = \frac{1}{72}(x+7)(x+1)(x-1)(x-7)$

b) Ansatz: $f(x) = k(x+2)^2(x-3)(x-7)$
Bedingung: Kurve durch B(4|4), also $f(4) = 4$
$k \cdot 36 \cdot (1)(-3) = 4$, $k = -\frac{1}{27}$ $\quad f(x) = -\frac{1}{27}(x+2)^2(x-3)(x-7)$

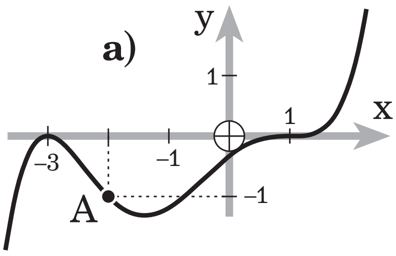
c) Ansatz: $f(x) = k(x+1)(x-3)^3$
Bedingung: Kurve durch C(0|–3), also $f(0) = -3$
$k \cdot 1 \cdot (-27) = -3$, $k = \frac{1}{9}$ $\quad f(x) = \frac{1}{9}(x+1)(x-3)^3$



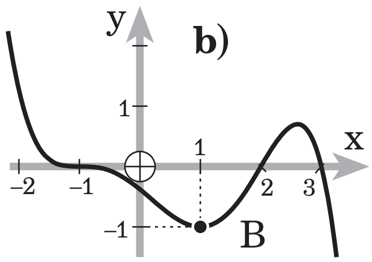
8 a) Ansatz: $f(x) = k(x+3)^2(x-1)^3$
Bedingung: Kurve durch A(–2|–1), also $f(-2) = -1$
$k \cdot 1 \cdot (-27) = -1$, $k = \frac{1}{27}$ $\quad f(x) = \frac{1}{27}(x+3)^2(x-1)^3$

b) Ansatz: $f(x) = k(x-2)(x-3)(x+1)^3$
Bedingung: Kurve durch B(1|–1), also $f(1) = -1$
$k \cdot (-1)(-2) \cdot 8 = -1$, $k = -\frac{1}{16} f(x) = -\frac{1}{16}(x-2)(x-3)(x+1)^3$

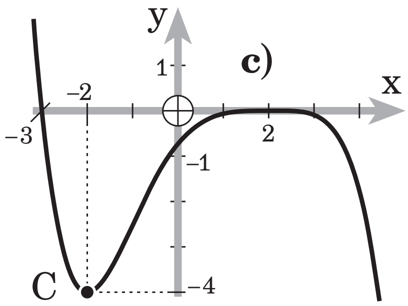
c) Ansatz: $f(x) = k(x+3)(x-2)^4$
Bedingung: Kurve durch C(–2|–4), also $f(-2) = -4$
$k \cdot 1 \cdot 64 = -1$, $k = -\frac{1}{64}$ $\quad f(x) = -\frac{1}{64}(x+3)(x-2)^4$



$f(x) = \frac{1}{27}(x+3)^2(x-1)^3$



$f(x) = \frac{-1}{16}(x+1)^3(x-2)(x-3)$



$f(x) = \frac{-1}{64}(x+3)(x-2)^4$

9 $f_c(x) = (x - c)(x - c + 1)(x + c - 2),\ c \in \mathbb{R}$
Für welche Werte von c ist die x-Achse Tangente von G_{fc}?
Nullstellen: $x_1 = c,\ \ x_2 = c - 1,\ \ x_3 = 2 - c$
x-Achse berührt: mindestens 2 Nullstellen fallen zusammen
x_1 und x_2 unterscheiden sich um 1, können also nicht zusammenfallen
$x_1 = x_3:\ \ c = 2 - c \ \Rightarrow\ c = 1$
$x_2 = x_3:\ \ c - 1 = 2 - c \ \Rightarrow\ c = 1{,}5$
Die Kurven von f_1 und $f_{1,5}$ berühren die x-Achse.

•10 $f_c(x) = x^3 - (c + 1)x^2 + cx,\ c \in \mathbb{R}$
$= x(x^2 - (c + 1)x + c) = x(x - 1)(x - c)$; Nullstellen 0, 1, c

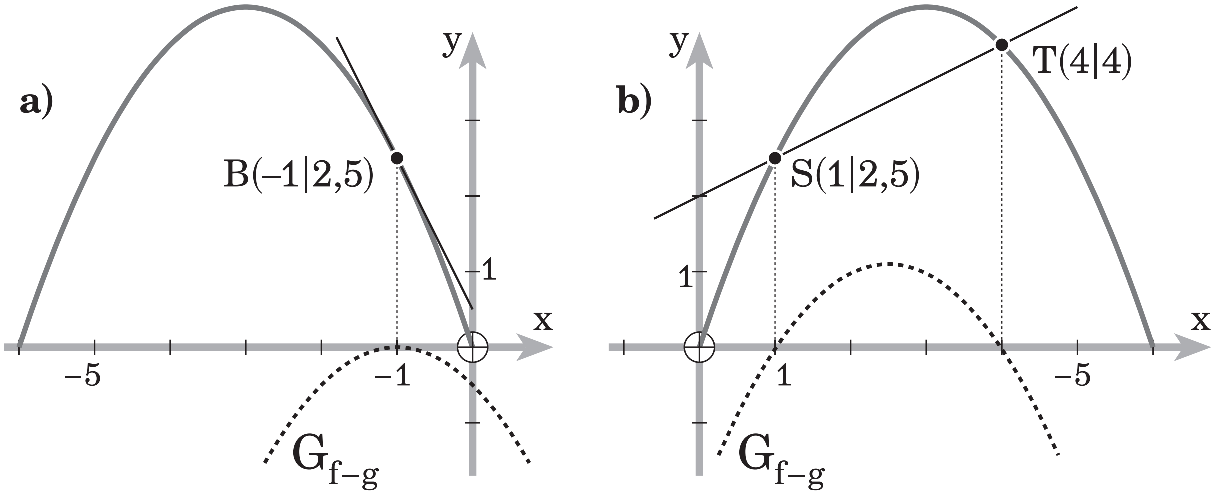
a) x-Achse ist Tangente von G_{fc}: die variable Nullstelle c fällt mit einer der andern zusammen, also $c = 0$ oder $c = 1$.

b) f_c hat 3 verschiedene Nullstellen:
Fall **a)** darf nicht sein, also $c \neq 0$ und $c \neq 1$.

c) f_c hat genau eine Nullstelle: kein c-Wert schafft das.

2.6 Schnittstellen

◊1 $f(x) = -\frac{1}{2}x(x+6)$ $g(x) = -2x + \frac{1}{2}$ $f(x) = -\frac{1}{2}x(x-6)$ $g(x) = \frac{1}{2}x + 2$



a) $f(x) - g(x) = -\frac{1}{2}(x^2+2x+1) = -\frac{1}{2}(x+1)^2 = 0$

$B(-1|g(-1)) = B(-1|2{,}5)$ ist 2facher Berührpunkt.

b) $f(x) - g(x) = -\frac{1}{2}(x^2-5x+4) = -\frac{1}{2}(x-1)(x-4) = 0$

$S(1|2{,}5)$ und $T(4|4)$ sind 1fache Schnittpunkte.

•2 Irgendeine Gerade mit Steigung -3: $g_t(x) = -3x + t$

sucht Anschluss an Parabel $p(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$

$g(x) - p(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + t - 4 = 0$ oder $x^2 - 8x + 2t - 8 = 0$

Diskriminante $D = 64 - 4(2t - 8) = 8(12 - t)$

g soll berühren, also $D = 0 \Rightarrow t = 12$ Tangente: $g_{12}(x) = -3x + 12$

Berührstelle $x = \frac{8 \pm 0}{2} = 4$ Berührpunkt $B(4|g_{12}(4)) = B(4|0)$

•3 Irgendeine Gerade durch den Ursprung: $g_m(x) = mx$

sucht Anschluss an Parabel $p(x) = -\frac{1}{4}(x-4)^2 + 3$

$g(x) - p(x) = \frac{1}{4}(x-4)^2 + mx - 3 = 0$ oder $x^2 - 8x + 16 + 4mx - 12 = 0$

$x^2 - 4(2-m)x + 4 = 0$

Diskriminante $D = 16(2 - m)^2 - 16 = 16(4 - 4m + m^2 - 1)$

$= 16(m^2 - 4m + 3) = 16(m - 3)(m - 1)$

g soll berühren, also $D = 0 \Rightarrow m = 3$ oder $m = 1$

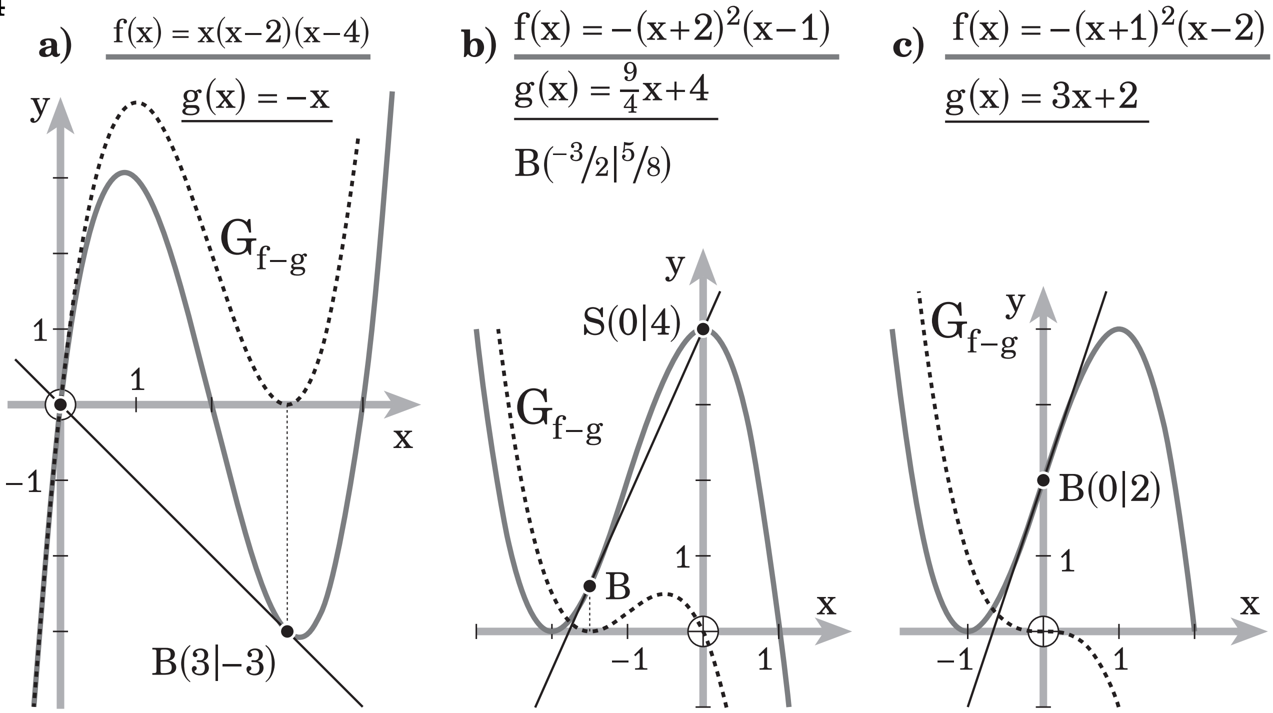
2 Tangenten: $g_3(x) = 3x$ und $g_1(x) = x$

2 Berührstellen: $x = \frac{4(2-m) \pm 0}{2} = 4 - 2m$

$m = 3$: $x = -2$, Berührpunkt $B(-2|g_3(-2)) = B(-2|-6)$

$m = 1$: $x = 2$, Berührpunkt $B(2|g_1(2)) = B(2|2)$

◊4

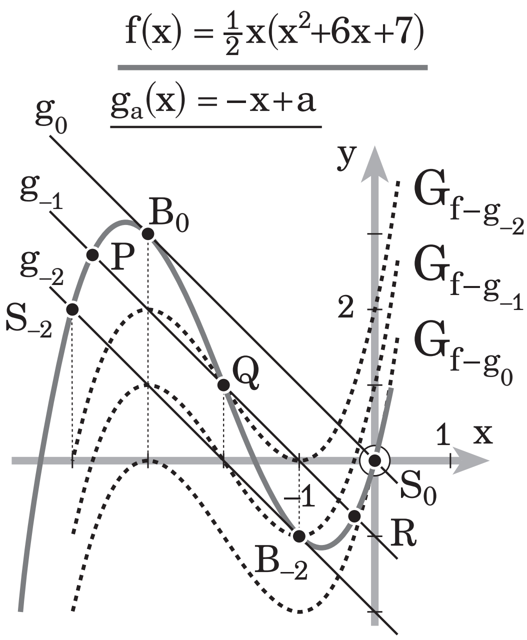


a) $f(x) - g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x = x(x-3)^2 = 0$
O(0|0) ist 1facher, B(3|–3) 2facher Schnittpunkt.

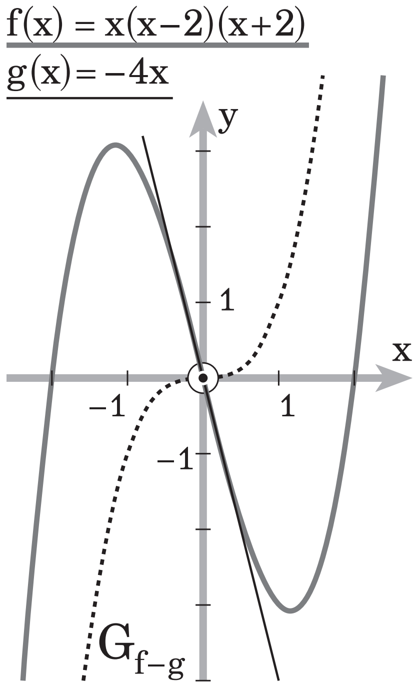
b) $f(x) - g(x) = -\frac{1}{4}(4x^3 + 12x^2 + 9x) = -\frac{1}{4}x(2x+3)^2 = 0$
S(0|4) ist 1facher, B(–1,5|0,625) 2facher Schnittpunkt.

c) $f(x) - g(x) = -x^3 = 0$
B(0|2) ist 3facher Schnittpunkt, also Wendepunkt.

5 $f(x) - g_0(x) = \frac{1}{2}(x^3 + 6x^2 + 9x)$
$= \frac{1}{2}x(x+3)^2 = 0$, O(0|0) ist 1facher,
B(–3|3) 2facher Schnittpunkt.
$f(x) - g_{-1}(x) = \frac{1}{2}(x^3 + 6x^2 + 9x + 2)$
$= \frac{1}{2}(x+2)(x^2 + 4x + 1) = 0$,
Q(–2|1), P$(-2-\sqrt{3}\,|\,1+\sqrt{3})$ und
R$(-2+\sqrt{3}\,|\,1-\sqrt{3})$ sind 1fache
Schnittpunkte.
$f(x) - g_{-2}(x) = \frac{1}{2}(x^3 + 6x^2 + 9x + 4)$
$= \frac{1}{2}(x+4)(x+1)^2 = 0$,
B(–1|–1) ist 2facher, S(–4|2) 1facher Schnittpunkt.

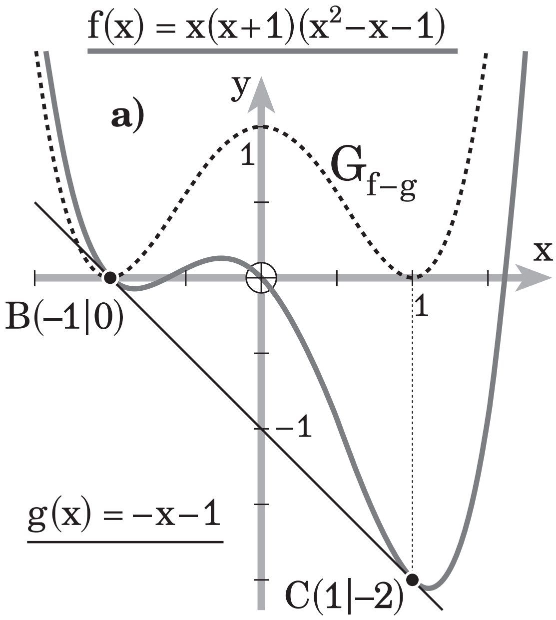


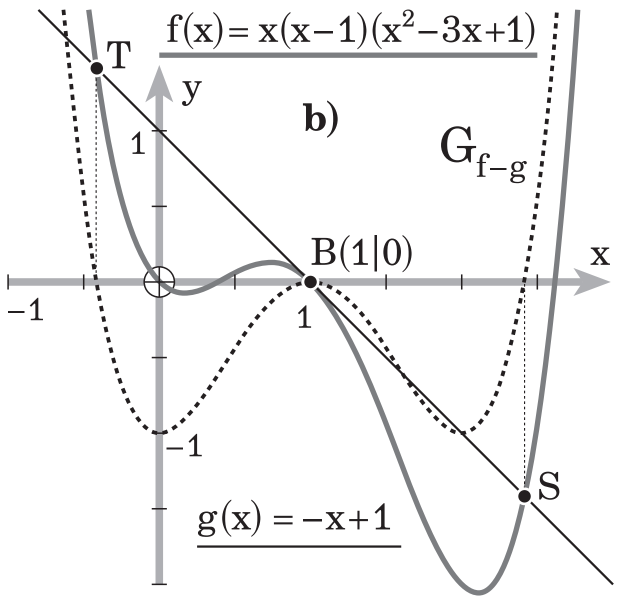
•6 $f(x) = x^3 - 4x$.
Wegen der ungeraden Exponenten ist $f(-x) = -f(x)$. Deshalb ist der Ursprung Symmetriezentrum der Kurve; wenn er auch Wendepunkt sein soll, dann muss es eine Ursprungsgerade g mit $g(x) = mx$ so geben, dass der Ursprung 3facher Schnittpunkt von Kurve und Gerade g ist.
Schnitt von f und g:
$f(x) - g(x) = x^3 - 4x - mx = x(x^2 - 4 - m) = 0$
Die erwartete 3fache Schnittstelle x=0 entsteht, falls $(x^2 - 4 - m) = x^2$,
und das ist der Fall für $m = -4$.
Wendetangente: $g(x) = -4x$



7 a) $f(x) - g(x) = x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2 = (x-1)^2(x+1)^2 = 0$
B(–1|0) und C(1|–2) sind 2fache Schnittpunkte.

b) $f(x) - g(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 1 = (x-1)^2(x^2 - 2x - 1) = 0$
B(1|0) ist 2facher Schnittpunkt,
$T(1-\sqrt{2}\,|\,\sqrt{2})$ und $S(1+\sqrt{2}\,|\,-\sqrt{2})$ sind 1fache Schnittpunkte.





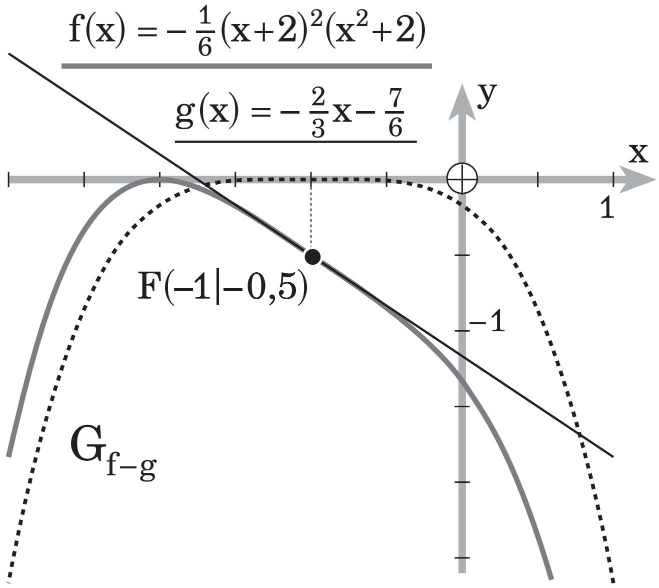
•8 Wenn die Kurve einen Flachpunkt hat, dann muss der Schnittpunkt von ihr und einer Gerade mindestens 3fach sein. Wenn der Flachpunkt kein Wendepunkt sein soll, dann dürfen sich Kurve und Tangente nicht durchdringen, dann muss die Vielfachheit gerade sein, also v= 4, 6, 8, …
Der Grad muss also mindestens 4 sein.

9 $f(x) - g(x) =$

$= -\frac{1}{6}(x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1)$

$= -\frac{1}{6}(x+1)^4 = 0$

F(–1|–0,5) ist 4facher Schnittpunkt, ein Flachpunkt, aber kein Wendepunkt.



10 **a)** $f(x) - g_u(x) = -\frac{1}{2}(3x^2 - 4(u+1)x + 2u^2 - 2) = 0$

Diskriminante: $D = 16(u+1)^2 - 12(2u^2-2) = -8(u+1)(u-5) = 0$

Berührung: $D = 0$, also $u=-1$ oder $u=5$

Berührstelle: $x = \frac{4(u+1)}{6}$

$g_{-1}(x) = (x+1)^2 - 1$, Berührpunkt (0|0)

$g_5(x) = (x-5)^2 - 1$, Berührpunkt (4|0)

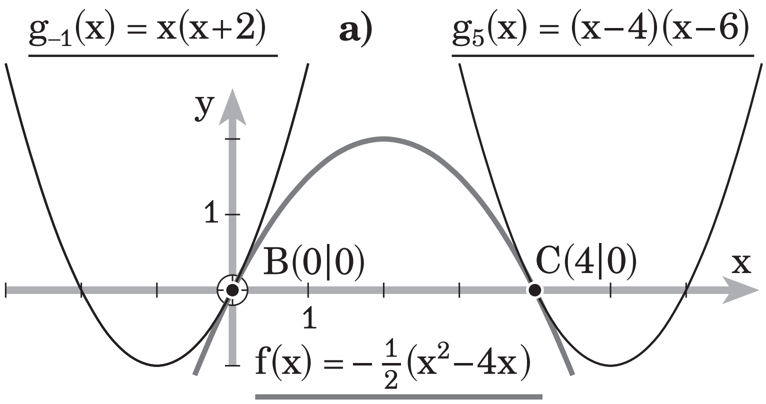
b) $f(x) - g_u(x) = -\frac{1}{2}(3x^2 - 8x - 2u + 2) = 0$

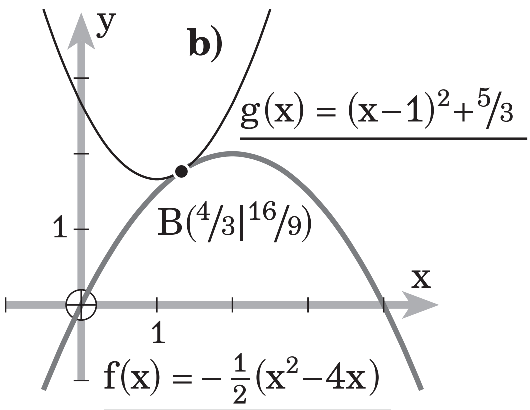
Diskriminante: $D = 64 - 12(-2u+2) = 8(3u+5) = 0$

Berührung: $D = 0$, also $u = -\frac{5}{3}$

Berührstelle: $x = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

$g_{-5/3}(x) = (x-1)^2 + \frac{5}{3}$, Berührpunkt (4/3|16/9)

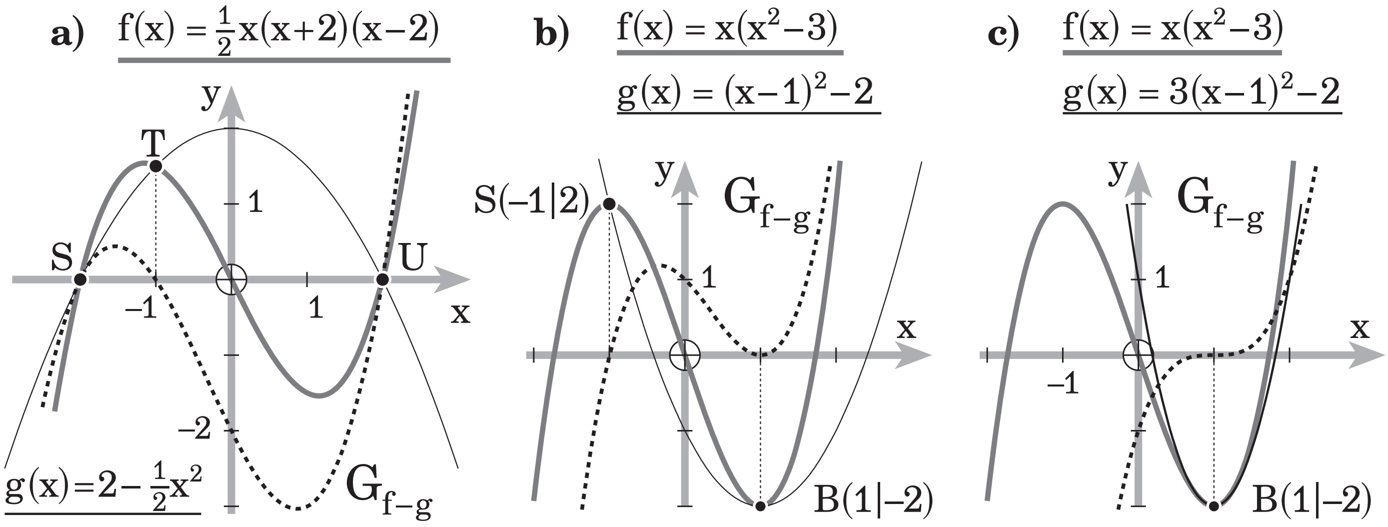




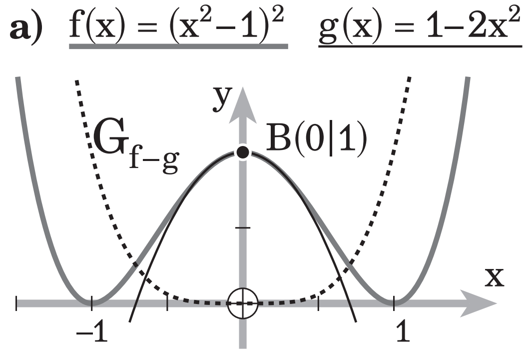
11 a) $f(x) - g(x) = \frac{1}{2}(x^3 + x^2 - 4x - 4) = \frac{1}{2}(x+2)(x+1)(x-2) = 0$
S(–2|0), T(–1|1,5) und U(2|0) sind 1fache Schnittpunkte.

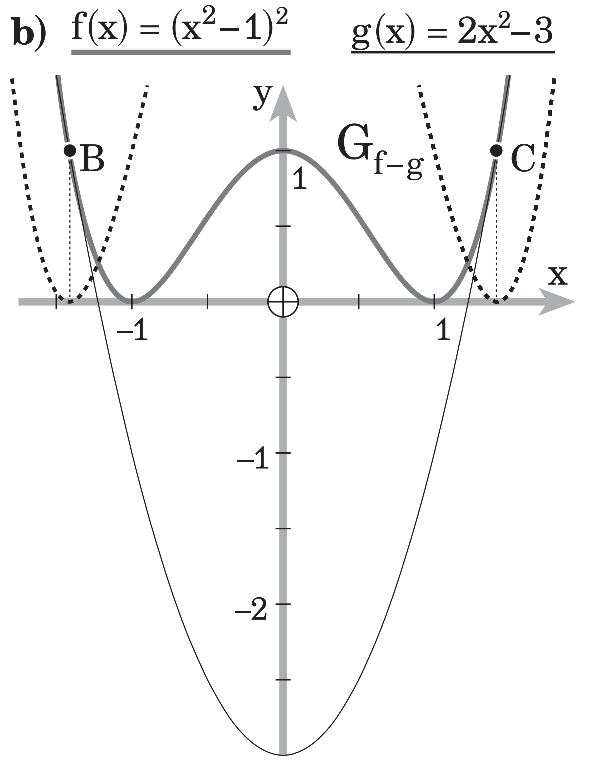
b) $f(x) - g(x) = x^3 - x^2 - x + 1 = (x+1)(x-1)^2 = 0$
S(–1|2) ist 1facher, B(1|–2) 2facher Schnittpunkt.

c) $f(x) - g(x) = x^3 - 3x^2 - 3x - 1 = (x-1)^3 = 0$
B(1|–2) 3facher Schnittpunkt.



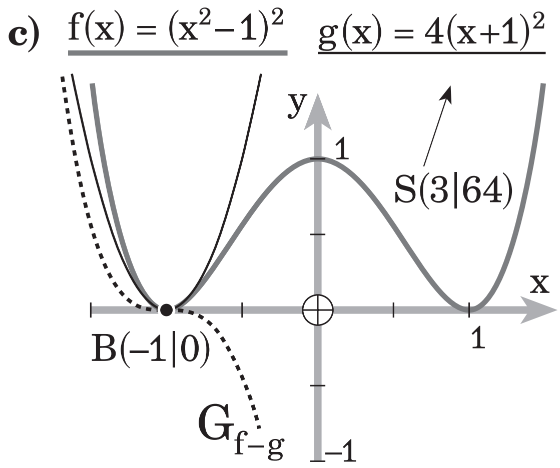
12 a) $f(x) - g(x) = x^4 = 0$
B(0|1) ist 4facher Schnittpunkt.





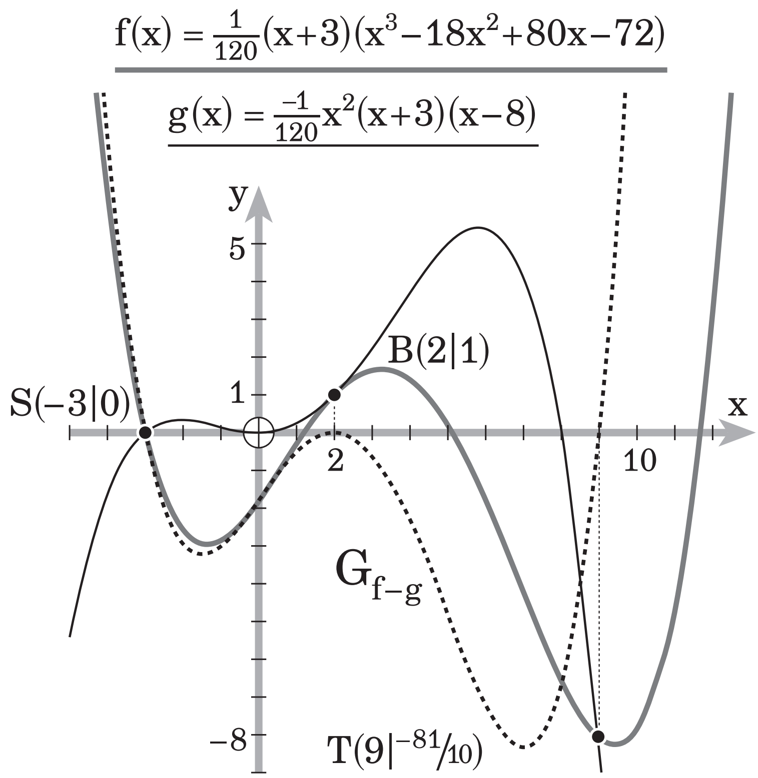
b) $f(x) - g(x) = x^4 - 4x^2 + 4$
$= (x^2-2)^2 = (x-\sqrt{2})^2(x+\sqrt{2})^2 = 0$
B($-\sqrt{2}$|1) und C($\sqrt{2}$|1) sind
2fache Schnittpunkte.

c) $f(x) - g(x) = x^4 - 6x^2 - 8x - 3$
$= (x-3)(x+1)^3 = 0$
B(–1|0) ist 3facher,
S(3|64) 1facher Schnittpunkt.



:13 Die Gleichung für die Schnittstellen muss genau 2 Lösungen haben:
$f(x) - g(x) = k(x - v)(x - w)$.
Weitere Faktoren, die $\neq 0$ sind, wie x^2+1,
die also von geradem Grad sind, können nicht vorkommen,
weil der Grad der Schnittstellen-Gleichung nicht größer als 3 sein kann.
$f(x) - g(x) = k(x - v)(x - w) = k\cdot x^2 - k(v+w)\cdot x + kvw$
weil hier keine 3.Potenzen von x vorkommen, müssen die Koeffizienten bei x^3 in f(x) und g(x) gleich sein.
Beispiel: $f(x) = ax^3 + k\cdot x^2 - k(v+w)\cdot x + kvw$
$g(x) = ax^3$

:14 $f(x) - g(x) =$
$= \frac{1}{60}(x^4 - 10x^3 + x^2 + 84x - 108) = \frac{1}{60}(x+3)(x-2)^2(x-9) = 0$
S(–3|0) und $T(9|{-81}/_{10})$ sind 1fache Schnittpunkte,
B(2|1) ist 2facher Schnittpunkt.



III. Ableitung der Polynomfunktion

1. Tangentensteigung – Kurvensteigung

In den Aufgaben ist immer die Sekantensteigung $h \neq 0$

◊1 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x \qquad P(1|y_P) \quad A(2|y_A) \quad B(1{,}5|y_B) \quad C(0{,}5|y_C)$

a) $y_P = f(1) = \frac{7}{2}$, $y_A = f(2) = 8$, $\qquad m_{PA} = \dfrac{8-\frac{7}{2}}{2-1} = \dfrac{9}{2}$

$y_B = f(1{,}5) = \frac{45}{8}$, $\quad m_{PB} = \dfrac{\frac{45}{8}-\frac{7}{2}}{1{,}5-1} = \dfrac{17}{4}$

$y_C = f(0{,}5) = \frac{13}{8}$, $\quad m_{PC} = \dfrac{\frac{13}{8}-\frac{7}{2}}{0{,}5-1} = \dfrac{15}{4}$

b) $s_P = \frac{1}{h}\left(\frac{1}{2}(1+h)^2 + 3(1+h) - \frac{7}{2}\right) = \frac{1}{h}\left(4h + \frac{1}{2}h^2\right) = 4 + \frac{1}{2}h$

$m_P = \lim\limits_{h\to 0}\left(4 + \frac{1}{2}h\right) = 4$

2 $f(x) = x^2 - 2x - 3$ Berechne die Gleichungen der Tangenten in:

a) $A(1|y_A) \quad y_A = f(1) = -4$

$s_A = \frac{1}{h}\left((1+h)^2 - 2(1+h) - 3 - (-4)\right) = \frac{1}{h}(h^2 - 4 + 4) = h$

$m_A = \lim\limits_{h\to 0} h = 0$ Tangente: $y = 0x + f(1), \quad y = -4$

b) $B(-1|y_B) \quad y_B = f(-1) = 0$

$s_B = \frac{1}{h}\left((-1+h)^2 - 2(-1+h) - 3 - 0\right) = \frac{1}{h}(h^2 - 4h) = h - 4$

$m_B = \lim\limits_{h\to 0}(h-4) = -4$ Tangente: $y = -4(x-(-1)) + 0 = -4x - 4$

c) $C(2|y_C) \quad y_C = f(2) = -3$

$s_C = \frac{1}{h}\left((2+h)^2 - 2(2+h) - 3 - (-3)\right) = \frac{1}{h}(h^2 + 2h) = h + 2$

$m_C = \lim\limits_{h\to 0}(h+2) = 2$ Tangente: $y = 2(x-2) - 3 = 2x - 7$

3 $p(x) = c_n x^n + \ldots + c_1 x + c_0$ $\qquad g: y = f(x) = c_1 x + c_0$

$s(0+h) = \frac{1}{h}\left(c_n h^n + \ldots + c_1 h + c_0 - (c_n 0^n + \ldots + c_1 0 + c_0)\right) = c_n h^{n-1} + \ldots + c_1$

$p'(0) = \lim\limits_{h\to 0}(c_n h^{n-1} + \ldots + c_1) = c_1$

Tangente: $y = c_1(x-0) + p(0) = c_1 x + c_0$ q.e.d.

◊4 **a)** $f(x) = 3x^3 - 4x \quad y_T = f(0) = 0$

$s_T = \frac{1}{h}\left(3(0+h)^3 - 4(0+h) - 0\right) = \frac{1}{h}(3h^3 - 4h) = 3h^2 - 4$

$m_T = \lim\limits_{h\to 0}(3h^2 - 4) = -4$ Tangente: $y = -4(x-0) + 0 = -4x$

b) $f(x) = x^3 - 6x^2 - x + 6 \qquad y_T = f(1) = 0$

$s_T = \frac{1}{h}((1+h)^3 - 6(1+h)^2 - (1+h) + 6 - 0) = \frac{1}{h}(h^3 - 3h^2 - 10h) = h^2 - 3h - 10$

$m_T = \lim\limits_{h\to 0}(h^2 - 3h - 10) = -10$; Tangente: $y = -10(x-1) + 0 = -10x + 10$

c) $f(x) = x^4 - x^3 \quad y_T = f(2) = 8$

$s_T = \frac{1}{h}((2+h)^4 - (2+h)^3 - 8) = \frac{1}{h}(h^4 + 7h^3 + 18h^2 + 20h) = h^3 + 7h^2 + 18h + 20$

$m_T = \lim\limits_{h\to 0}(h^3 + 7h^2 + 18h + 20) = -10$

Tangente: $y = 20(x-2) + 8 = 20x - 32$

5 a) $f(x) = 3x^3 - 4x$

$s(x+h) = \frac{1}{h}(3(x+h)^3 - 4(x+h) - (3x^3 - 4x)) = 9x^2 + 9hx + 3h^2 - 4$

$f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}(9x^2 + 9hx + 3h^2 - 4) = 9x^2 - 4$

b) $f(x) = x^3 - 6x^2 - x + 6$

$s(x+h) = \frac{1}{h}((x+h)^3 - 6(x+h)^2 - (x+h) + 6 - (x^3 - 6x^2 - x + 6))$

$= 3x^2 + 3hx - 12x + h^2 - 6h - 1$

$f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}(3x^2 + 3hx - 12x + h^2 - 6h - 1) = 3x^2 - 12x - 1$

c) $f(x) = x^4 - x^3$

$s(x+h) = \frac{1}{h}((x+h)^4 - (x+h)^3 - (x^4 - x^3))$

$= 4x^3 + 6hx^2 - 3x^2 + 4h^2x - 3hx + h^3 - h^2$

$f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}(4x^3 + 6hx^2 - 3x^2 + 4h^2x - 3hx + h^3 - h^2) = 4x^3 - 3x^2$

6 a) $f(x) = ax^2 + bx + c$

$s(x+h) = \frac{1}{h}(a(x+h)^2 - b(x+h) - c - (ax^2 + bx + c)) = 2ax + b + ah$

$f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}(2ax + b + ah) = 2ax + b$

b) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$s(x+h) = \frac{1}{h}(a(x+h)^3 - b(x+h)^2 - c(x+h) - (ax^3 + bx^2 + cx + d))$

$= 3ax^2 + 3ahx + 2bx + ah^2 + bh + c$

$f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}(3ax^2 + 3ahx + 2bx + ah^2 + bh + c) = 3ax^2 + 2bx + c$

•7 a sei eine mindestens 2fache Nullstelle von f. Zeige durch Berechnung der Kurvensteigung in $(a|0)$, dass die x-Achse dort Tangente ist.

Ansatz: $f(x) = (x-a)^2 \cdot g(x)$

$s(a+h) = \frac{1}{h}(h^2 \cdot g(a+h) - 0) = h \cdot g(a+h)$, also $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0}(h \cdot g(a+h)) = 0$

2. Ableitungsregeln für Polynome

◊1 a) $\frac{d}{dx}(x^2-2x+1) = 2x-2$

b) $\frac{d}{dx}(\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}x^2$

c) $\frac{d}{dx}(x^3-5x^2+6x) = 3x^2-10x+6$

d) $\frac{d}{dx}(-\frac{1}{3}x^3+2x^2+\sqrt{3}) = -x^2+4x$

e) $\frac{d}{dx}(\frac{3}{4}x^4+x^3-\frac{3}{2}x^2+3x+3) = 3x^3+3x^2-3x+3$

f) $\frac{d}{dx}(5x^7-5x^4+5x^2-5(x+5)) = 35x^6-20x^3+10x-5$

◊2 a) $\frac{d}{dx}[4(x^3+3x-1)] = 4(3x^2+3) = 12(x^2+1)$

b) $\frac{d}{dx}(-\frac{1}{12}(3x^4-4x^3)) = -\frac{1}{12}(12x^3-12x^2) = -x^3+x^2 = -x^2(x-1)$

c) $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3+3x-1}{3}\right) = \frac{3x^2+3}{3} = x^2+1$

d) $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{6}x^4-2\sqrt{3}x}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{6}\cdot 4x^3-2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{3}x^3-\sqrt{6}$

e) $\frac{d}{dx}(x^4-4^4) = 4x^3$

f) $\frac{d}{dx}[(x-2)(x^2-3)] = \frac{d}{dx}(x^3-2x^2-3x+6) = 3x^2-4x-3$

◊3 a) $\frac{d}{dx}(ax^2+a^2x-a^3) = 2ax+a^2$

b) $\frac{d}{da}(ax^2+a^2x-a^3) = x^2+2ax-3a^2$

c) $\frac{d}{dt}(ax^2+a^2x-a^3) = 0$

•4 a) $\frac{d}{dx}[(x^3-3x^2+2x)(a-x)] = \frac{d}{dx}(-x^4+ax^3+3x^3-3ax^2-2x^2+2ax)$

$= -4x^3+3ax^2+9x^2-6ax-4x+2a$

b) $\frac{d}{da}[(x^3-3x^2+2x)(a-x)] = x^3-3x^2+2x$

c) $\frac{d}{dx}\left[\frac{2ax^2-2a^2x-1}{2a}\right] = \frac{4ax-2a^2}{2a} = 2x-a$

3. Schnittwinkel

◊1 Schnittwinkel φ von Kurve-x-Achse: $\tan\varphi = |f'(a)|$, a ist Nullstelle von f
Schnittwinkel τ von Kurve-y-Achse: $\tan\sigma = |f'(0)|$, $\tau = 90° - \sigma$

a) $f(x) = x^2 - 2x - 15 = (x-5)(x+3) = 0 \Rightarrow x=5$ oder $x=-3$
$f'(x) = 2x - 2 = 2(x-1)$
$\tan\varphi_1 = |f'(5)| = 8 \Rightarrow \varphi_1 = 82{,}9° = \varphi_2$ (wegen Symmetrie)
$\tan\sigma = |f'(0)| = 2 \Rightarrow \sigma = 63{,}4°$, $\tau = 90° - 63{,}4° = 26{,}6°$

b) $f(x) = -\frac{2}{27}x^3 - \frac{2}{3}x^2 = -\frac{2}{27}x^2(x+9) = 0 \Rightarrow x=-9$ oder $x=0$ (2fach)
$f'(x) = -\frac{2}{9}x^2 - \frac{4}{3}x = -\frac{2}{9}x(x+6)$
$\tan\varphi_1 = |f'(-9)| = 6 \Rightarrow \varphi_1 = 80{,}5°$
wegen der 2fachen Nullstelle 0 ist $\varphi_2 = 0°$ und $\tau = 90°$

c) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x = x(x^2 - 3x + 2) = x(x-1)(x-2)$
$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$
$\tan\varphi_1 = |f'(0)| = 2 \Rightarrow \varphi_1 = 63{,}4°$, $\tau = 90° - 63{,}4° = 26{,}6°$
$\tan\varphi_2 = |f'(1)| = 1 \Rightarrow \varphi_2 = 45°$
$\tan\varphi_3 = |f'(2)| = 2 \Rightarrow \varphi_3 = 63{,}4°$

d) $f(x) = (x^2-1)(x^2-x-2) = (x-1)(x+1)(x+1)(x-2) =$
$= (x+1)^2(x-1)(x-2) = x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2$
$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 1$
wegen der 2fachen Nullstelle –1 ist $\varphi_1 = 0°$
$\tan\varphi_2 = |f'(1)| = 4 \Rightarrow \varphi_2 = 76{,}0°$
$\tan\varphi_3 = |f'(2)| = 9 \Rightarrow \varphi_3 = 83{,}7°$
$\tan\sigma = |f'(0)| = 1 \Rightarrow \sigma = 45°$, $\tau = 90° - 45° = 45°$

◊2 Schnittstelle a: $f(a) - g(a) = 0$; $m_1 = f'(a)$, $m_2 =$ Geradensteigung
Schnittwinkel φ: $\tan\varphi = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right|$

a) $f(x) = \frac{1}{4}(x-3)^2 = \frac{1}{4}(x^2 - 6x + 9)$, $f'(x) = \frac{1}{2}(x-3)$; $g(x) = x$
$f(x) - g(x) = \frac{1}{4}(x^2 - 6x + 9 - 4x) = \frac{1}{4}(x^2 - 10x + 9) = \frac{1}{4}(x-1)(x-9)$
$m_1 = f'(1) = -1$, $m_2 = 1$, rechtwinkliger Schnitt in $(1|1)$
$m_1 = f'(9) = 3$, $m_2 = 1$, $\varphi = 26{,}6°$, Schnittpunkt $(9|9)$

b) $f(x) = \frac{x}{8}(x^2 + 2x - 15) = \frac{x}{8}(x+5)(x-3) = \frac{1}{8}(x^3 + 2x^2 - 15x)$
$f'(x) = \frac{1}{8}(3x^2 + 4x - 15)$ $g(x) = -\frac{3}{2}x$
$f(x) - g(x) = \frac{1}{8}(x^3 + 2x^2 - 3x) = \frac{x}{8}(x^2 + 2x - 3) = \frac{x}{8}(x+3)(x-1)$
$m_1 = f'(0) = -\frac{15}{8}$, $m_2 = -\frac{3}{2}$, $\varphi = 5{,}6°$, Schnittpunkt $(0|0)$
$m_1 = f'(-3) = 0$, $m_2 = -\frac{3}{2}$, $\varphi = 56{,}3°$, Schnittpunkt $(-3|4{,}5)$
$m_1 = f'(1) = -1$, $m_2 = -\frac{3}{2}$, $\varphi = 11{,}3°$, Schnittpunkt $(1|-1{,}5)$

c) $f(x) = \frac{x}{108}(5x^2-60x+216) = \frac{1}{108}(5x^3-60x^2+216x)$; $g(x) = \frac{x}{3}$

$f'(x) = \frac{1}{108}(15x^2-120x+216) = \frac{1}{36}(5x^2-40x+72)$

$f(x) - g(x) = \frac{1}{108}(5x^3-60x^2+180x) = \frac{5x}{108}(x^2-12x+36)$

$= \frac{5x}{108}(x-6)^2$

$m_1 = f'(0) = 2$, $m_2 = \frac{1}{3}$, $\varphi = 45°$(exakt!), Schnittpunkt $(0|0)$

6 ist 2fache Schnittstelle: g ist Tangente von f in $(6|2)$, $\varphi = 0°$

•3 Bestimme die Gleichung der Gerade g, die durch den Punkt P der Kurve G_f geht und mit der Kurve den Winkel φ bildet.

a) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2-6x-20$, $P(-4|f(-4)) = P(-4|-4)$, $f'(x) = -x-6$

Kurvensteigung in P: $f'(-4) = -2$

Geradensteigung ($\varphi = 90°$): $m = -\frac{1}{f(-4)} = \frac{1}{2}$

Geradengleichung: $y = m(x-x_p) + y_p = \frac{1}{2}(x+4)-4 = \frac{1}{2}x-2$

b) $f(x) = \frac{1}{12}(x^3-9x^2+33x-21)$, $P(1|f(1)) = P(1|{}^1/_3)$

$f'(x) = \frac{1}{12}(3x^2-18x+33) = \frac{1}{4}(x^2-6x+11)$

Kurvensteigung in P: $f'(1) = \frac{3}{2} = m$, Geradensteigung wegen $\varphi = 0°$

Tangentengleichung: $y = m(x-x_p) + y_p = \frac{3}{2}(x-1)+\frac{1}{3} = \frac{3}{2}x-\frac{7}{6}$

c) $f(x) = \frac{1}{4}(x^2+2x-3)$, $P(-3|?) = P(-3|0)$, $f'(x) = \frac{1}{2}(x+1)$

Kurvensteigung in P: $f'(-3) = -1$, Neigungswinkel in P: 45°

wegen $\varphi = 45°$ sind die x-Achse und die Senkrechte $x=-3$ Lösungen.

d) $f(x) = \frac{1}{4}(x^2+2x-3)$ $P(5|?) = P(5|8)$, $f'(x) = \frac{1}{2}(x+1)$

Kurvensteigung in P: $f'(5) = 3$, Geradensteigung m

Bedingung für den Schnittwinkel $\varphi = 45°$: $\tan 45° = \left|\frac{f(5)-m}{1+f(5)\,m}\right|$

$1 = \left|\frac{3-m}{1+3m}\right| \Rightarrow \frac{3-m}{1+3m} = \pm 1$

Fall: $\frac{3-m}{1+3m} = +1$ fi $3 - m = 1 + 3m \Rightarrow m = \frac{1}{2}$

Geradengleichung: $y = \frac{1}{2}(x-5) + 8 = \frac{1}{2}x + \frac{11}{2}$

Fall: $\frac{3-m}{1+3m} = -1 \Rightarrow 3 - m = -1 - 3m \Rightarrow m = -2$

Geradengleichung: $y = -2(x-5) + 8 = -2x + 18$

•4 a) Scheitel $S(0|-1)$, G_f schneide die x-Achse unter 45°.

Scheitelgleichung aller Parabeln mit Scheitel $(0|-1)$:

$y = f(x) = k(x-0)^2 - 1 = kx^2 - 1$

Schnitt mit x-Achse: $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 = 1/k \Rightarrow x = \pm\sqrt{1/k}$, $k>0$

$y' = f'(x) = 2kx$

Bedingung für den Schnittwinkel $\varphi = 45°$: $\tan 45° = |f'(\sqrt{1/k})|$

$1 = |2k\sqrt{1/k}|$ (wegen $k>0$) $\Rightarrow$ $1 = 2k\sqrt{1/k}$ $\Rightarrow$ $k = \frac{1}{4}$, $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 1$

b) Scheitel $S(-1|0)$, G_f schneide die y-Achse unter 45°.
Scheitelgleichung aller Parabeln mit Scheitel $(-1|0)$:
$y = f(x) = k(x+1)^2 = k(x^2+2x+1)$
Schnitt mit y-Achse: $(0|k)$
$y' = f'(x) = k(2x+2) = 2k(x+1)$
Bedingung für den Schnittwinkel $\varphi = 45°$: $\tan 45° = |f'(0)|$

$1 = |2k|$ $\Rightarrow$ $k = \pm\frac{1}{2}$; Lösungen: $f_{+1/2}(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2$, $f_{-1/2}(x) = -\frac{1}{2}(x+1)^2$

c) Scheitel $S(0|t)$, Normalparabel G_f schneide die x-Achse unter 45°.
Scheitelgleichung aller Normalparabeln ($k=\pm1$!) mit Scheitel $(0|t)$:
$y = f(x) = \pm(x-0)^2 + t = \pm x^2 + t$ $\quad y' = f'(x) = \pm 2x$
Schnitt mit x-Achse: $f(x) = 0$
Fall $+x^2 + t = 0$ $\Rightarrow$ $x = \pm\sqrt{-t}$, $t<0$
Schnittwinkel-Bedingung: $\tan 45° = |f'(\sqrt{-t})|$
$1 = |+2\sqrt{-t}|$ $\Rightarrow$ $1 = 4(-t)$ Lösung: $y = x^2 - \frac{1}{4}$
Fall $-x^2 + t = 0$ $\Rightarrow$ $x = \pm\sqrt{t}$, $t>0$
Schnittwinkel-Bedingung: $\tan 45° = |f'(\sqrt{t})|$
$1 = |-2\sqrt{t}|$ $\Rightarrow$ $1 = 4t$ Lösung: $y = -x^2 + \frac{1}{4}$

5 a) $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$ $\qquad$ $g(x) = x^2 + x - 1$, $g'(x) = 2x + 1$
Schnittstellen: $f(x) - g(x) = 0$ $\Rightarrow$ $x = 1$
$m_1 = f'(1) = 2$, $m_2 = g'(1) = 3$, $\tan\varphi = \frac{1}{7}$ $\Rightarrow$ $\varphi = 8{,}1°$

b) $f(x) = x^2 - 2$, $f'(x) = 2x$ $\qquad$ $g(x) = -x^2 - 2x + 2$, $g'(x) = -2x - 2$
Schnittstellen: $f(x) - g(x) = 0$ $\Rightarrow$ $x^2 + x - 2 = 0$ $\Rightarrow$ $(x+2)(x-1) = 0$
Schnittstelle -2: $f'(-2) = -4$, $g'(-2) = 2$, $\tan\varphi = \frac{6}{7}$ $\Rightarrow$ $\varphi = 40{,}6°$
Schnittstelle 1: $f'(1) = 2$, $g'(1) = -4$, $\tan\varphi = \frac{6}{7}$ $\Rightarrow$ $\varphi = 40{,}6°$

c) $f(x) = x(1 - x) = x - x^2$ $\qquad$ $f'(x) = 1 - 2x$
$g(x) = x(1 + x) = x + x^2$ $\qquad$ $g'(x) = 1 + 2x$
Schnittstellen: $f(x) - g(x) = 0$ $\Rightarrow$ $2x^2 = 0$ $\Rightarrow$ $x = 0$ (2fach),
die Schnittstelle ist 2fach; deshalb berühren sich die Parabeln,
der Schnittwinkel ist also 0°.

d) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x$ $\quad$ $f'(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}$ $\qquad$ $g(x) = \frac{1}{7}x^2 - 2x$ $\quad$ $g'(x) = \frac{2}{7}x - 2$

$f(x) - g(x) = 0$ $\Rightarrow$ $\frac{5x}{42}(4x - 21) = 0$

Schnittstelle 0: $f'(0) = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $g'(0) = -2$ $\Rightarrow$ $\varphi = 90°$

Schnittstelle $\frac{21}{4}$: $f'(\frac{21}{4}) = -3$ $\;$ $g'(\frac{21}{4}) = -\frac{1}{2}$ $\qquad$ $\tan\varphi = 1$ $\Rightarrow$ $\varphi = 45°$

6 a) $f(x) = \frac{1}{6}x(x^2-13) = \frac{1}{6}(x^3-13x)$ $\quad f'(x) = \frac{1}{6}(3x^2-13)$

$g(x) = -\frac{1}{6}x(x-7) = -\frac{1}{6}(x^2-7x)$ $\quad g'(x) = -\frac{1}{6}(2x-7)$

$f(x) - g(x) = 0 \Rightarrow \frac{x}{6}(x^2+x-20) = 0 \Rightarrow \frac{x}{6}(x+5)(x-4) = 0$

Schnittstelle 0: $f'(0) = -\frac{13}{6}$ $\quad g'(0) = \frac{7}{6}$ $\quad \tan\varphi = \frac{24}{11} \Rightarrow \varphi = 65{,}4°$

Schnittstelle −5: $f'(-5) = \frac{31}{3}$ $\quad g'(-5) = \frac{17}{6}$ $\quad \tan\varphi = \frac{27}{109} \Rightarrow \varphi = 13{,}9°$

Schnittstelle 4: $f'(4) = \frac{35}{6}$ $\quad g'(4) = \frac{-1}{6}$ $\quad \tan\varphi = 216 \Rightarrow \varphi = 89{,}7°$

b) $f(x) = \frac{1}{6}x(7-x^2) = \frac{1}{6}(7x-x^3)$ $\quad f'(x) = \frac{1}{6}(7-3x^2)$

$g(x) = \frac{1}{6}x(x-5) = \frac{1}{6}(x^2-5x)$ $\quad g'(x) = \frac{1}{6}(2x-5)$

$f(x) - g(x) = 0 \Rightarrow \frac{-x}{6}(x^2+x-12) = 0 \Rightarrow \frac{-x}{6}(x+4)(x-3) = 0$

Schnittstelle 0: $f'(0) = \frac{7}{6}$ $\quad g'(0) = \frac{-5}{6}$ $\quad \tan\varphi = 72 \Rightarrow \varphi = 89{,}2°$

Schnittstelle −4: $f'(-4) = \frac{-41}{6}$ $\quad g'(-4) = \frac{-13}{6}$ $\quad \tan\varphi = \frac{168}{569} \Rightarrow \varphi = 16{,}4°$

Schnittstelle 3: $f'(3) = \frac{-10}{3}$ $\quad g'(3) = \frac{1}{6}$ $\quad \tan\varphi = \frac{63}{8} \Rightarrow \varphi = 82{,}8°$

c) $f(x) = -x(x^2-1) = -x^3 + x$ $\quad f'(x) = -3x^2 + 1$

$g(x) = x(x-1) = x^2 - x$ $\quad g'(x) = 2x - 1$

$f(x) - g(x) = 0 \Rightarrow -x(x^2 + x - 2) = 0 \Rightarrow -x(x+2)(x-1) = 0$

Schnittstelle 0: $f'(0) = 1$ $\quad g'(0) = -1$ $\quad \Rightarrow \varphi = 90°$

Schnittstelle −2: $f'(-2) = -11$ $\quad g'(-2) = -5$ $\quad \tan\varphi = \frac{3}{28} \Rightarrow \varphi = 6{,}1°$

Schnittstelle 1: $f'(1) = -2$ $\quad g'(1) = 1$ $\quad \tan\varphi = 3 \Rightarrow \varphi = 71{,}6°$

4. Monotonie und Extrema

◊1 a) $f(x) = x^2 - 4x$ $\quad$ $f'(x) = 2x - 4 = 2(x-2) = 0$ $\quad$ Parabel oben offen
Fallen: $x \leqq 2$ $\quad$ Steigen: $x \geqq 2$

b) $f(x) = x^2 - 4x + 5$ $\quad$ $f'(x) = 2x - 4 = 2(x-2) = 0$ $\quad$ Parabel oben offen
Fallen: $x \leqq 2$ $\quad$ Steigen: $x \geqq 2$

c) $f(x) = -x^2 - 4x$ $\quad$ $f'(x) = -2x - 4 = -2(x+2) = 0$ $\quad$ Parabel unten offen
Steigen: $x \leqq -2$ $\quad$ Fallen: $x \geqq -2$

d) $f(x) = -x^2 + 4x - 4$ $\quad$ $f'(x) = -2x + 4 = -2(x-2) = 0$ $\quad$ Parabel unten offen
Steigen: $x \leqq 2$ $\quad$ Fallen: $x \geqq 2$

e) $f(x) = -x - 4$ $\quad$ Gerade mit Steigung –1 fällt (überall)

f) $f(x) = -4$ $\quad$ waagrechte Gerade: weder ems noch emf

◊2 a) $f(x) = x^3 + 1$ $\quad$ $f'(x) = 3x^2 \ (\geqq 0)$ $\quad$ steigt echt monoton

b) $f(x) = x^3 + x$ $\quad$ $f'(x) = 3x^2 + 1 \ (>0)$ $\quad$ steigt echt monoton

c) $f(x) = x^3 + x^2$ $\quad$ $f'(x) = 3x^2 + 2x = x(3x+2) = 0$
Steigen: $x \leqq -2/3$ $\quad$ Fallen: $-2/3 \leqq x \leqq 0$ $\quad$ Steigen: $0 \leqq x$

d) $f(x) = x^3 + x^2 + 1$ $\quad$ Ergebnis wie **c)**, denn eine Verschiebung in y-Richtung ändert nicht nichts an der Gestalt der Kurve.

•3 a) $f(x) = x^5 + 3x^4 - 6x^3 - 10x^2 + 21x - 9$
$f'(x) = 5x^4 + 12x^3 - 18x^2 - 20x + 21 = (x+3)(5x+7)(x-1)^2$

f'(x)	+	0^1	−	0^1	+	0^2	+
x	ems	−3	emf	−1,4	ems	1	ems
	↗	**WAT**	↘	**WAT**	↗	**WAT**	↗

b) $f(x) = -x^5 + 2x^4 + 6x^3 - 4x^2 - 13x - 6$
$f'(x) = -5x^4 + 8x^3 + 18x^2 - 8x - 13 = -(x+1)^2(x-1)(5x-13)$

f'(x)	+	0^2	−	0^1	+	0^1	−
x	ems	−1	emf	1	ems	2,6	emf
	↗	**WAT**	↘	**WAT**	↗	**WAT**	↘

c) $f(x) = -x^5 + 5x^4 - 40x^2 + 80x - 48$
$f'(x) = -5x^4 + 20x^3 - 80x + 80 = -5(x+2)(x-2)^3$

f'(x)	−	0^1	+	0^3	−
x	emf	−2	ems	2	emf
	↘	**WAT**	↗	**WAT**	↘

•4 a) $f(x) = (x^2 - 49)(x^2 - 1) = x^4 - 50x^2 + 49$
$f'(x) = 4x^3 - 100x = 4x(x^2 - 25) = 4x(x+5)(x-5)$

f'(x)	−	0^1	+	0^1	−	0^1	+
x	emf	−5	ems	0	emf	5	ems
	↘	**WAT**	↗	**WAT**	↘	**WAT**	↗

b) $f(x) = (x - 1)(x - 3)^3 = x^4 - 10x^3 + 36x^2 - 54x + 27$
$f'(x) = 4x^3 - 30x^2 + 72x - 54 = 2(2x-3)(x-3)^2$

f'(x)	−	0^1	+	0^2	+
x	emf	1,5	ems	3	ems
	↘	**WAT**	↗	**WAT**	↗

c) $f(x) = -(x + 2)^2(x - 3)(x - 7) = -x^4 + 6x^3 + 15x^2 - 44x - 84$
$f'(x) = -4x^3 + 18x^2 + 30x - 44 = -2(x+2)(x-1)(2x-11)$

f'(x)	+	0^1	−	0^1	+	0^1	−
x	ems	−2	emf	1	ems	5,5	emf
	↗	**WAT**	↘	**WAT**	↗	**WAT**	↘

◊5 a) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$ $f'(x) = 6x^2 + 6x - 36 = 6(x+3)(x-2)$

f'(x)	+	0^1	−	0^1	+
x	ems	−3	emf	2	ems
	↗	**WAT** HOP(−3|81)	↘	**WAT** TIP(2|−44)	↗

b) $f(x) = x^3(x - 5)^2 + 2 = x^5 - 10x^4 + 25x^3 + 2$
$f'(x) = 5x^4 - 40x^3 + 75x^2 = 5x^2(x^2 - 8x + 15) = 5x^2(x-3)(x-5)$

f'(x)	+	0^2	+	0^1	−	0^1	+
x	ems	0	ems	3	emf	5	ems
	↗	**WAT** TEP(0|2)	↗	**WAT** HOP(3|110)	↘	**WAT** TIP(5|2)	↗

c) $f(x) = -x^4 + 18x^2 - 4$ $\qquad f'(x) = -4x^3 + 36x = -4x(x-3)(x+3)$

+	0^1	−	0^1	+	0^1	−	f'(x)
ems	−3	emf	0	ems	3	emf	x
	WAT		**WAT**		**WAT**		
	$\text{HOP}(-3\vert 77)$		$\text{TIP}(0\vert -4)$		$\text{HOP}(3\vert 77)$		

•6 a) $f(x) = x^3 + 6x^2 - 135x$, $D_f = [-9;9]$

$f'(x) = 3(x+9)(x-5)$, Waag.punkte: $W_1(-9|972)$, $W_2(5|-400)$

RandExtrema: $f(-9) = 972$, $f(9) = 0$ Skizze für $\mathbb{R}$:

+	0^1	−	0^1	+	f'(x)
ems	−9	emf	5	ems	x
	WAT		**WAT**		
	$\text{HOP}(-9\vert 972)$		$\text{TIP}(5\vert -400)$		

Berücksichtigung von D_f:
Das Extremum 972 bei −9 ist ein absolutes Maximum,
das Extremum −400 bei 5 ist ein absolutes Minimum,
das Extremum 0 bei 9 ist ein relatives Maximum.

b) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$, $D_f = \mathbb{R}_0^+$

$f'(x) = 3x(x+2)$ Waagrechtpunkte: $W_1(0|-2)$, $W_2(-2|2)$

RandExtremum: $f(0) = 2$ Skizze für $\mathbb{R}$:

+	0^1	−	0^1	+	f'(x)
ems	−2	emf	0	ems	x
	WAT		**WAT**		
	$\text{HOP}(-2\vert 2)$		$\text{TIP}(0\vert -2)$		

Berücksichtigung von D_f:
Das Extremum 2 bei −2 wäre ein relatives Maximum,
das Extremum −2 bei 0 ist ein absolutes Minimum.

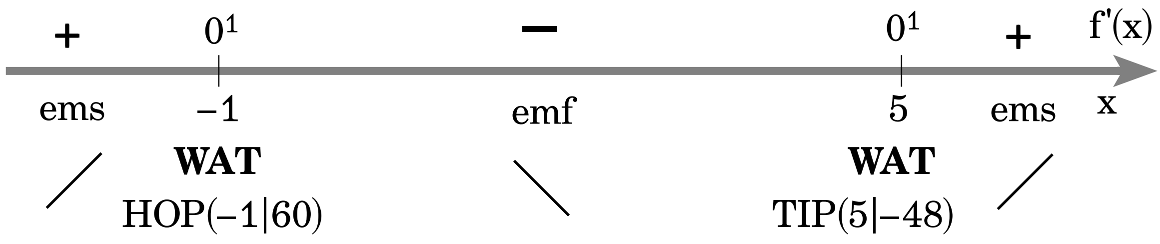
c) $f(x) = x^5 + x + 1$, $D_f = [-1;1]$

$f'(x) = 5x^4 + 1$ Wegen $f'(x) \geqq 1$ gibt es keinenWaagrechtpunkt.
Der Randpunkt $(-1|1)$ ist absoluter Tiefpunkt,
der Randpunkt $(1|3)$ ist absoluter Höhepunkt.

d) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 52$, $D_f = \mathbb{R}^-$

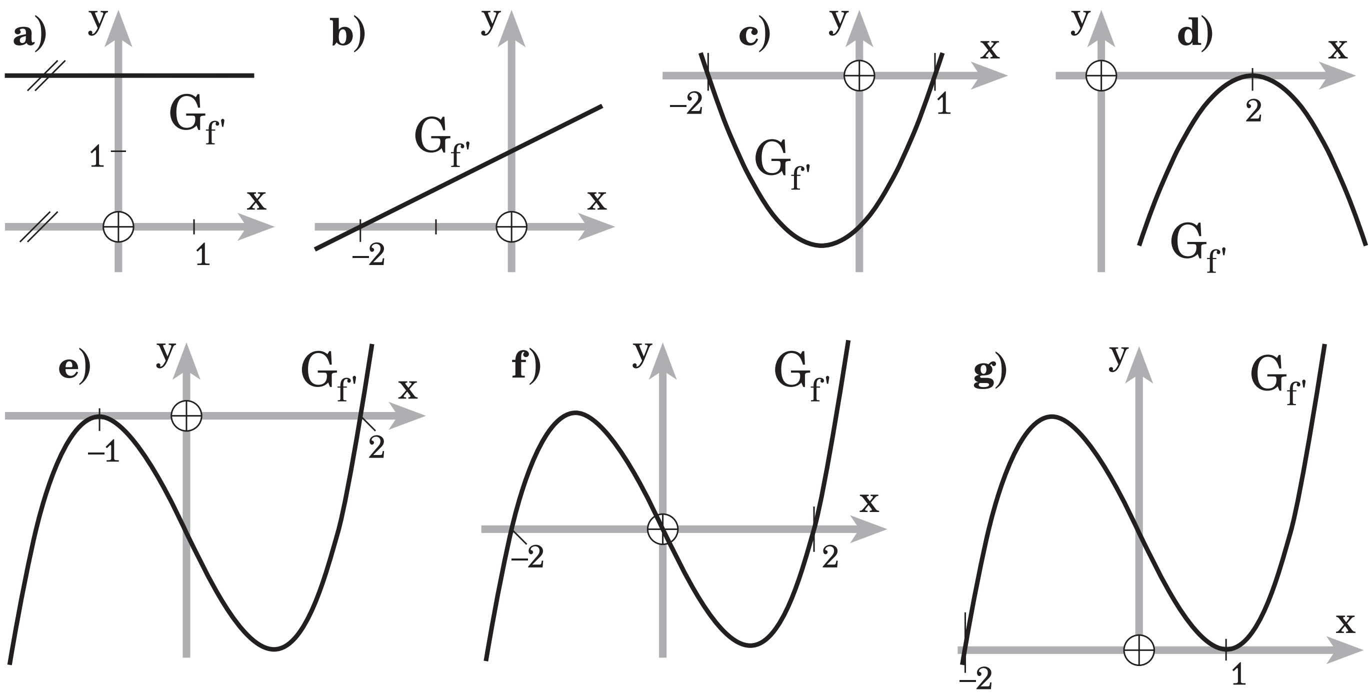
$f'(x) = 3(x+1)(x-5)$ Waagrechtpunkte: $W_1(-1|60)$, $W_2(5|-48)$

wegen $x<0$ gibt es $f(0) = 52$ als RandExtremum nicht, Skizze für $\mathbb{R}$:



Das Extremum 60 bei –1 ist ein absolutes Maximum.

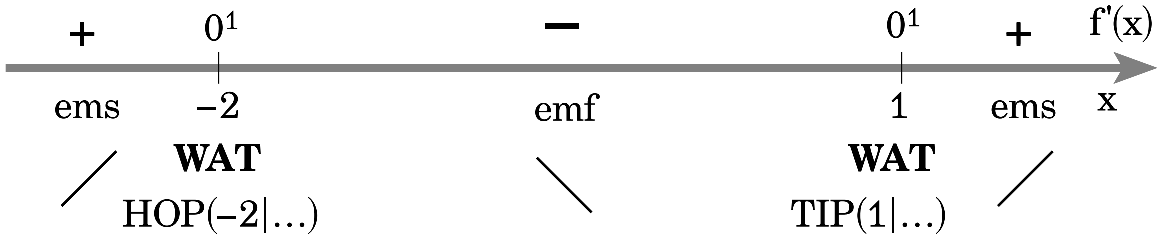
◊7 Lies aus den Bildern die Monotoniebereiche und die Waagrechtstellen von G_f ab und gib die Art der Waagrechtpunkte an.



a) G_f hat konstante positive Steigung, ist also eine steigende Gerade; da gibt es keine Waagrechtstellen.

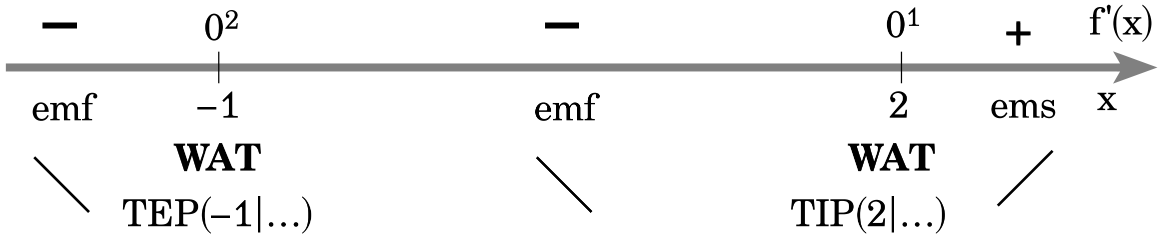
b) G_f fällt links und steigt rechts von der Waagrechtstelle –2, ist also eine oben offene Parabel mit Scheitel (TIP) bei –2.

c)



d) G_f fällt links und rechts von der Waagrechtstelle 2, 2 ist also x-Wert eines Terrassenpunkts.

e)



f)

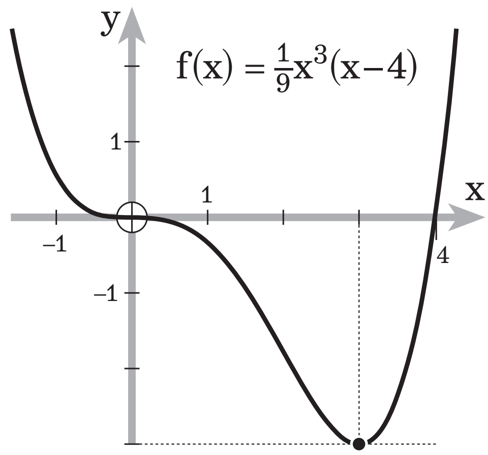
$f'(x)$	−	0^1	+	0^1	−	0^1	+
x	emf	−2	ems	0	emf	2	ems
	↘	**WAT** TIP($-2\vert\ldots$)	↗	**WAT** HOP($0\vert\ldots$)	↘	**WAT** TIP($2\vert\ldots$)	↗

g)

$f'(x)$	−	0^1	+	0^2	+
x	emf	−2	ems	1	ems
	↘	**WAT** TIP($-2\vert\ldots$)	↗	**WAT** TEP($1\vert\ldots$)	↗

•8 a) $D_1 = \mathbb{R}$ $\qquad f'(x) = \frac{4}{9}x^2(x-3)$

(0|0) ist Terrassenpunkt,
(0 ist 3-fache Nullstelle von f_1!)
W(3|−3) ist Tiefpunkt,
−3 ist absolutes Minimum von f_1



b) $D_2 = \mathbb{R}_0^+$

(0|0) ist relativer Hochpunkt,
0 ist relatives RandMaximum;
W(3|−3) ist Tiefpunkt,
−3 ist absolutes Minimum von f_2

c) $D_3 = \mathbb{R}^+$

f_3 hat kein Maximum
W(3|−3) ist Tiefpunkt, −3 ist absolutes Minimum von f_3

d) $D_4 = \mathbb{R}\setminus\{3\}$

(0|0) ist Terrassenpunkt
wegen des Kurvenlochs (3|−3) hat die Funktion f_4 kein Minimum

9 $f(x) = f'(x)$: $\frac{1}{2}(x^3-2x^2-5x) = \frac{1}{2}(3x^2-4x-5) \Rightarrow x^3-5x^2-x+5=0$

$x^2(x-5)-(x-5)=0 \Rightarrow (x-5)(x^2-1)=0 \Rightarrow x=5$ oder $x=\pm1$

Schnittpunkte von G_f und $G_{f'}$: (5|25), (−1|1), (1|−3)
Bei diesen 3 Punkten ist der y-Wert zugleich auch der Wert der Kurvensteigung.

5. Höhere Ableitungen; Krümmungsart

◊1 a) $f'(x) = 18x^2 - 2$ $\quad f''(x) = 36x$ $\quad f'''(x) = 36$ $\quad f^{(n)}(x) = 0,\ n \geqq 4$

b) $f'(x) = 6x^5$ $\quad f''(x) = 30x^4$ $\quad f'''(x) = 120x^3$ $\quad f^{(4)}(x) = 360x^2$

$f^{(5)}(x) = 720x$ $\quad f^{(6)}(x) = 720$ $\quad f^{(n)}(x) = 0,\ n \geqq 7$

c) $f'(x) = nx^{n-1}$ $\quad f''(x) = n(n-1)x^{n-2}$ $\quad f'''(x) = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$

$f^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot 3\cdot 2\cdot 1$ $\quad f^{(m)}(x) = 0,\ m>n$

•◊2 a und b sind Konstanten.

a) $f''(x) = 0$ $\quad f'(x) = a$ $\quad f(x) = ax + b$

b) $f''(x) = -3$ $\quad f'(x) = -3x + a$ $\quad f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + ax + b$

c) $f''(x) = x$ $\quad f'(x) = \frac{1}{2}x^2 + a$ $\quad f(x) = \frac{1}{6}x^3 + ax + b$

d) $f''(x) = 24x^2 - 6x + 2$ $\quad f'(x) = 8x^3-3x^2+2x+a$ $\quad f(x) = 2x^4 - x^3 + x^2 + ax + b$

e) $f''(x) = 2x^2-4x+1$ $\quad f'(x) = \frac{2}{3}x^3-2x^2+x+a$ $\quad f(x) = \frac{2}{12}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+ax+b$

◊3 a) $f(x) = x^3 + 1$ $\quad f'(x) = 3x^2$ $\quad f''(x) = 6x$

Linkskurve: $f''(x) \geqq 0 \Rightarrow x \geqq 0$ Rechtskurve: $f''(x) \leqq 0 \Rightarrow x \leqq 0$

b) $f(x) = x^3 + x$ $\quad f'(x) = 3x^2 + 1$ $\quad f''(x) = 6x$, Ergebnis wie **a)**

c) $f(x) = x^3 + x^2$ $\quad f'(x) = 3x^2 + 2x$ $\quad f''(x) = 6x + 2$

Linkskurve: $f''(x) \geqq 0 \Rightarrow x \geqq -\frac{1}{3}$ Rechtskurve: $f''(x) \leqq 0 \Rightarrow x \leqq -\frac{1}{3}$

d) $f(x) = x^3 + x^2 + 1$ $\quad f'(x) = 3x^2 + 2x$ $\quad f''(x) = 6x + 2$, Ergebnis wie **c)**

◊4 a) $f(x) = x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x$ $\quad f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$

$f''(x) = 6x - 6,\quad f''(x) = 0 \Rightarrow x=1$

Linkskurve: $f''(x) \geqq 0 \Rightarrow x \geqq 1$ Rechtskurve: $f''(x) \leqq 0 \Rightarrow x \leqq 1$

b) $f(x) = (x^2-3)^2 = x^4 - 6x^2 + 9$ $\quad f'(x) = 4x^3 - 12x + 2$

$f''(x) = 12x^2 - 12,\quad f''(x) = 0 \Rightarrow |x|=1 \Rightarrow x=\pm 1$

Linkskurve: $f''(x) \geqq 0 \Rightarrow |x| \geqq 1 \Rightarrow x \leqq -1$ oder $x \geqq 1$

Rechtskurve: $f''(x) \leqq 0 \Rightarrow |x| \leqq 1 \Rightarrow -1 \leqq x \leqq 1$

◊5 a) $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x + 3$

$f'(x) = 6x^2 - 24x + 18 f''(x) = 12x - 24 = 12(x - 2)$

2 ist 1fache Nullstelle von f'', also Wendestelle von f

Wendepunkt $(2|f(2)) = (2|7)$

b) $f(x) = x^2(x-6)$

$f(x) = x^3 - 6x^2$ $\quad f'(x) = 3x^2 - 12x$ $\quad f''(x) = 6x - 12 = 6(x - 2)$

2 ist 1fache Nullstelle von f'', also Wendestelle von f

Wendepunkt $(2|f(2)) = (2|-16)$

c) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x$

$f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 48x - 32$

$f''(x) = 12x^2 - 48x + 48 = 12(x^2 - 4x + 4) = 12(x - 2)^2$
2 ist 2fache Nullstelle von f'', also nur Flachstelle von f
Flachpunkt $(2|f(2)) = (2|-16)$

d) $f(x) = x^2(x^2-6)$
$f(x) = x^4 - 6x^2 \qquad f'(x) = 4x^3 - 12x$
$f''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x^2 - 1) = 12(x-1)(x+1)$
–1 und +1 sind 1fache Nullstellen von f'', also Wendestellen von f
Wendepunkte: $(1|f(1)) = (1|-5)$ und $(-1|f(-1)) = (-1|5)$

e) $f(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2$
$f'(x) = 4x^3 + 12x^2 + 12x$
$f''(x) = 12x^2 + 24x + 12 = 12(x^2 + 2x + 1) = 12(x + 1)^2$
–1 ist 2fache Nullstelle von f'', also nur Flachstelle von f
Flachpunkt $(-1|f(-1)) = (-1|3)$

f) $f(x) = x^3(x^2-30)$
$f(x) = x^5 - 30x^3 f'(x) = 5x^4 - 90x^2$
$f''(x) = 20x^3 - 180x = 20x(x^2 - 9) = 20(x+3)x(x-3)$
–3, 0 und 3 sind 1fache Nullstellen von f'', also Wendestellen von f
Wendepunkte: $(-3|567)$, $(0|0)$ und $(3|-567)$

g) $f(x) = 3x^5 - 10x^4 + 10x^3 - 5125x$
$f'(x) = 15x^4 - 40x^3 + 30x^2 - 5125$
$f''(x) = 60x^3 - 120x^2 + 60x = 60x(x^2 - 2x + 1) = 60x(x - 1)^2$
0 ist 1fache Nullstelle von f'', also Wendestelle von f
Wendepunkt: $(0|0)$
1 ist 2fache Nullstelle von f'', also nur Flachstelle von f
Flachpunkt $(1|f(1)) = (1|-5122)$

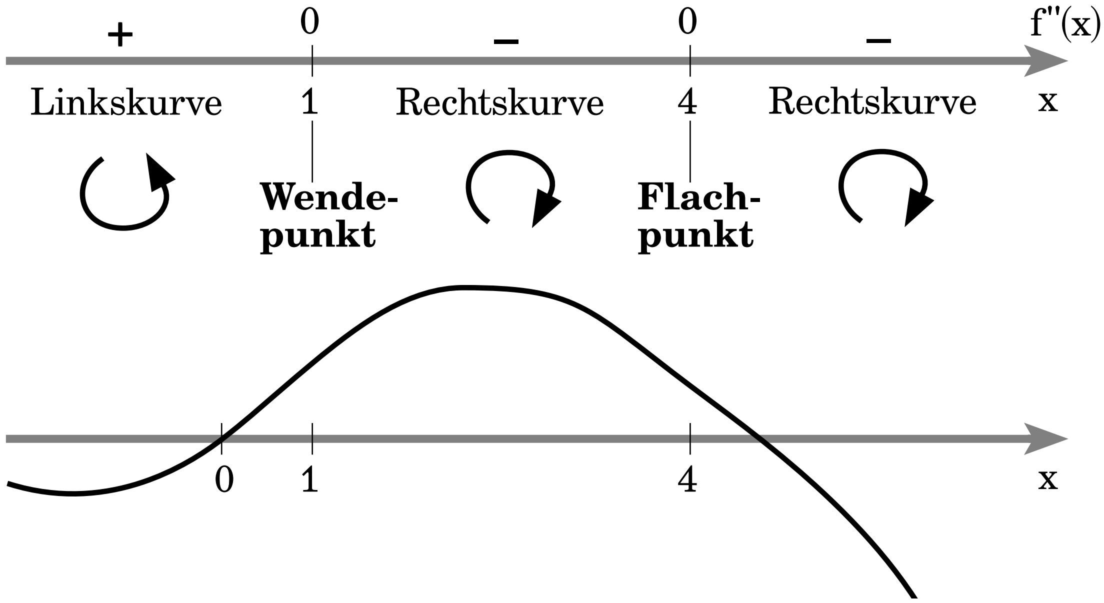
h) $f(x) = x^2(x^3-10)$
$f(x) = x^5 - 10x^2 f'(x) = 5x^4 - 20x$
$f''(x) = 20x^3 - 20 = 20(x^3 - 1) = 20(x-1)(x^2 + x + 1)$
1 ist 1fache Nullstelle von f'', also Wendestelle von f, WEP $(1|-9)$

i) $f(x) = -x^6 + 20x^4 - 240x^2$
$f'(x) = -6x^5 + 80x^3 - 480x$
$f''(x) = -30x^4 + 240x^2 - 480 = -30(x^4 + 8x^2 - 16) = -30(x^2 - 4)^2$
$= -30(x-2)^2(x+2)^2$
–2 und 2 sind 2fache Nullstellen von f'', also nur Flachstellen von f
Flachpunkte: $(-2|-704)$, $(2|-704)$

j) $f(x) = (x+5)^3(x-5)^3$
$f''(x) = 30(x^4 - 30x^2 + 125) = 30(x^2 - 25)(x^2 - 5)$
$= 30(x-5)(x+5)(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$
$5, -5, \sqrt{5}$ und $-\sqrt{5}$ sind 1fache Nullstellen von f'', also Wendestellen von f; die y-Werte berechnet man am besten mit $f(x) = (x^2-25)^3$.

Wendepunkte $(5|0)$, $(-5|0)$, $(\sqrt{5}\,|-8000)$, $(-\sqrt{5}\,|-8000)$

•6 $f''(x)>0$ für $x\in]-\infty;1[$; $f''(1)=0$
$f''(x)<0$ für $x\in[1;4[$; $f''(4)=0$ $f''(x)<0$ für $x\in]4;+\infty[$



•7 – Jede Polynomkurve vom Grad 3 hat einen Wendepunkt.
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, $f''(x) = 6ax + 2b$; f'' hat immer die 1fache Nullstelle $\frac{-b}{3a}$, wechselt dort also das Vorzeichen. Deswegen ist $\frac{-b}{3a}$ Wendestelle.

– Dieser Wendepunkt ist Symmetriezentrum der Polynomkurve.
Eine Kurve ist symmetrisch zum Punkt $(s|t)$, wenn für ihren Term gilt: $f(2s - x) = 2t - f(x)$. Weil die Kurve durch $(s|t)$ geht, ist $t = f(s)$; man muss also zeigen, dass $f(2s - x) + f(x) = 2f(s)$, wobei s die Wendestelle $^{-b}/_{3a}$ ist.

$f(2\cdot\frac{-b}{3a} - x) + f(x) = 2f(\frac{-b}{3a})$

Rechte Seite:

$2f(\frac{-b}{3a}) = 2(a(\frac{-b}{3a})^3 + b(\frac{-b}{3a})^2 + c(\frac{-b}{3a}) + d) = 2\cdot\frac{2b^3-9abc+27a^2d}{27a^2}$

Linke Seite:

$f(2\cdot\frac{-b}{3a} - x) + f(x) = a(\frac{-b}{3a} - x)^3 + b(\frac{-b}{3a} - x)^2 + c(\frac{-b}{3a} - x) + d \;+\; ax^3 + bx^2 + cx + d$

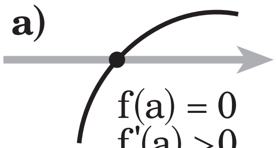
$= \frac{-27a^4x^3-27a^3bx^2-27a^3cx+27a^3d-18a^2bc+4ab^3}{27a^3} \;+\; ax^3 + bx^2 + cx + d$

$= \frac{1}{27a^3}(4ab^3-18a^2bc+54a^3d) = \frac{2}{27a^2}(2b^3-9abc+27a^2d)$

Wegen der Gleichheit beider Seiten ist die Behauptung bewiesen.

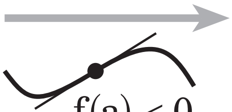
8

a)



$f(a) = 0$
$f'(a) > 0$
$f''(a) < 0$

b)

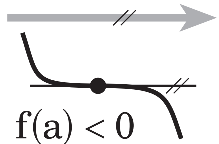


$f(a) < 0$
$f'(a) > 0$
$f''(a) = 0$

c)

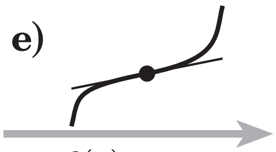
$f(a) > 0$
$f'(a) > 0$
$f''(a) > 0$

d)



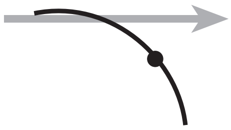
$f(a) < 0$
$f'(a) = 0$
$f''(a) = 0$

e)



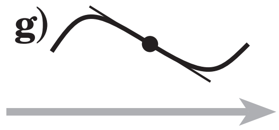
$f(a) > 0$
$f'(a) > 0$
$f''(a) = 0$

f)



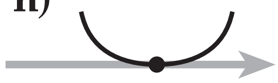
$f(a) < 0$
$f'(a) < 0$
$f''(a) < 0$

g)



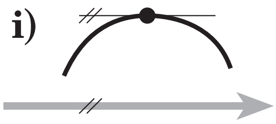
$f(a) > 0$
$f'(a) < 0$
$f''(a) = 0$

h)



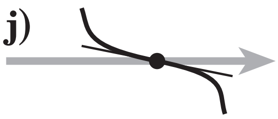
$f(a) = 0$
$f'(a) = 0$
$f''(a) > 0$

i)



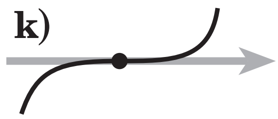
$f(a) > 0$
$f'(a) = 0$
$f''(a) < 0$

j)



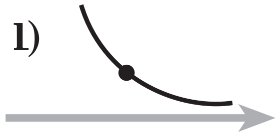
$f(a) = 0$
$f'(a) < 0$
$f''(a) = 0$

k)



$f(a) = 0$
$f'(a) = 0$
$f''(a) = 0$

l)



$f(a) > 0$
$f'(a) < 0$
$f''(a) > 0$

IV. Anwendungen

1. Kurvendiskussion

◊1 Alle Polynomfunktionen vom Grad 3 haben $W_f = \mathbb{R}$

a) **Obacht:** In der 1. Auflage des Lehrbuchs steht $\frac{1}{2}$ statt $\frac{1}{8}$

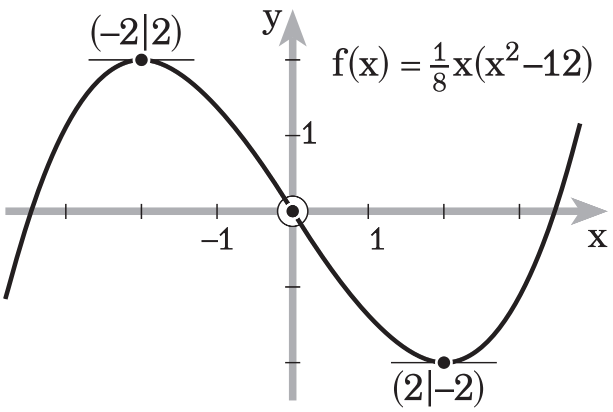
$f(x) = \frac{1}{8}x(x^2-12) = \frac{1}{8}(x^3 - 12x)$, Symmetrie zum Ursprung

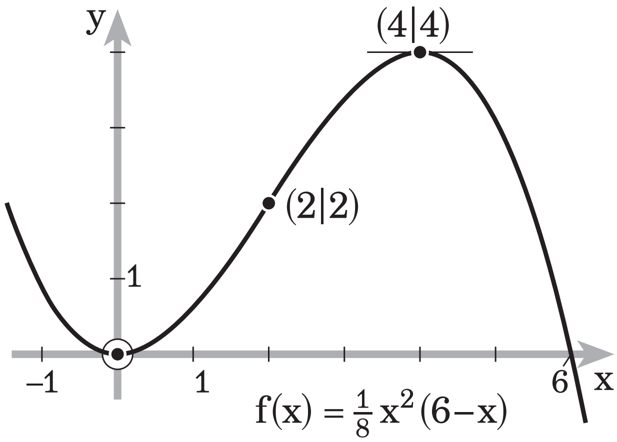
Nullstellen: $0, \pm 2\sqrt{3}$ (alle 1-fach)
Verhalten: wenn $x \to \pm\infty$, dann $f(x) \to \pm\infty$

$f'(x) = \frac{1}{8}(3x^2 - 12) = \frac{3}{8}(x^2 - 4) = \frac{3}{8}(x-2)(x+2)$ $\qquad f''(x) = \frac{3}{4}x$

$f''(x) = \frac{1}{8}(6x + 4) = \frac{1}{4}(3x + 2)$

$f'(-2) = 0$ und $f''(-2) < 0$, also $W_1(-2|2)$ ist Hochpunkt
$f'(2) = 0$ und $f''(2) > 0$, also $W_2(2|-2)$ ist Tiefpunkt
$f''(0) = 0$, $F(0|0)$ ist Wendepunkt





b) $f(x) = \frac{1}{8}x^2(6-x) = -\frac{1}{8}(x^3 - 6x^2)$, keine Symmetrie zum KOSY

0 ist 2-fache, 6 ist 1-fache Nullstelle
Verhalten: wenn $x \to \pm\infty$, dann $f(x) \to \mp\infty$

$f'(x) = -\frac{1}{8}(3x^2 - 12x) = -\frac{3}{8}x(x-4)$ $f''(x) = -\frac{3}{4}(x-2)$

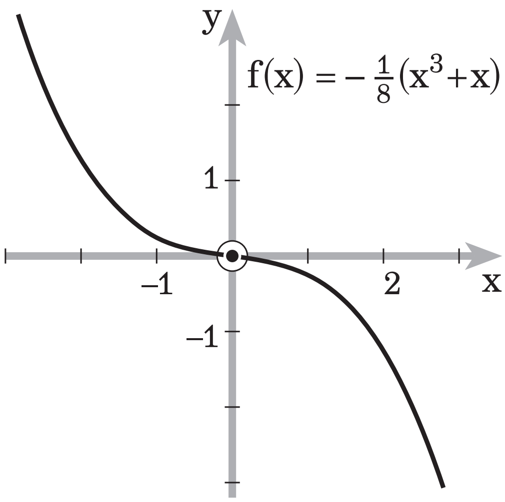
$f'(4) = 0$ und $f''(4) < 0$, also $W_1(4|4)$ ist Hochpunkt
$f'(0) = 0$ und $f''(0) > 0$, also $W_2(0|0)$ ist Tiefpunkt
$f''(2) = 0$, $F(2|2)$ ist Wendepunkt

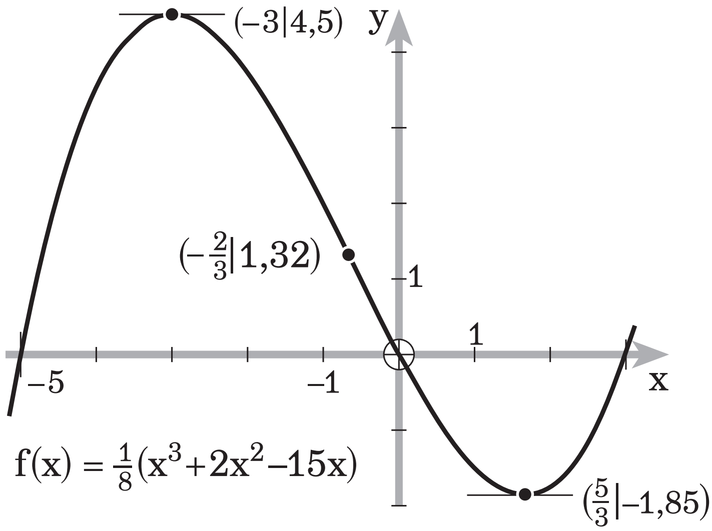
c) $f(x) = -\frac{1}{8}(x^3 + x) = -\frac{1}{8}x(x^2 + 1)$, Symmetrie zum Ursprung

0 ist die einzige, 1-fache Nullstelle

$f'(x) = -\frac{1}{8}(3x^2 + 1) f''(x) = -\frac{3}{4}x$

wegen $f'(x) < 0$ gibt es keine Waagrechtpunkte
$f''(0) = 0$, $F(0|0)$ ist Wendepunkt





d) $f(x) = \frac{1}{8}(x^3+2x^2-15x) = \frac{1}{8}x(x+5)(x-3)$

Nullstellen: –5, 0, 3 (alle 1-fach), keine Symmetrie zum KOSY
Verhalten: wenn $x \to \pm\infty$, dann $f(x) \to \pm\infty$

$f'(x) = \frac{1}{8}(3x^2+4x-15) = \frac{1}{8}(x+3)(3x-5)$

$f''(x) = \frac{1}{8}(6x+4) = \frac{1}{4}(3x+2)$

$f'(-3) = 0$ und $f''(-3) < 0$, also $W_1(-3|4,5)$ ist Hochpunkt
$f'(5/3) = 0$ und $f''(5/3) > 0$, also $W_2(5/3|-1,85)$ ist Tiefpunkt
$f''(-2/3) = 0$, $F(-2/3|1,32)$ ist Wendepunkt

◊2 a) $f(x) = \frac{1}{2}x^4-3x^2 = \frac{1}{2}x^2(x^2-6)$

Nullstellen: 0 (2-fach), $\pm\sqrt{6}$ (beide 1-fach), Symmetrie zur y-Achse
Verhalten: wenn $x \to \pm\infty$, dann $f(x) \to +\infty$
$f'(x) = 2x^3-6x = 2x(x^2-3) f''(x) = 6x^2-6 = 6(x^2-1)$
$f'(0) = 0$ und $f''(0) < 0$, also $W_1(0|0)$ ist Hochpunkt
$f'(\sqrt{3}) = 0$ und $f''(\sqrt{3}) > 0$, also $W_2(\sqrt{3}|-4,5)$ ist Tiefpunkt
wegen Symmetrie ist auch $W_3(-\sqrt{3}|-4,5)$ Tiefpunkt
$f''(\pm 1) = 0$, ± 1 sind 1-fache Nullstellen von f'':
$F_1(1|-2,5)$ und $F_2(-1|-2,5)$ sind Wendepunkte
$W_f = [-4,5;+\infty[$

b) $f(x) = \frac{x^2}{3}-\frac{4x^3}{135}-\frac{x^4}{90} = \frac{-1}{270}(3x^4+8x^3-90x^2) = \frac{-1}{270}x^2(3x^2+8x-90)$

Nullstellen: 0 (2-fach), $\frac{1}{3}(-4\pm\sqrt{286})$ (beide 1-fach)
keine Symmetrie zum KOSY
Verhalten: wenn $x \to \pm\infty$, dann $f(x) \to -\infty$
$f'(x) = \frac{-1}{270}(12x^3+24x^2-180x) = \frac{-12}{270}(x^3+2x^2-15x)$

$= \frac{-2}{45}\,x(x^2+2x-15) = \frac{-2}{45}\,x(x+5)(x-3)$

$f''(x) = \frac{-2}{45}(3x^2+4x-15)$

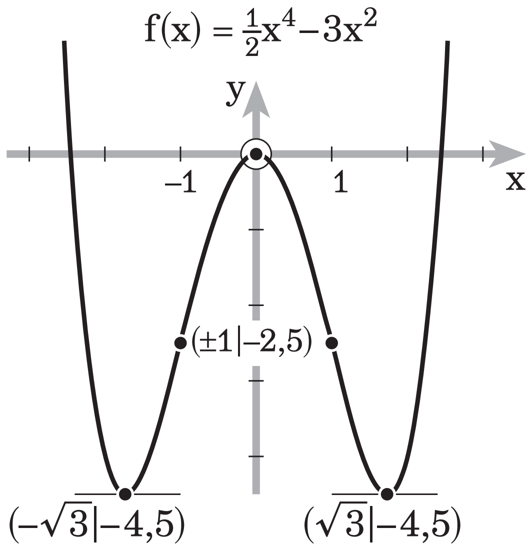
$f'(0) = 0$ und $f''(0) > 0$, also $W_1(0|0)$ ist Tiefpunkt

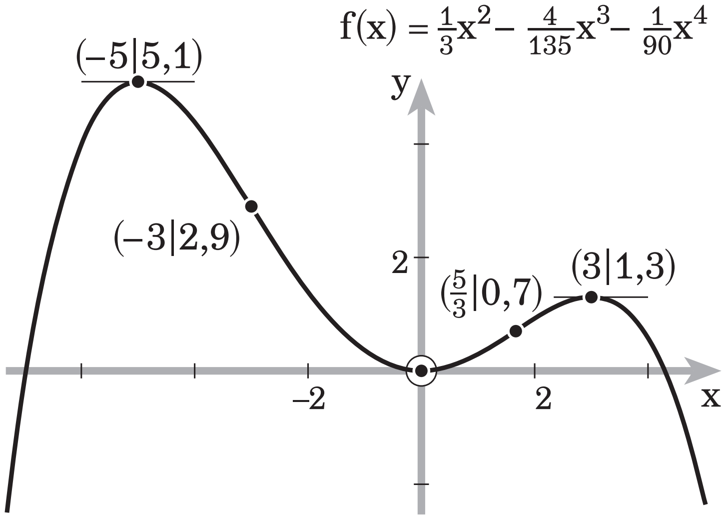
$f'(3) = 0$ und $f''(3) < 0$, also $W_2(3|1{,}3)$ ist Hochpunkt

$f'(-5) = 0$ und $f''(-5) < 0$, also $W_3(-5|5{,}1)$ ist Hochpunkt

$f''(x) = 0 \Rightarrow x = -3$ oder $x = 5/3$ (1-fache Nullstellen von f'')

$F_1(-3|2{,}9)$ und $F_2(5/3|0{,}7)$ sind Wendepunkte $\qquad W_f =]-\infty; \frac{275}{54}]$





c) $f(x) = \frac{1}{256}(x^4-16x^3+96x^2) = \frac{1}{256}\,x^2(x^2-16x+96)$

Nullstelle: 0 (2-fach),

keine Symmetrie zum KOSY

wenn $x \to \pm\infty$, dann $f(x) \to +\infty$

$f'(x) = \frac{1}{256}(4x^3-48x^2+192x)$

$f'(x) = \frac{1}{64}\,x(x^2-12x+48)$

$f''(x) = \frac{3}{64}(x^2-8x+16) = \frac{3}{64}(x-4)^2$

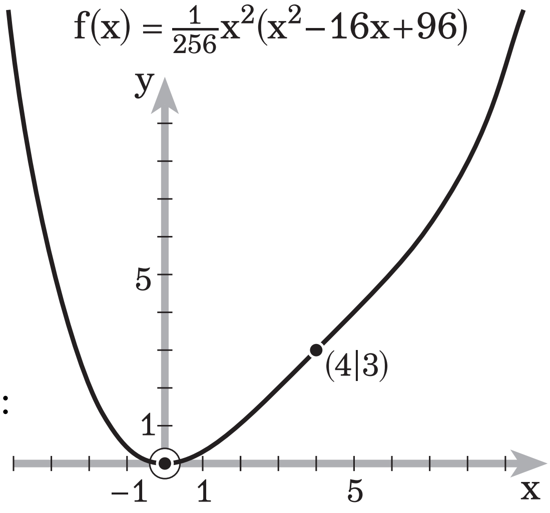
$f'(0) = 0$ und $f''(0) > 0$,

also $W(0|0)$ ist Tiefpunkt

$f''(4) = 0$, 4 ist 2-fache Nullstelle von f'':

$F(4|3)$ ist Flachpunkt

$W_f = [0;+\infty[$



d) $f(x) = \frac{-1}{64}(x^4+8x^3) = \frac{-1}{64}\,x^3(x+8)$

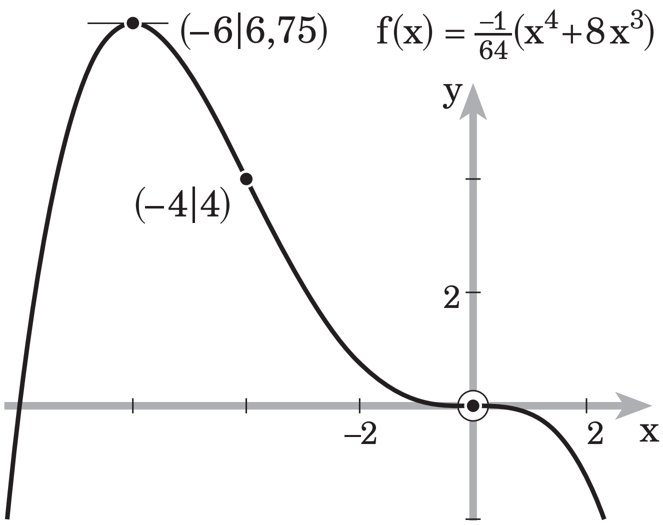
Nullstellen: 0 (3-fach) und −8 (1-fach) $\qquad$ keine Symmetrie zum KOSY

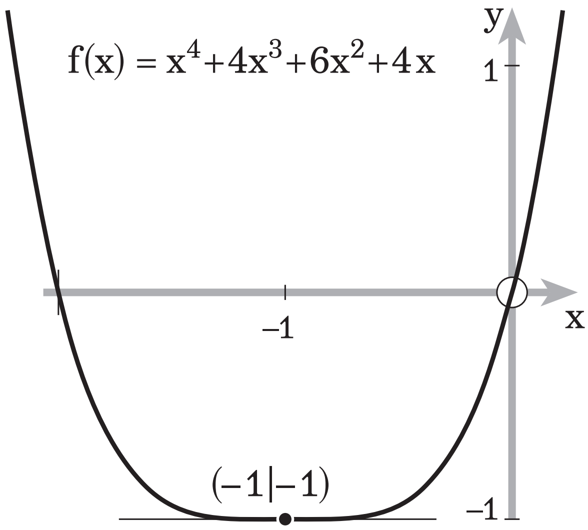
Verhalten: wenn $x \to \pm\infty$, dann $f(x) \to -\infty$

$f'(x) = \frac{-1}{16}(x^3+6x^2) = \frac{-1}{16}\,x^2(x+6)$

$f''(x) = \frac{-3}{16}(x^2+4x) = \frac{-3}{16}x(x+4)$

wegen der 3-fachen Nullstelle 0 ist $W_1(0|0)$ Terrassenpunkt,
also auch Wendepunkt,
$f'(-6) = 0$ und $f''(-6) < 0$, also $W_2(-6|27/4)$ ist Hochpunkt,
$f''(-4) = 0$, -4 ist 1-fache Nullstelle von f'':
$F(-4|4)$ ist Wendepunkt $\qquad W_f =]-\infty;27/4]$



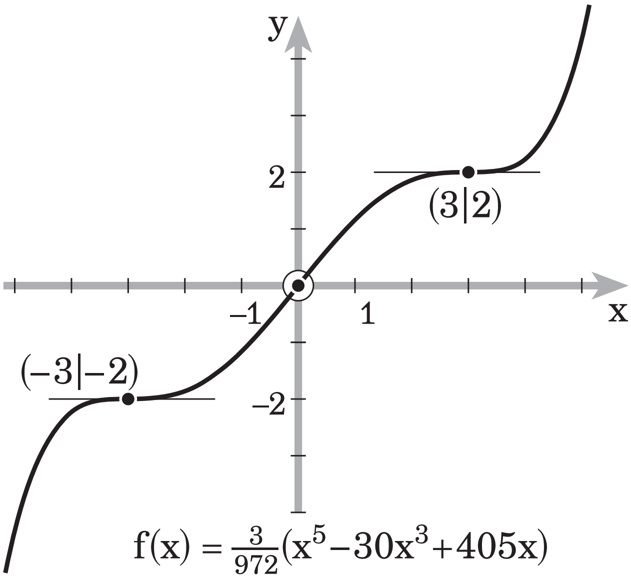


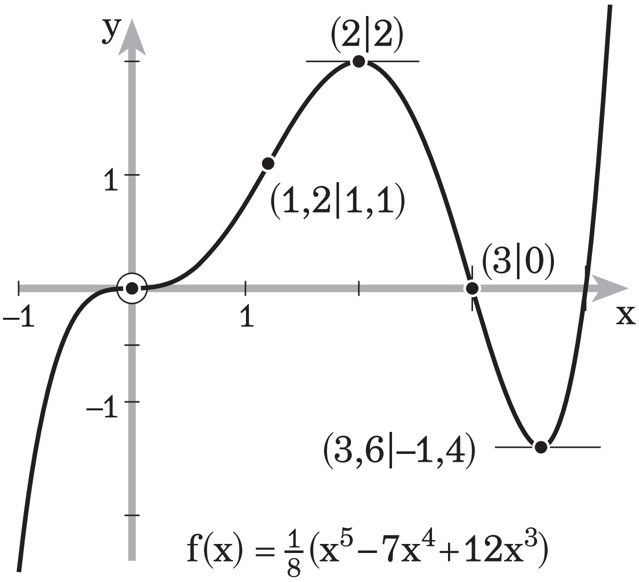
e) $f(x) = x^4+4x^3+6x^2+4x = x(x+2)(x^2+2x+2)$
Nullstellen: 0, –2 (beide 1-fach), keine Symmetrie zum KOSY
Verhalten: wenn $x \to \pm\infty$, dann $f(x) \to +\infty$
$f'(x) = 4x^3+12x^2+12x+4 = 4(x^3+3x^2+3x+1) = 4(x+1)^3$
$f''(x) = 12x^2+24x+12 = 12(x^2+2x+1) = 12(x+1)^2$
$f'(-1) = 0$, -1 ist 3-fache (und einzige) Nullstelle von f',
wegen $f''(-1) = 0$ hilft nur noch eine Monotonie-Überlegung weiter:
links von -1 ist $f'(x) < 0$ wegen $f'(-2) = -4$
rechts von -1 ist $f'(x) > 0$ wegen $f'(0) = 4$,
also ist $W(-1|-1)$ Tiefpunkt
$f''(-1) = 0$, -1 ist 2-fach Nullstelle von f'', bei -1 ändert sich also die Krümmungsart nicht, $W(-1|-1)$ ist Flachpunkt
$W_f = [-1;+\infty[$

3 Alle Polynomfunktionen vom Grad 5 haben $W_f = \mathbb{R}$

a) $f(x) = \frac{1}{324}(x^5-30x^3+405x) = \frac{1}{324}x(x^4-30x^2+405)$
0 ist einzige (1-fache) Nullstelle, Symmetrie zum Ursprung
keine Symmetrie zum KOSY
Verhalten: wenn $x \to \pm\infty$, dann $f(x) \to \pm\infty$
$f'(x) = \frac{5}{324}(x^4-18x^2+81) = \frac{5}{324}(x+3)^2(x-3)^2$
$f''(x) = \frac{5}{81}(x^3-9x) = \frac{5}{81}x(x+3)(x-3)$
wegen der 2-fachen Nullstellen ± 3 von $f''(x)$ sind $W_1(3|2)$ und

$W_2(-3|-2)$ Terrassenpunkte
0 ist 1-fache Nullstelle von $f''(x)$, also ist $(0|0)$ Wendepunkt.





b) $f(x) = \frac{1}{8}(x^5-7x^4+12x^3) = \frac{1}{8}x^3(x^2-7x+12) = \frac{1}{8}x^3(x-3)(x-4)$
Nullstellen: 0 (3-fach), 3 und 4 (beide 1-fach),
keine Symmetrie zum KOSY
Verhalten: wenn $x \rightarrow \pm\infty$, dann $f(x) \rightarrow \pm\infty$

$f'(x) = \frac{1}{8}(5x^4-28x^3+36x^2) = \frac{1}{8}x^2(x-2)(5x-18)$

$f''(x) = \frac{1}{2}x(5x^2-21x+18) = \frac{1}{2}x(x-3)(5x-6)$

wegen der 3-fachen Nullstelle 0 ist $W_1(0|0)$ Terrassenpunkt,
also auch Wendepunkt,
$f'(2) = 0$ und $f''(2) < 0$, also $W_2(2|2)$ ist Hochpunkt,
$f'(3{,}6) = 0$ und $f''(3{,}6) > 0$, also $W_3(3{,}6|\approx -1{,}4)$ ist Tiefpunkt,
3 und 1,2 sind 1-fache Nullstellen von f'':
$F(3|0)$ und $F(1{,}2|\approx 1{,}1)$ sind Wendepunkte

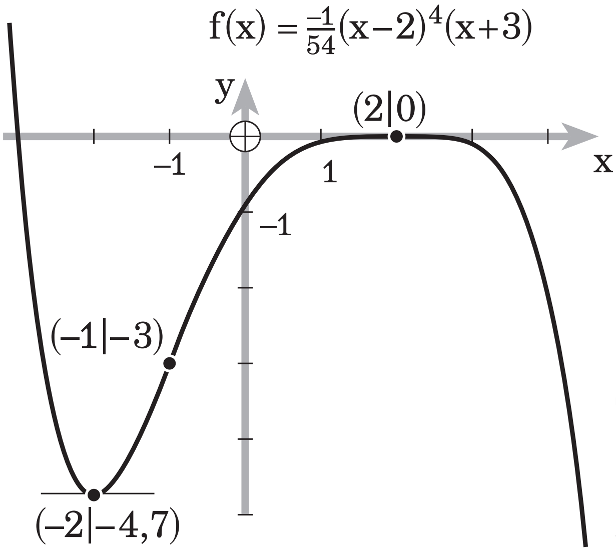
c) $f(x) = \frac{-1}{54}(x-2)^4(x+3) = \frac{-1}{54}(x^5-5x^4+40x^2-80x+48)$
Nullstellen: 2 (4-fach), 3 (1-fach),   keine Symmetrie zum KOSY
Verhalten: wenn $x \rightarrow \pm\infty$, dann $f(x) \rightarrow \mp\infty$

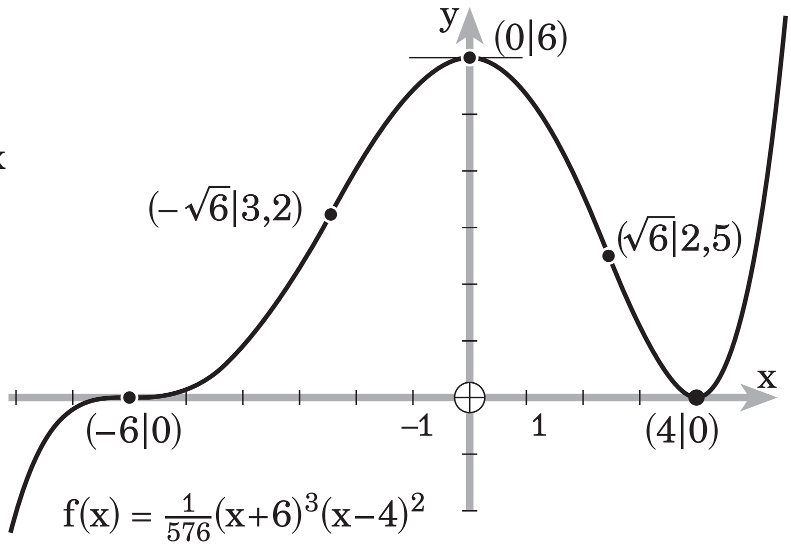
$f'(x) = \frac{-5}{54}(x^4-4x^3+16x-16) = \frac{-5}{54}(x-2)^3(x+2)$

$f''(x) = \frac{-10}{27}(x^3-3x^2+4) = \frac{-10}{27}(x-2)^2(x+1)$

$f'(-2) = 0$ und $f''(-2) > 0$, also $W_1(-2|\approx -4{,}74)$ ist Tiefpunkt,
$f'(2) = 0$ und $f''(2) = 0$, also Monotonie-Überlegung:
für $-2<x<2$ ist $f'(x) > 0$ wegen $f'(0) > 0$
für $x>2$ ist $f'(x) < 0$ wegen $f'(3) < 0$, also ist $W_2(2|0)$ Hochpunkt,
-1 ist 1-fache Nullstelle von f'', also ist $F_1(-1|-3)$ Wendepunkt,

2 ist 2-fache Nullstelle von f'', also ist $F_2(2|0)$ (bloß) Flachpunkt

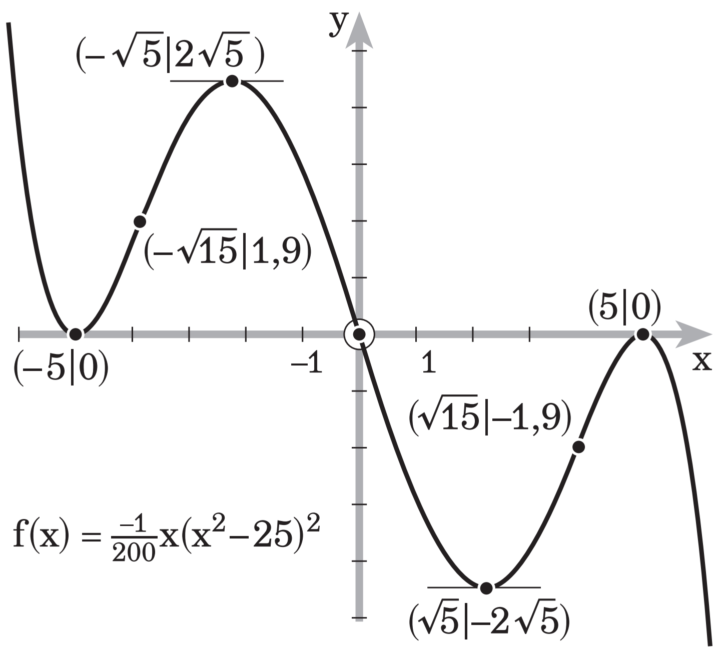


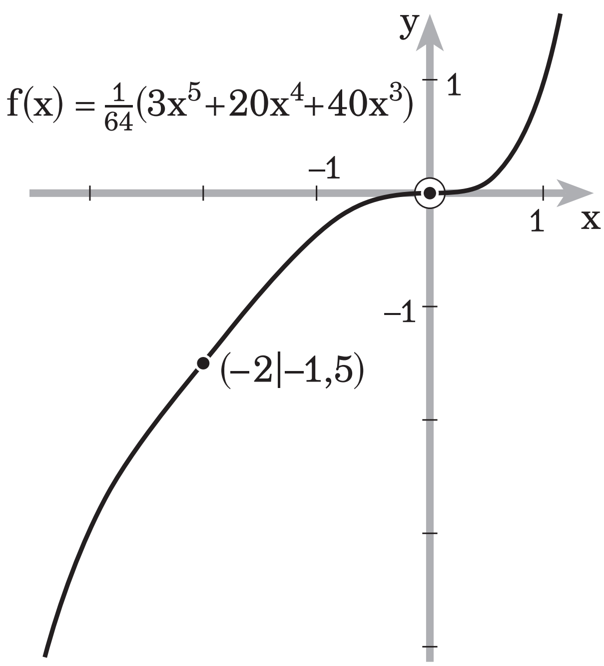


d) $f(x) = \frac{1}{576}(x+6)^3(x-4)^2 = \frac{1}{576}(x^5+10x^4-20x^3-360x^2+3456)$
Nullstellen: –6(3-fach), 4 (2-fach), keine Symmetrie zum KOSY
Verhalten: wenn $x \to \pm\infty$, dann $f(x) \to \pm\infty$
$f'(x) = \frac{5}{576}(x^4+8x^3-12x^2-144x) = \frac{5}{576}x(x-4)(x+6)^2$
$f''(x) = \frac{5}{144}(x^3+6x^2-6x-36) = \frac{5}{144}(x+6)(x^2-6)$
Waagrechtpunkt $W_1(-6|0)$ ist Terrassenpunkt,
weil f' bei –6 das Vorzeichen nicht wechselt
$f'(0) = 0$ und $f''(0) < 0$, also $W_2(0|6)$ ist Hochpunkt,
$f'(4) = 0$ und $f''(4) > 0$, also $W_3(4|0)$ ist Tiefpunkt,
-6, $\sqrt{6}$ und $-\sqrt{6}$ sind 1-fache Nullstellen von f'',
also sind $F_1(-6|0)$, $F_2(-\sqrt{6}\,|\approx 3{,}23)$ und $F_3(\sqrt{6}\,|\approx 2{,}51)$ Wendepunkte

e) $f(x) = \frac{-1}{200}x(x^2-25)^2 = \frac{-1}{200}x(x-5)^2(x+5)^2 = \frac{-1}{200}(x^5-50x^3+625x)$
Nullstellen: 0 (1-fach), ±5 (beide 2-fach),
Symmetrie zum Ursprung
Verhalten: wenn $x \to \pm\infty$, dann $f(x) \to \mp\infty$
$f'(x) = \frac{-1}{40}(x^4-30x^2+125) = \frac{-1}{40}(x^2-25)(x^2-5)$
$= \frac{-1}{40}(x-5)(x+5)(x^2-5)$
$f''(x) = \frac{-1}{10}(x^3-15x) = \frac{-1}{10}x(x^2-15)$

$f'(5) = 0$ und $f''(5) < 0$, also $W_1(5|0)$ ist Hochpunkt,
wegen Punktsymmetrie ist $W_2(-5|0)$ Tiefpunkt,
$f'(\sqrt{5}) = 0$ und $f''(\sqrt{5}) > 0$, also $W_3(\sqrt{5}\,|-2\sqrt{5})$ ist Tiefpunkt,
wegen Punktsymmetrie ist $W_4(-\sqrt{5}\,|2\sqrt{5})$ Hochpunkt
0, $\sqrt{15}$ und $-\sqrt{15}$ sind 1-fache Nullstellen von f'',
also sind $F_1(\sqrt{15}\,|\approx -1{,}93)$, $F_2(-\sqrt{15}\,|\approx 1{,}93)$ und $F_3(0|0)$ Wendepunkte





f) $f(x) = \frac{1}{64}(3x^5 + 20x^4 + 40x^3) = \frac{1}{64}x^3(3x^2 + 20x + 40)$

Nullstellen: 0 (3-fach), keine Symmetrie zum KOSY

Verhalten: wenn $x \to \pm\infty$, dann $f(x) \to \pm\infty$

$f'(x) = \frac{5}{64}(3x^4 + 16x^3 + 24x^2) = \frac{5}{64}x^2(3x^2 + 16x + 24)$

$f''(x) = \frac{15}{16}(x^3 + 4x^2 + 4x) = \frac{15}{16}x(x + 2)^2$

(einziger) Waagrechtpunkt W(0|0) ist Terrassenpunkt,
weil f' bei 0 das Vorzeichen nicht wechselt
F(–2|–1,5) ist bloß Flachpunkt,
weil f'' bei –2 das Vorzeichen nicht wechselt

4 a) $f(x) = \frac{1}{1024}(x^2 - 20)^3 = \frac{1}{1024}(x^6 - 60x^4 + 1200x^2 - 8000)$

Nullstellen: $\pm\sqrt{20}$ (beide 3-fach), Symmetrie zur y-Achse

Verhalten: wenn $x \to \pm\infty$, dann $f(x) \to +\infty$

$f'(x) = \frac{3}{512}(x^5 - 40x^3 + 400x) = \frac{3}{512}x(x^2 - 20)^2$

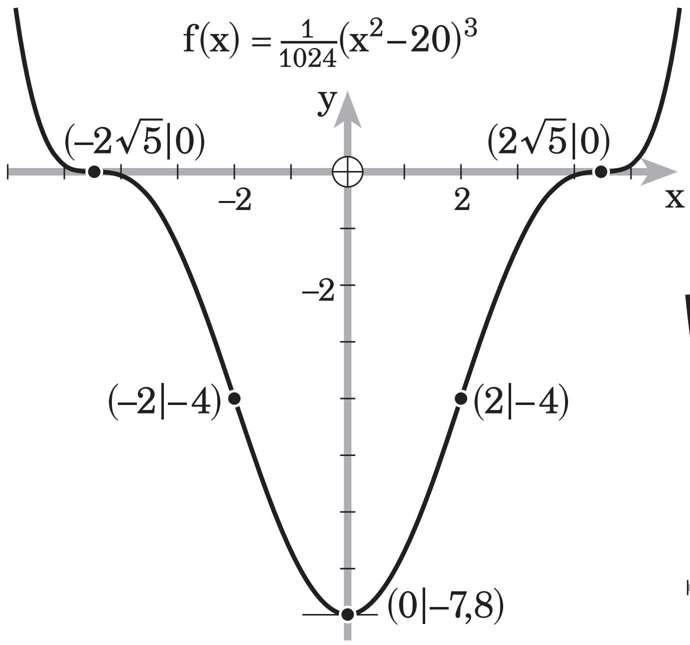
$f''(x) = \frac{15}{512}(x^4 - 24x^2 + 80) = \frac{15}{512}(x^2 - 20)(x + 2)(x - 2)$

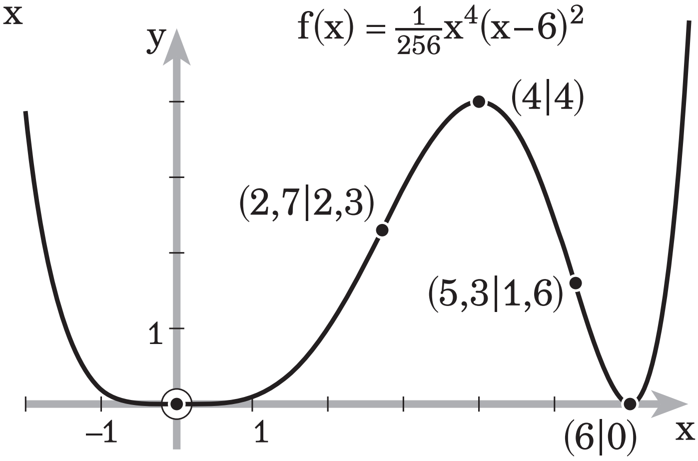
$\pm\sqrt{20}$ sind 2-fache Nullstellen von f'(x), also sind $W_1(2\sqrt{5}|0)$ und $W_2(-2\sqrt{5}|0)$ Terrassenpunkte

$f'(0) = 0$ und $f''(0) > 0$, also ist $W_3(0|\approx -7{,}81)$ Tiefpunkt

± 2 sind 1-fache Nullstellen von f''(x), also sind $F_1(2|-4)$ und $F_2(-2|-4)$ Wendepunkte

Wertemenge: $W_f = [-\frac{125}{16};+\infty[$





b) $f(x) = \frac{1}{256}x^4(x-6)^2 = \frac{1}{256}(x^6 - 12x^5 + 36x^4)$

wegen $f(x) \geqq 0$ ist $W_f = [0;+\infty[$

0 ist 4-fache, 6 ist 2-fache Nullstelle, keine Symmetrie zum KOSY

Verhalten: wenn $x \to \pm\infty$, dann $f(x) \to +\infty$

$f'(x) = \frac{3}{128}(x^5 - 10x^4 + 24x^3) = \frac{3}{128}x^3(x-4)(x-6)$

$f''(x) = \frac{3}{128}(5x^4 - 40x^3 + 72x^2) = \frac{3}{128}x^2(5x^2 - 40x + 72)$

wegen $f(x) \geqq 0$ sind $W_1(0|0)$ und $W_2(6|0)$ Tiefpunkte

$f'(4) = 0$ und $f''(4) < 0$, also ist $W_3(4|4)$ Hochpunkt

$f''(x) = 0$: $5x^2 - 40x + 72 = 0 \Rightarrow x = 4 \pm \frac{2}{5}\sqrt{10}$, $x_1 \approx 2{,}7 \quad x_2 \approx 5{,}3$

x_1 und x_2 sind 1-fache Nullstellen von f'', sind also Wendestellen

$F_1(\approx 2{,}7|\approx 2{,}3)$ und $F_2(\approx 5{,}3|\approx 1{,}6)$ sind Wendepunkte.

c) $f(x) = \frac{-1}{256}(5x^6 + 42x^5 + 90x^4) = \frac{-1}{256}x^4(5x^2 + 42x + 90)$

0 ist 4-fache Nullstelle, keine Symmetrie zum KOSY

Verhalten: wenn $x \to \pm\infty$, dann $f(x) \to -\infty$

$f'(x) = \frac{-15}{128}(x^5 + 7x^4 + 12x^3) = \frac{-15}{128}x^3(x+4)(x+3)$

$f''(x) = \frac{-15}{128}(5x^4 + 28x^3 + 36x^2) = \frac{-15}{128}x^2(x+2)(5x+18)$

0 ist 3-fache Nullstelle von $f'(x)$, rechts von 0 ist $f'(x) < 0$,
also ist $W_1(0|0)$ Hochpunkt und Flachpunkt

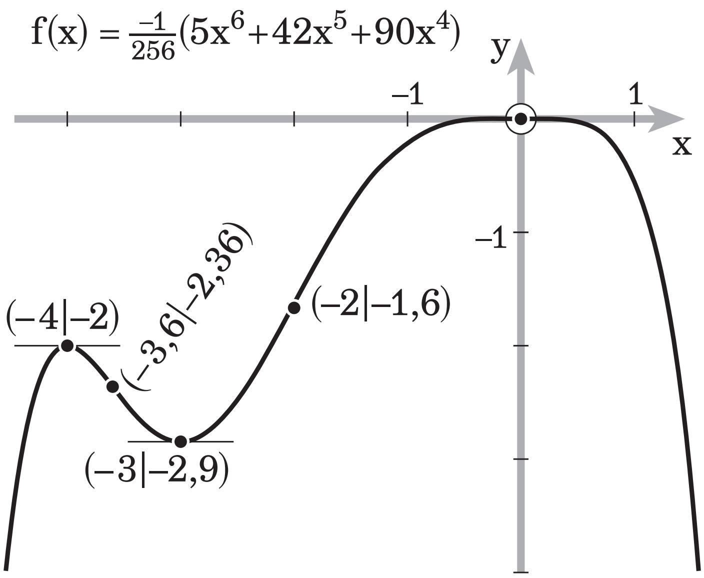
$f'(-4) = 0$ und $f''(-4) < 0$, also ist $W_2(-4|-2)$ Hochpunkt,

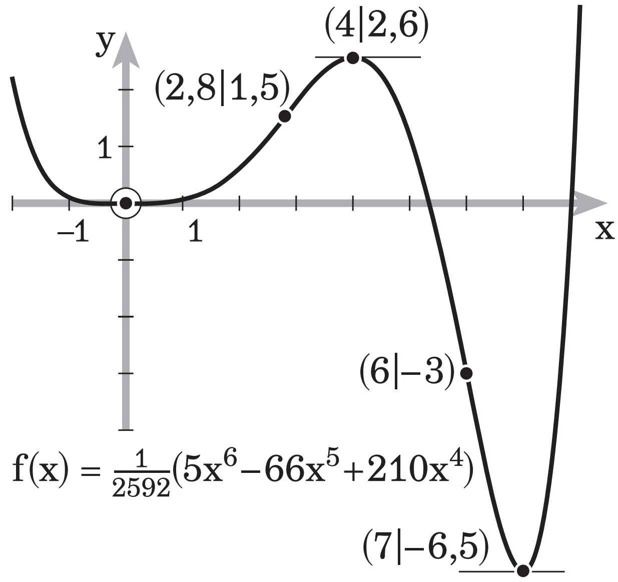
$f'(-3) = 0$ und $f''(-3) > 0$, also ist $W_3(-3|\approx -2{,}85)$ Tiefpunkt,

–2 und –3,6 sind 1-fache Nullstellen von $f''(x)$, also Wendestellen

$F_1(-2|-1{,}625)$ und $F_2(-3{,}6|\approx -2{,}36)$ sind Wendepunkte,

$W_1(0|0)$ ist höchster Hochpunkt, deshalb ist $W_f =]-\infty;0]$





d) $f(x) = \frac{1}{2592}(5x^6 - 66x^5 + 210x^4) = \frac{1}{2592}x^4(5x^2 - 66x + 210)$
Nullstellen: 0 (4-fach), ≈5,35 und ≈7,85 (beide 1-fach),
keine Symmetrie zum KOSY
Verhalten: wenn $x \to \pm\infty$, dann $f(x) \to +\infty$
$f'(x) = \frac{5}{432}(x^5 - 11x^4 + 28x^3) = \frac{5}{432}x^3(x-4)(x-7)$
$f''(x) = \frac{5}{432}(5x^4 - 44x^3 + 84x^2) = \frac{5}{432}x^2(x-6)(5x-14)$
0 ist 3-fache Nullstelle von $f'(x)$, links von 0 ist $f'(x)<0$, also ist
$W_1(0|0)$ Tiefpunkt und Flachpunkt
$f'(4) = 0$ und $f''(4)<0$, also ist $W_2(4|\approx 2{,}57)$ Hochpunkt,
$f'(7) = 0$ und $f''(7)>0$, also ist $W_2(7|\approx -6{,}48)$ Tiefpunkt,
6 und 2,8 sind 1-fache Nullstellen von $f''(x)$, also Wendestellen
$F_1(6|-3)$ und $F_2(2{,}8|\approx 1{,}53)$ sind Wendepunkte,
$W_2(7|f(7))$ ist tiefster Tiefpunkt, deshalb ist $W_f = [f(7);+\infty[$

e) $f(x) = \frac{-1}{100}(x^6 - 30x^4 + 225x^2) = \frac{-1}{100}x^2(x^4 - 30x^2 + 225)$
$= \frac{-1}{100}x^2(x^2 - 15)^2$
wegen $f(x) \leqq 0$ ist $W_f =]-\infty;0]$
Nullstellen: $0, \pm\sqrt{15}$ (alle 2-fach), Symmetrie zur y-Achse
Verhalten: wenn $x \to \pm\infty$, dann $f(x) \to -\infty$
$f'(x) = \frac{-3}{50}x(x^4 - 20x^2 + 75) = \frac{-3}{50}x(x^2-5)(x^2-15)$
$f''(x) = \frac{-3}{10}(x^4 - 12x^2 + 15)$
wegen $f(x) \leqq 0$ sind alle Nullstellen von $f(x)$ zugleich auch die x-Werte von
Hochpunkten: $W_1(0|0)$, $W_2(-\sqrt{15}|0)$, $W_3(\sqrt{15}|0)$
$f'(\pm\sqrt{5}) = 0$ und $f''(\pm\sqrt{5})>0$, also Tiefpunkte: $W_2(-\sqrt{5}|-5)$, $W_2(\sqrt{5}|-5)$

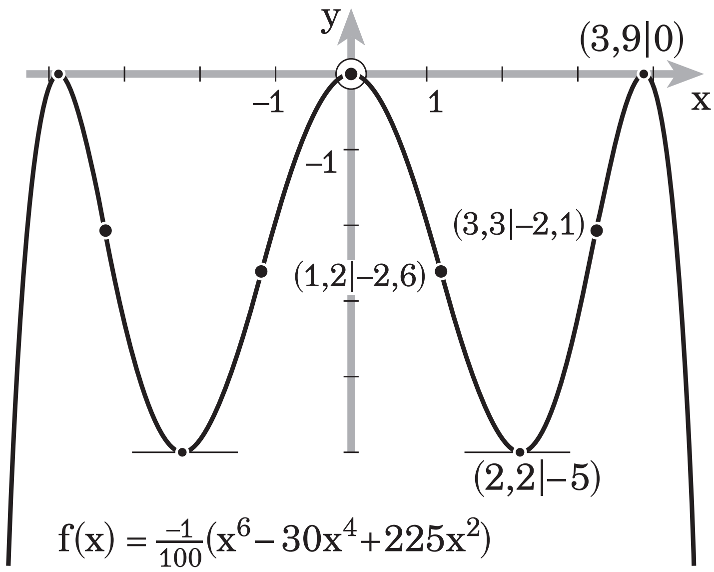
Flachstellen: $x^4 - 12x^2 + 15 = 0$, $D = 144 - 60 = 84 = 4\cdot 21$

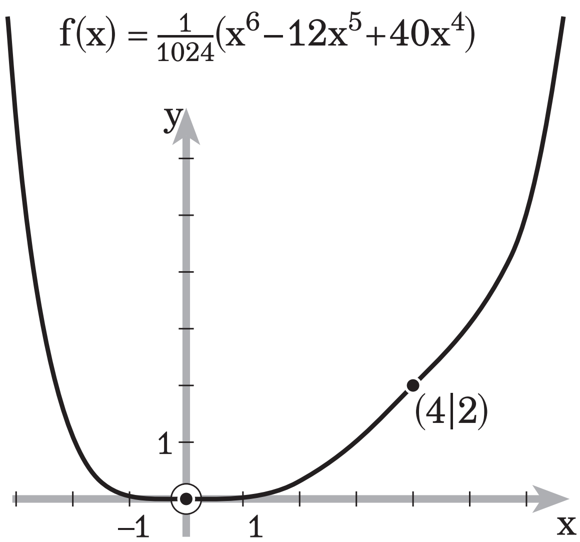
$x^2 = 6 \pm \sqrt{21}$, $\quad x = \pm\sqrt{6 \pm \sqrt{21}}$

weil es 4 Flachstellen gibt, sind diese alle 1-fache Nullstellen von f''(x), sind diese alle Wendestellen

Wendepunkte: $F_1(\sqrt{6-\sqrt{21}}\,|{-2{,}61})$, $F_2(\sqrt{6+\sqrt{21}}\,|{-2{,}07})$,

$F_3(-\sqrt{6-\sqrt{21}}\,|{-2{,}61})$, $F_4(-\sqrt{6+\sqrt{21}}\,|{-2{,}07})$





f) $f(x) = \frac{1}{1024}(x^6 - 12x^5 + 40x^4) = \frac{1}{1024}x^4(x^2 - 12x + 40)$

0 ist 4-fache und einzige Nullstelle, deshalb ist (0|0) Tiefpunkt und auch Flachpunkt und $W_f = [0;+\infty[$,

keine Symmetrie zum KOSY

$f'(x) = \frac{1}{512}(3x^5 - 30x^4 + 80x^3) = \frac{1}{512}x^3(3x^2 - 30x + 80)$

$f''(x) = \frac{15}{512}(x^4 - 8x^3 + 16x^2) = \frac{15}{512}x^2(x-4)^2$

einziger Waagrechtpunkt ist der Tief- und Flachpunkt (0|0), die Flachstelle 4 ist 2-fache Nullstelle von f''(x), also ist F(4|2) bloß Flachpunkt.

◊5 Gegeben sind $f(x) = \frac{1}{18}(x+2)(x-4)^2$ und $g(x) = 2x$

a) Bestimme die Tangenten von G_f, die parallel sind zu g.

$f(x) = \frac{1}{18}(x+2)(x-4)^2 = \frac{1}{18}(x^3 - 6x^2 + 32)$

$f'(x) = \frac{1}{18}(3x^2 - 12x) = \frac{1}{6}(x^2 - 4x) = \frac{1}{6}x(x-4)$

Bedingung: $f'(x) = 2$, denn 2 ist die Steigung von g

$\frac{1}{6}(x^2 - 4x) = 2 \;\Rightarrow\; x^2 - 4x - 12 = 0$

$(x-6)(x+2) = 0 \;\Rightarrow\; x = 6$ oder $x = -2$

Berührpunkte: $B_1(6|f(6)) = B_1(6|\frac{16}{9})$, $B_2(-2|f(-2)) = B_2(-2|0)$

Tangenten: $t_1(x) = 2x - \frac{92}{9}$, $t_2(x) = 2x + 4$

b) Bestimme die Tangenten von G_f, die senkrecht sind zu g.

Bedingung: $f'(x) = \frac{-1}{2}$, denn $\frac{-1}{2}$ ist Steigung der Gerade senkrecht g

$\frac{1}{6}(x^2 - 4x) = \frac{-1}{2} \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$

$(x-1)(x-3) = 0 \Rightarrow x = 1$ oder $x = 3$

Berührpunkte: $B_1(1|f(1)) = B_1(1|1{,}5)$, $B_2(3|f(3)) = B_2(3|\frac{5}{18})$

Tangenten: $t_1(x) = -\frac{1}{2}x + 2$, $t_2(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{16}{9}$

6 Gegeben sind $f(x) = \frac{-1}{10}(x+4)(x-2)^2$ und $g(x) = \frac{2}{3}x$

a) Bestimme die Normalen von G_f, die parallel sind zu g.

$f(x) = \frac{-1}{10}(x+4)(x-2)^2 = \frac{-1}{10}(x^3 - 12x + 16)$

$f'(x) = \frac{-1}{10}(3x^2 - 12) = \frac{-3}{10}(x^2 - 4) = \frac{-3}{10}(x-2)(x+2)$

Bedingung: $f'(x) = -\frac{3}{2}$, denn $-\frac{3}{2}$ ist Steigung der Tangente senkrecht g

$\frac{-3}{10}(x^2 - 4) = -\frac{3}{2} \Rightarrow x^2 - 4 = 5 \Rightarrow x = \pm 3$

Berührpunkte: $B_1(3|f(3)) = B_1(3|-0{,}7)$, $B_2(-3|f(-3)) = B_2(-3|-2{,}5)$

Normalen: $n_1(x) = \frac{2}{3}x - \frac{27}{10}$, $n_2(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}$

b) Bestimme die Normalen von G_f, die senkrecht sind zu g.

Bedingung: $f'(x) = \frac{2}{3}$

$\frac{-3}{10}(x^2 - 4) = \frac{2}{3} \Rightarrow x^2 - 4 = -\frac{20}{9} \Rightarrow x = \pm\frac{4}{3}$

Berührpunkte: $B_1(\frac{4}{3}|f(\frac{4}{3})) = B_1(\frac{4}{3}|\frac{-32}{135})$, $B_2(-\frac{4}{3}|f(-\frac{4}{3})) = B_2(-\frac{4}{3}|-\frac{80}{27})$

Normalen: $n_1(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{238}{135}$, $n_2(x) = -\frac{3}{2}x - \frac{134}{27}$

7 $f(x) = \frac{1}{16}x(x^2 - 12)$

a) $f(x) = \frac{1}{16}x(x^2 - 12) = \frac{1}{16}(x^3 - 12x)$ $f'(x) = \frac{3}{16}(x^2 - 4)$

G_f ist symmetrisch zum Ursprung, deshalb ist $(0|0)$ Wendepunkt

Steigung der Wendetangente: $m_t = f'(0) = -\frac{3}{4}$

Wendetangente t: $t(x) = m_t x = -\frac{3}{4}x$

b) Steigung der Wendenormale: $m_n = -1/m_t = \frac{4}{3}$

Wendenormale n: $n(x) = m_n x = \frac{4}{3}x$

Schnitt von G_f und n: $\frac{1}{16}(x^3 - 12x) = \frac{4}{3}x \Rightarrow x(3x^2 - 100) = 0$

Schnittstellen: $x = 0$ oder $x = \pm\frac{10}{3}\sqrt{3}$

Schnittpunkte: $(0|0)$ $\left(\frac{10}{3}\sqrt{3}\,|\,\frac{40}{9}\sqrt{3}\right)$ $\left(-\frac{10}{3}\sqrt{3}\,|-\frac{40}{9}\sqrt{3}\right)$

c) In $(0|0)$ schneiden sich G_f und n rechtwinklig.
Steigungen in Schnittstelle $\frac{10}{3}\sqrt{3}$: $m_n = \frac{4}{3}$ $m = f'\left(\frac{10}{3}\sqrt{3}\right) = \frac{1}{2}$

Schnittwinkel φ dort: $\tan\varphi = \left|\frac{m - m_n}{1 + m\cdot m_n}\right| = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 26{,}57°$

8 $f(x) = \frac{-1}{32}(x^4 - 18x^2 + 17) = \frac{-1}{32}(x-1)(x+1)(x^2-17)$

$f'(x) = -\frac{1}{8}(x^3 - 9x) = -\frac{1}{8}x(x-3)(x+3)$

Berührpunkt $B(1|f(1)) = B(1|0)$
Tangentensteigung: $m = f'(1) = 1$ Tangente: $t(x) = x - 1$
Schnitt von G_f und t: $\frac{-1}{32}(x^4 - 18x^2 + 17) = x - 1 \Rightarrow x^4 - 18x^2 + 32x - 15 = 0$
weil 1 Berührstelle ist, muss die linke Seite ein Produkt sein
$(x-1)^2 g(x) = 0$; Polynomdivision ergibt
$g(x) = (x^4 - 18x^2 + 32x - 15):(x-1)^2 = x^2 + 2x - 15 = (x+5)(x-3)$
die Nullstellen von g(x) sind die restlichen Schnittstellen: −5 und 3
Schnittpunkte: $S_1(-5|g(-5)) = S_1(-5|-6)$, $S_2(3|g(3)) = S_2(3|2)$, $S_3 = B(1|0)$
Schnittwinkel φ: im Berührpunkt B ist $\varphi_3 = 0°$
in S_2 ist $f'(3) = 0$, S_2 ist also Waagrechtpunkt, $\varphi_2 = 45°$
in S_1 ist $f'(-5) = m_1 = 10$, $m = 1$

$\tan\varphi_1 = \left|\frac{m - m_1}{1 + m\cdot m_1}\right| = \frac{9}{11} \Rightarrow \varphi_1 = 39{,}29°$

9 $f(x) = x^4 - 2x^2 - x = x(x+1)(x^2 - x - 1)$, $g(x) = -x - 2$

a) $f'(x) = 4x^3 - 4x - 1$
Bedingung: $f'(x) = -1$ (Kurvensteigung = Tangentensteigung = −1)
$4x^3 - 4x - 1 = -1 \Rightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0$ oder $x = \pm 1$
Tangente durch $(0|0)$: $t_1(x) = -x$
Tangente durch $(1|f(1)) = (1|-2)$: $t_2(x) = -x - 1$
Tangente durch $(-1|f(-1)) = (1|0)$: $t_3(x) = -x - 1 = t_2(x)$

b) $P(a|f(a)) = P(a|a^4 - 2a^2 - a)$ $Q(a|g(a)) = Q(a|-a-2)$
$\overline{PQ} = d(a) = |f(a) - g(a)| = |a^4 - 2a^2 + 1| = |(a^2-1)^2| = (a^2-1)^2$
$\overline{PQ}$ hat den kleinsten Wert 0 (absolut), falls $a = \pm 1$
$d'(a) = 4a^3 - 4a = 4a(a^2 - 1) = 0 \Rightarrow a = 0$ oder $a = \pm 1$ (schon erledigt)
für a=0 hat d(a) ein Extremum: es ist ein Maximum, weil das Minimum schon vergeben ist (a=±1); das Maximum ist relativ, weil d(a) beliebig groß sein kann.

10 Kurvenpunkte, die auf einer waagrechten Tangente der Kurve liegen:

a) $f(x) = -x^3 - 6x^2 + 135x$
$f'(x) = -3x^2 - 12x + 135 = -3(x^2 + 4x + 45) = -3(x + 9)(x - 5)$
Waagrechtstellen: $f'(x) = 0 \Rightarrow x = -9$ oder $x = 5$
Waagrechtpunkte: $(-9|f(-9)) = (-9|-972)$ und $(5|f(5)) = (5|400)$

Waagrechte Tangente $y = -972$ geschnitten mit Kurve:
$-x^3 - 6x^2 + 135x = -972 \Rightarrow x^3 + 6x^2 - 135x - 972 = 0$
-9 ist Berührstelle, also 2-fache Schnittstelle; deswegen muss die linke Seite ein Produkt sein, das den Faktor $(x+9)^2$ hat:
$(x^3 + 6x^2 - 135x - 972) : (x^2 + 18x + 81) = x - 12$,
also: $x^3 + 6x^2 - 135x - 972 = (x^2 + 18x + 81)(x - 12)$
das heißt, 12 ist Schnittstelle von Kurve und Tangente $y = -972$,
auf der Tangente $y = -972$ liegen der Berührpunkt $(-9|-972)$
und der Schnittpunkt $(12|-972)$.

Waagrechte Tangente $y = 400$ geschnitten mit Kurve:
$-x^3 - 6x^2 + 135x = 400 \Rightarrow x^3 + 6x^2 - 135x + 400 = 0$
5 ist Berührstelle, also 2-fache Schnittstelle; deswegen muss die linke Seite ein Produkt sein, das den Faktor $(x-5)^2$ hat:
$(x^3 + 6x^2 - 135x + 400) : (x^2 - 10x + 25) = x + 16$,
also: $x^3 + 6x^2 - 135x + 400 = (x^2 - 10x + 25)(x + 16)$
das heißt, -16 ist Schnittstelle von Kurve und Tangente $y = 400$,
auf der Tangente $y = 400$ liegen der Berührpunkt $(5|400)$
und der Schnittpunkt $(-16|400)$.

b) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2$
$f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 36x = 4x(x^2 - 6x + 9) = 4x(x - 3)^2$
3 ist 2-fache Nullstelle von $f'(x)$,
3 ist also x-Wert eines Terrassenpunkts $(3|f(3)) = (3|27)$,
waagrechte Tangente $y = 27$ geschnitten mit Kurve:
$x^4 - 8x^3 + 18x^2 = 27 \Rightarrow x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 27 = 0$
3 ist (2-fache) Berührstelle, also 3-fache Schnittstelle; deswegen muss die linke Seite ein Produkt sein, das den Faktor $(x-3)^3$ hat,
freilich auch den Faktor $(x-3)^2$, mit dem gehts schneller:
$(x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 27) : (x^2 - 6x + 9) = x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$,
also: $x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 27 = (x + 1)(x-3)^3$,
das heißt, -1 ist Schnittstelle von Kurve und Tangente $y = 27$,
auf der Tangente $y = 27$ liegen der Terrassenpunkt $(3|27)$
und der Schnittpunkt $(-1|27)$.

11 **a)** $f(x) = \frac{1}{27}(x^3 + 18x^2 + 81x) = \frac{1}{27}x(x^2 + 18x + 81) = \frac{1}{27}x(x + 9)^2$
Die x-Axe berührt in $(-9|0)$ und schneidet in $(0|0)$.
$f'(x) = \frac{1}{27}(3x^2 + 36x + 81) = \frac{1}{9}(x^2 + 12x + 27) = \frac{1}{9}(x + 9)(x + 3)$

Die Tangente t in $(0|0)$ hat die Steigung $f'(0) = 3$,
also die Gleichung $t(x) = 3x$
Schnitt Tangente-Kurve: $\frac{1}{27}(x^3 + 18x^2 + 81x) = 3x$
$\Rightarrow\ x^3 + 18x^2 = 0 \ \Rightarrow\ x^2(x + 18) = 0 \ \Rightarrow\ x = -18$
t schneidet f in $(-18|t(-18)) = (-18|-54)$.

b) $f(x) = \frac{1}{9}(x^3 - 6x^2 - 135x) = \frac{1}{9}x(x^2 - 6x - 135) = \frac{1}{9}x(x - 15)(x + 9)$
Die Achsenpunkte: $A(0|0)$, $B(15|0)$ und $C(-9|0)$ sind Berührpunkte.
$f'(x) = \frac{1}{9}(3x^2 - 12x - 135) = \frac{1}{3}(x^2 - 4x - 45) = \frac{1}{3}(x - 9)(x + 5)$

Tangente a in $A(0|0)$ hat Steigung $m = f'(0) = -15$,
Gleichung von a: $y = a(x) = -15x$
Tangente a geschnitten mit Kurve: $\frac{1}{9}(x^3 - 6x^2 - 135x) = -15x$
$\Rightarrow x^3 - 6x^2 = 0 \ \Rightarrow\ x^2(x - 6) = 0$
Tangente a schneidet die Kurve in $(6|a(6)) = (6|-90)$.

Tangente b in $B(15|0)$ hat Steigung $m = f'(15) = 40$,
Gleichung von b: $y = b(x) = 40x - 600$
Tangente b geschnitten mit Kurve: $\frac{1}{9}(x^3 - 6x^2 - 135x) = 40x - 600$
$\Rightarrow x^3 - 6x^2 - 135x = 360x - 5400 \ \Rightarrow\ x^3 - 6x^2 - 495x + 5400 = 0$,
15 ist Berührstelle, also 2-fache Schnittstelle,
$x^3 - 6x^2 - 495x + 5400$ muss den Faktor $(x - 15)^2$ enthalten
$(x^3 - 6x^2 - 495x + 5400) : (x^2 - 30x + 225) = x + 24$,
also: $x^3 - 6x^2 - 495x + 5400 = (x + 24)(x^2 - 30x + 225)$
Tangente b schneidet die Kurve in $(-24|b(-24)) = (-24|-1560)$.

Tangente c in $C(-9|0)$ hat Steigung $m = f'(-9) = 24$,
Gleichung von c: $y = c(x) = 24x + 216$
Tangente c geschnitten mit Kurve: $\frac{1}{9}(x^3 - 6x^2 - 135x) = 24x + 216$
$\Rightarrow x^3 - 6x^2 - 135x = 216x + 1944 \ \Rightarrow\ x^3 - 6x^2 - 351x - 1944 = 0$,
-9 ist Berührstelle, also 2-fache Schnittstelle,
$x^3 - 6x^2 - 351x - 1944$ muss den Faktor $(x + 9)^2$ enthalten
$(x^3 - 6x^2 - 351x - 1944) : (x^2 + 18x + 81) = x - 24$,
also: $x^3 - 6x^2 - 351x - 1944 = (x - 24)(x^2 + 18x + 81)$
Tangente c schneidet die Kurve in $(24|c(24)) = (24|792)$.

12 Kurvenpunkte, die auf einer Wendetangente der Kurve liegen:

a) $f(x) = \frac{1}{16}(x^4 + 16x^3 + 72x^2) = \frac{1}{16}x^2(x^2 + 16x + 72)$
$f'(x) = \frac{1}{4}(x^3 + 12x^2 + 36x) = \frac{1}{4}x(x + 6)^2$
$f''(x) = \frac{3}{4}(x^2 + 8x + 12) = \frac{3}{4}(x + 6)(x + 2)$
-6 und -2 sind 1-fache Nullstellen von $f''(x)$, also Wendestellen
Wendepunkte: $(-6|f(-6)) = (-6|\ 27)$ und $(-2|f(-2)) = (-2|11)$

Wendetangente a in (–6| 27) hat Steigung $m = f'(-6) = 0$,

Gleichung von a: $y = a(x) = 27$

Schnitt von Kurve und a: $\frac{1}{16}(x^4 + 16x^3 + 72x^2) = 27$

$x^4 + 16x^3 + 72x^2 = 432 \Rightarrow x^4 + 16x^3 + 72x^2 - 432 = 0$

-6 ist Wendestelle, also 3-fache Schnittstelle; deswegen muss die linke Seite ein Produkt sein, das den Faktor $(x+6)^3$ hat,

freilich auch den Faktor $(x+6)^2$, mit dem gehts schneller:

$(x^4 + 16x^3 + 72x^2 - 432) : (x^2 + 12x + 36) = x^2 + 4x - 12 = (x + 6)(x - 2)$,

also: $x^4 + 16x^3 + 72x^2 - 432 = (x - 2)(x + 6)^3$,

Schnittpunkt von a und Kurve ist $(2|a(2)) = (2|27)$

Wendetangente b in (–2| 11): $y = b(x) = -8x - 5$

Schnitt von Kurve und b: $\frac{1}{16}(x^4 + 16x^3 + 72x^2) = -8x - 5$

$x^4 + 16x^3 + 72x^2 = -128x - 80 \Rightarrow x^4 + 16x^3 + 72x^2 + 128x + 80 = 0$

-2 ist Wendestelle, also 3-fache Schnittstelle:

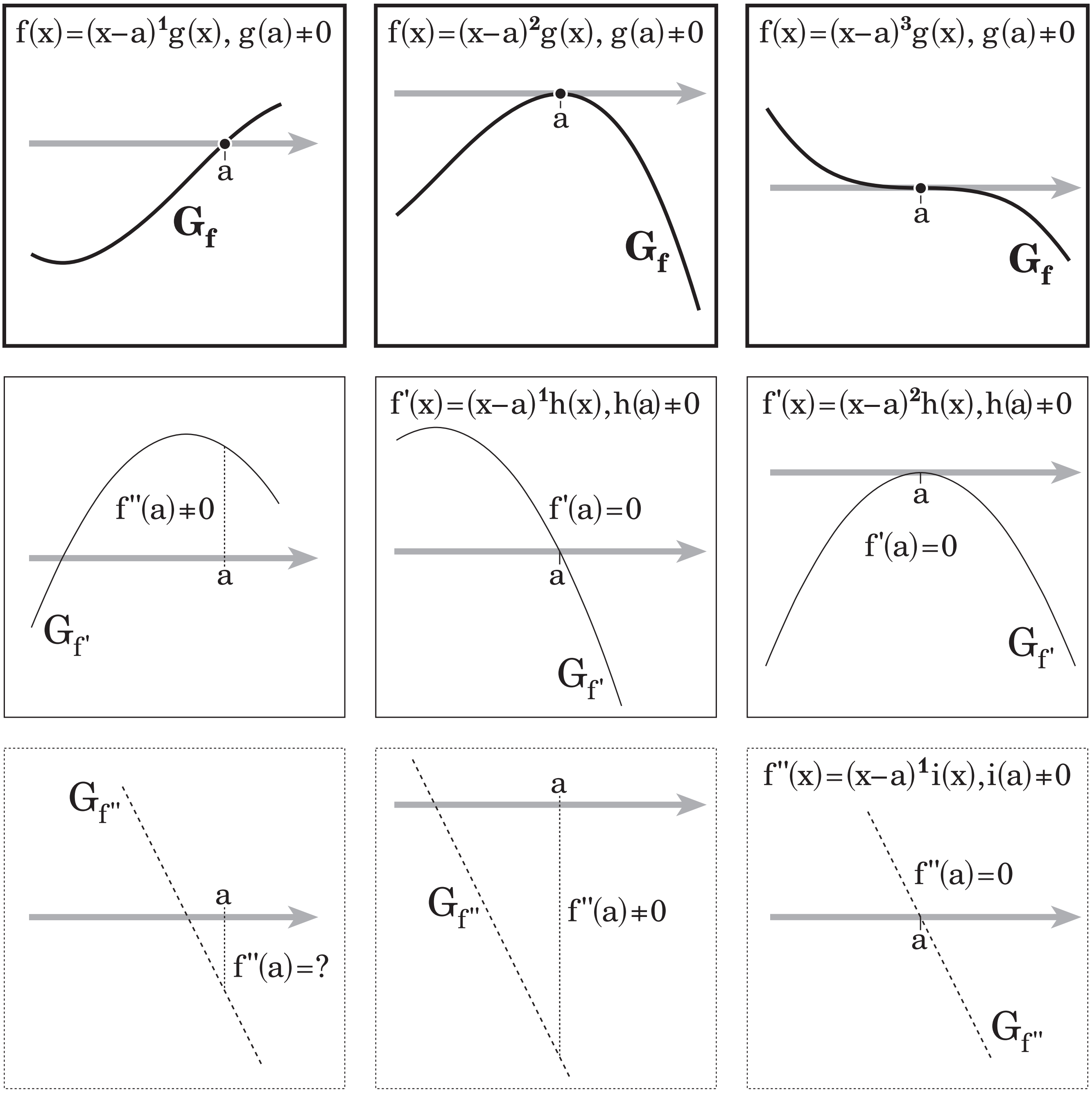
$(x^4+16x^3+72x^2+128x+80) : (x^2+4x+4) = x^2+12x+20 = (x+10)(x+2)$

also: $x^4 + 16x^3 + 72x^2 + 128x + 80 = (x + 10)(x + 2)^3$,

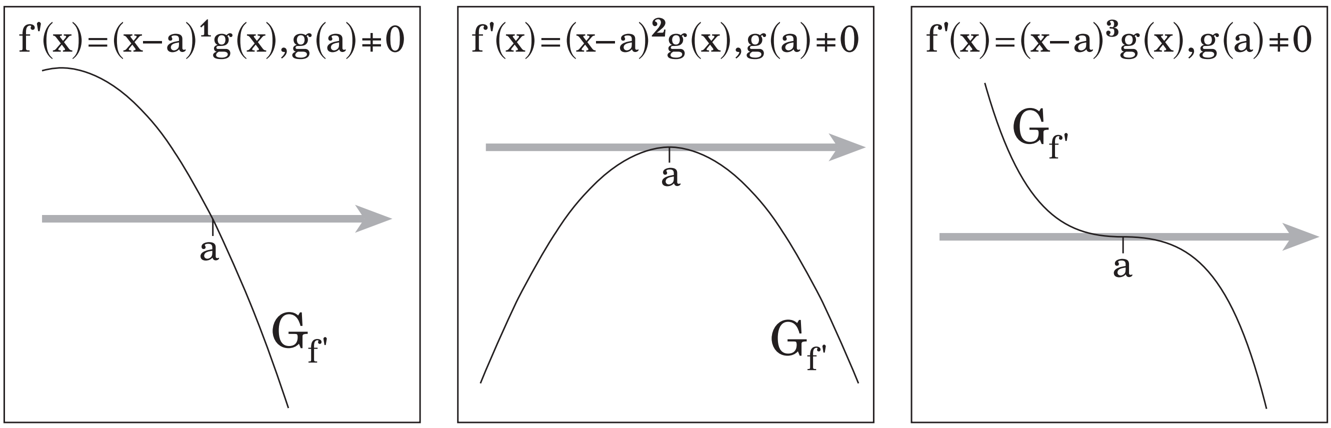
Schnittpunkt von b und Kurve ist $(-10|b(-10)) = (-10|75)$

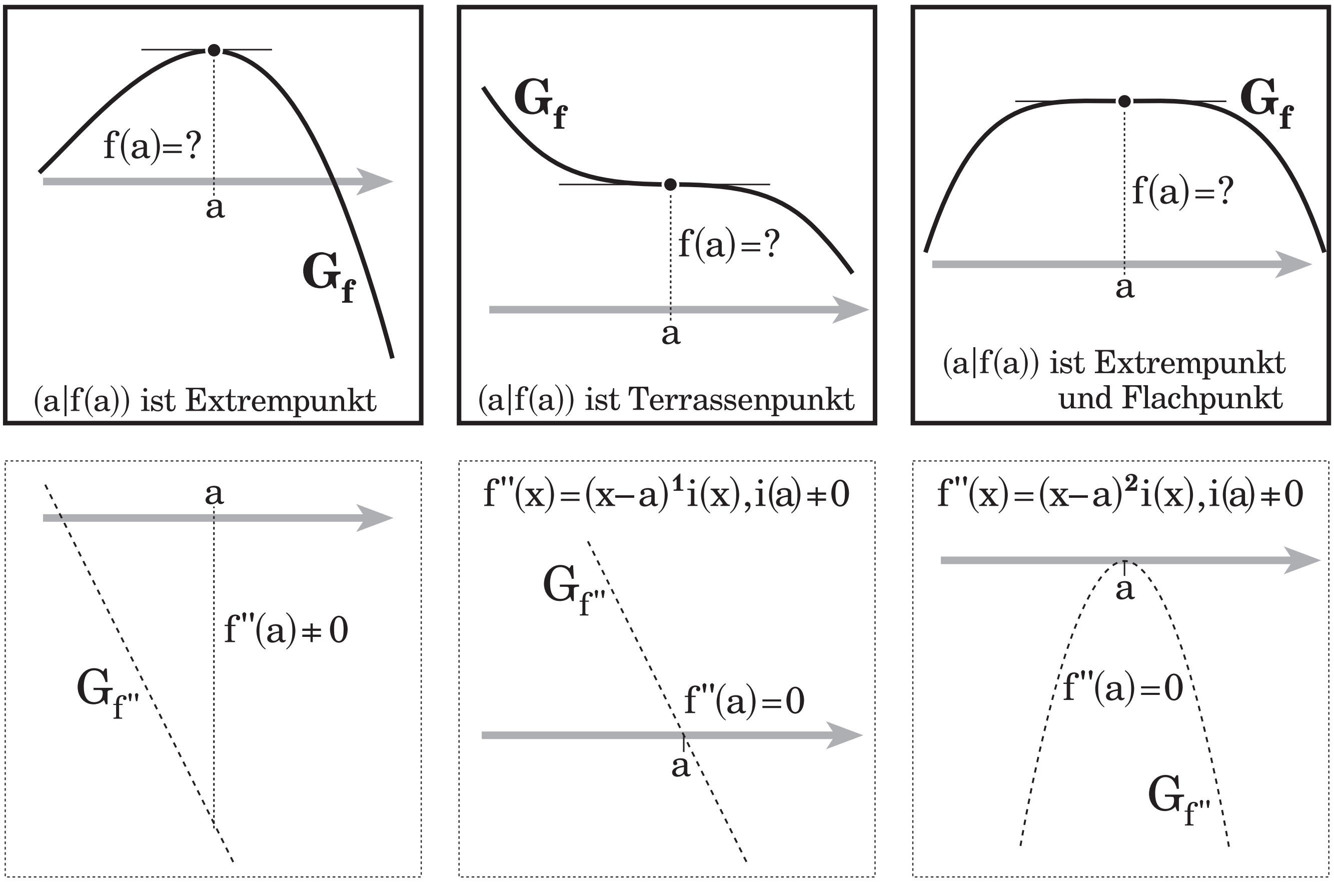
b) $f(x) = -x^4 + 10x^3 - 24x^2$
$f'(x) = -4x^3 + 30x^2 - 48x = -2x(2x^2 - 15x + 24)$
$f''(x) = -12(x^2 - 5x + 4) = -12(x - 1)(x - 4)$
Wendepunkte: $(1|-15)$ und $(4|0)$
Wendetangente a in (1| –15): $a(x) = -22x + 7$
schneidet Kurve noch in $(7|-147)$
Wendetangente b in (4| 0): $b(x) = 32x - 128$
schneidet Kurve noch in $(-2|-192)$

•13

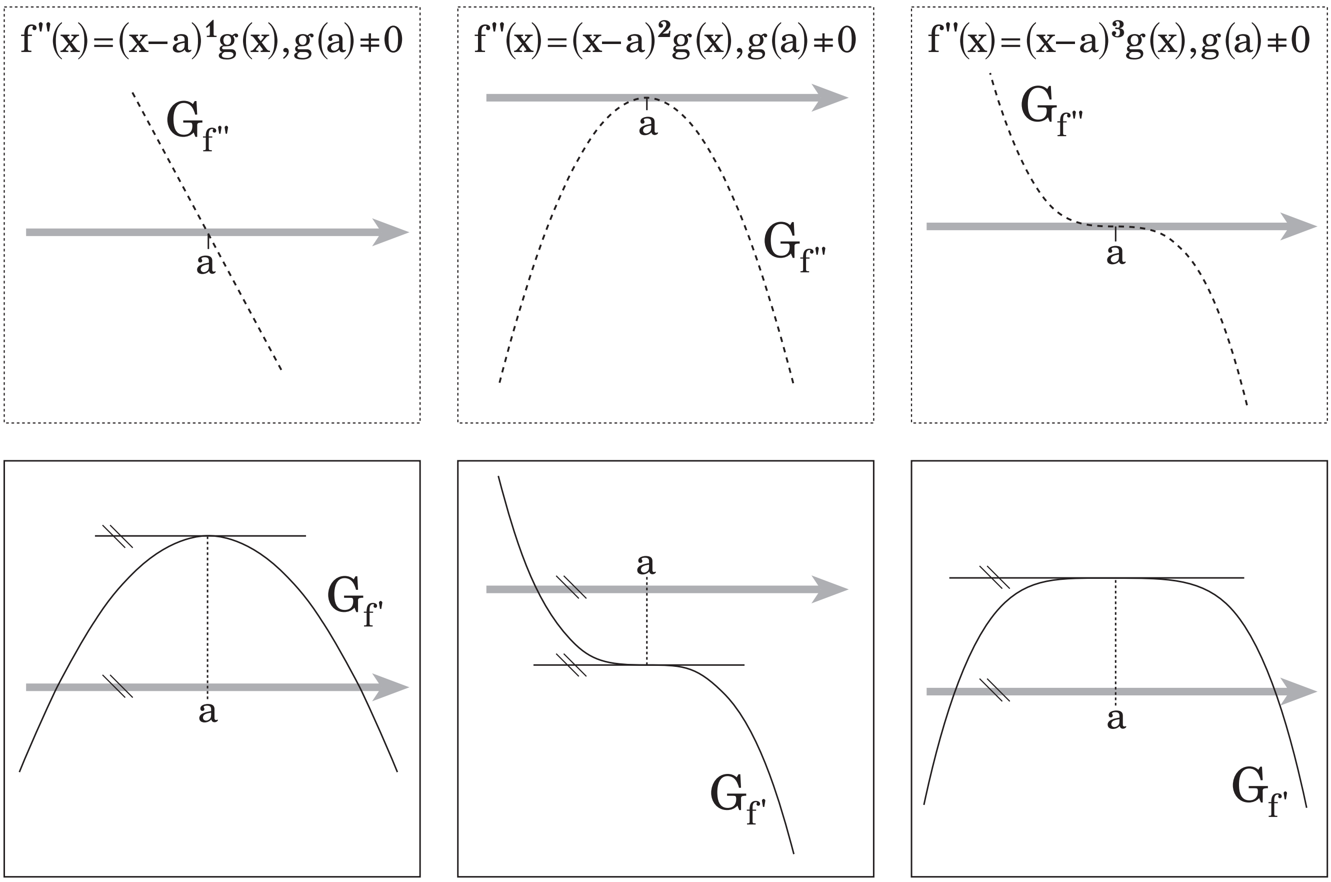

f(x)=(x–a)¹g(x), g(a)≠0
a
G_f
f(x)=(x–a)²g(x), g(a)≠0
a
G_f
f(x)=(x–a)³g(x), g(a)≠0
a
G_f
f''(a)≠0
a
G_f'
f'(x)=(x–a)¹h(x),h(a)≠0
f'(a)=0
a
G_f'
f'(x)=(x–a)²h(x),h(a)≠0
a
f'(a)=0
G_f'
G_f''
a
f''(a)=?
a
G_f''
f''(a)≠0
f''(x)=(x–a)¹i(x),i(a)≠0
f''(a)=0
a
G_f''

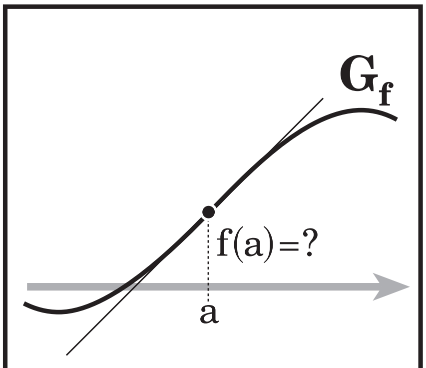
•14


f'(x)=(x–a)¹g(x),g(a)≠0
a
G_f'
f'(x)=(x–a)²g(x),g(a)≠0
a
G_f'
f'(x)=(x–a)³g(x),g(a)≠0
G_f'
a

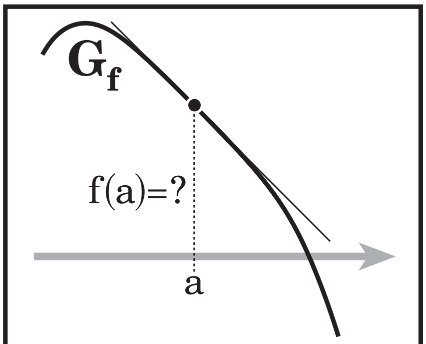

f(a)=?
a
Gf
(a|f(a)) ist Extrempunkt
Gf
f(a)=?
a
(a|f(a)) ist Terrassenpunkt
Gf
f(a)=?
a
(a|f(a)) ist Extrempunkt und Flachpunkt
a
f''(a)≠0
Gf''
f''(x)=(x–a)¹i(x), i(a)≠0
Gf''
f''(a)=0
a
f''(x)=(x–a)²i(x), i(a)≠0
a
f''(a)=0
Gf''

•15

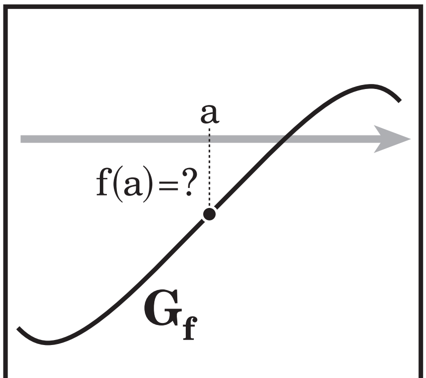

f''(x)=(x–a)¹g(x), g(a)≠0
Gf''
a
f''(x)=(x–a)²g(x), g(a)≠0
a
Gf''
f''(x)=(x–a)³g(x), g(a)≠0
Gf''
a
Gf'
a
a
Gf'
a
Gf'



(a|f(a)) ist Wendepunkt



(a|f(a)) ist Flachpunkt, aber kein Wendepunkt



(a|f(a)) ist Wendepunkt

16 k ist eine natürliche Zahl.

Polynomgrad	Nullstellen		Waagrechtpunkte		Flachpunkte	
	Minimalzahl	Maximalzahl	Minimalzahl	Maximalzahl	Minimalzahl	Maximalzahl
3	1	3	0	2	1	1
4	0	4	1	3	0	2
5	1	5	0	4	1	3
n=2k	0	n	1	n – 1	0	n – 2
n=2k+1	1	n	0	n – 1	1	n – 2

17 k ist eine natürliche Zahl.

Polynomgrad	Extrempunkte		Wendepunkte		Terrassenpunkte	
	Minimalzahl	Maximalzahl	Minimalzahl	Maximalzahl	Minimalzahl	Maximalzahl
3	0	2	1	1	0	1
4	1	3	0	2	0	1
5	0	4	1	3	0	2
n=2k	1	2k – 1	0	2k – 2	0	k – 1
n=2k+1	0	2k	0	2k – 1	0	k

18 $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ac)x - abc$

$f'(x) = 3x^2 - 2(a+b+c)x + ab+bc+ac$

$f''(x) = 6x - 2(a+b+c)$

$f''(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{a+b+c}{3}$

2. Termbestimmung

◊1 $f(x) = x^2 + ax + b$ Berührpunkt $B(-2|-2)$ liegt auf $y = x$

$f'(x) = 2x + a$

B sei Berührpunkt $\Leftrightarrow$ $f'(-2) = 1$, das heißt: $-4 + a = 1 \Rightarrow a = -5$

B sei Kurvenpunkt $\Leftrightarrow$ $f(-2) = -2$, das heißt: $4-2a+b = -2 \Rightarrow b = 2a-6 = -16$

$f(x) = x^2 + 5x - 16$

2 Die Schnittpunkte sind $A(-4|4)$ und $B(0|0)$

$f(x) = ax^2 + bx$

$f'(x) = 2ax + b$

in A sei die Parabelsteigung 1 $\Leftrightarrow$ $f'(-4) = 1$, das heißt: $-8a + b = 1$

A sei Parabelpunkt $\Leftrightarrow$ $f(-4) = 4$, das heißt: $16a - 4b = 4$

$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 3x$

3 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6ax + 2b$

$f'''(x) = 6a$

a) $f(1) = f'(1) = f''(1) = f'''(1) = 1$

$f(1) = 1$, das heißt $a + b + c + d = 1$

$f'(1) = 1$, das heißt $3a + 2b + c = 1$

$f''(1) = 1$, das heißt $6a + 2b = 1$

$f'''(1) = 1$, das heißt $6a = 1$

$f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$

b) $f(1) = 1$, $f'(1) = 2$, $f''(1) = 3$, $f'''(1) = 4$

$f(1) = 1$, das heißt $a + b + c + d = 1$

$f'(1) = 2$, das heißt $3a + 2b + c = 2$

$f''(1) = 3$, das heißt $6a + 2b = 3$

$f'''(1) = 4$, das heißt $6a = 4$

$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{6}$

◊4 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6ax + 2b$

3 sei Flachstelle $\Leftrightarrow$ $f''(3) = 0$, das heißt: $18a + 2b = 0$

1 sei Waagrechtstelle $\Leftrightarrow$ $f'(1) = 0$, das heißt: $3a + 2b + c = 0$

F sei Kurvenpunkt $\Leftrightarrow$ $f(3) = 4$, das heißt: $27a + 9b + 3c + d = 4$

W sei Kurvenpunkt $\Leftrightarrow$ $f(1) = 8$, das heißt: $a + b + c + d = 8$

$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{15}{4}x + \frac{25}{4} = \frac{1}{4}(x+1)(x-5)^2$

◊5 $f(x) = ax^3 + bx$(Punktsymmetrie schon im Ansatz)

$f'(x) = 3ax^2 + b$

3 sei Waagrechtstelle $\Leftrightarrow$ $f'(3) = 0$, das heißt: $27a + b = 0$
(3|18) sei Kurvenpunkt $\Leftrightarrow$ $f(3) = 18$, das heißt: $27a + 3b = 18$
$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 9x$

◊6 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ (O auf Kurve schon im Ansatz)
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
$f''(x) = 6ax + 2b$
Wendepunkt $F(-2|t(-2)) = F(-2|-2)$
-2 sei Flachstelle $\Leftrightarrow$ $f''(-2) = 0$, das heißt: $-12a + 2b = 0$
bei -2 sei Steigung -3 $\Leftrightarrow$ $f'(-2) = -3$, das heißt: $12a - 4b + c = -3$
F sei Kurvenpunkt $\Leftrightarrow$ $f(-2) = -2$, das heißt: $-8a + 4b - 2c = -2$
$f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x = x(x+3)^2$

◊7 $f(x) = ax^3 + bx$ (O ist Wendepunkt schon im Ansatz)
-2 sei Nullstelle $\Leftrightarrow$ $f(-2) = 0$, das heißt: $-8a - 2b = 0$ $\Rightarrow$ $4a + b = 0$
1 sei Nullstelle $\Leftrightarrow$ $f(1) = 0$, das heißt: $a + b = 0$ $\Rightarrow$ $a = b = 0$
$f(x)=0$ (x-Achse!) ist keine Lösung, weil das Polynom f(x) den Grad 0 hat.

8 $f(x) = x^2(ax + b) = ax^3 + bx^2$ (2-fache Nullstelle 0 schon im Ansatz)
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx$
bei 2 sei Steigung 1 $\Leftrightarrow$ $f'(2) = 1$, das heißt: $12a + 4b = 1$
(2|2) sei Kurvenpunkt $\Leftrightarrow$ $f(2) = 2$, das heißt: $8a + 4b = 2$
$f(x) = x^2(-\frac{1}{4}x + 1)$

9 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
bei 0 sei Steigung 0 $\Leftrightarrow$ $f'(0) = 0$, das heißt: $c = 0$
bei 1 sei Steigung 0 $\Leftrightarrow$ $f'(1) = 0$, das heißt: $3a + 2b + c = 0$
bei 2 sei Steigung 0 $\Leftrightarrow$ $f'(2) = 0$, das heißt: $4a + 4b + c = 0$
bei -1 sei Steigung 1 $\Leftrightarrow$ $f'(-1) = 0$, das heißt: $3a - 2b + c = 1$
im Gleichungssystem steckt ein Widerspruch,
eine solche Polynomkurve gibt es nicht.

•10 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ (O auf Kurve schon im Ansatz)
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
bei 0 sei Steigung -2 $\Leftrightarrow$ $f'(0) = -2$, das heißt: $c = -2$
(5|−10) sei Kurvenpunkt $\Leftrightarrow$ $f(5) = -10$, das heißt: $125a + 25b + 5c = -10$
$c = -2$ eingesetzt ergibt: $5a + b = 0$ (♥)
Kurvensteigung bei 5: $f'(5) = 75a + 10b + c = 75a + 10b - 2 := m$
45°-Schnittwinkel: $\tan 45° = \left|\frac{-2-m}{1+(-2)m}\right|$

$$1 = \left|\frac{2+m}{2m-1}\right| \Leftrightarrow \frac{2+m}{2m-1} = \pm 1$$

Fall »+1« $\frac{2+m}{1-2m} = +1 \Leftrightarrow$ $m = 3$, Ersetzung rückgängig machen
$75a + 10b - 2 = 3$ verarbeitet mit (♥)
ergibt $b = -1$, $a = \frac{1}{5}$ $f(x) = \frac{1}{5}x^3 - x^2 - 2x$

Fall »–1« $\frac{2+m}{1-2m} = -1 \iff m = -\frac{1}{3}$, Ersetzung rückgängig machen

$75a + 10b - 2 = -\frac{1}{3}$ verarbeitet mit (♥)

ergibt $b = -\frac{1}{3}$, $a = \frac{1}{15}$ $\quad f(x) = \frac{1}{15}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - 2x$

11 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ (O auf Kurve schon im Ansatz)

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6ax + 2b$

1 sei Wendestelle $\Rightarrow f''(1) = 0$, das heißt: $6a + 2b = 0$

0 sei Waagrechtstelle $\iff f'(0) = 0$, das heißt: $c = 0$

2 sei Waagrechtstelle $\iff f'(2) = 0$, das heißt: $12a + 4b + c = 0$

$\Rightarrow 3a + b = 0 \Rightarrow b = -3a \iff f(x) = ax^3 - 3ax^2 = ax^2(x-3)$

Die Koeffizienten sind bis auf einen gemeinsamen Faktor bestimmt; eine der 4 Informationen steckt schon in den anderen dreien: Polynomkurven vom Grad 3 sind symmetrisch zum Wendepunkt, also muss 1 Wendestelle sein, wenn 0 und 2 Waagrechtstellen sind.

12 **a)** Symmetrie zur y-Achse: $f(x) = ax^2 + b$ $\quad f'(x) = 2ax$

bei –2 sei Steigung $\frac{1}{2}$ $\iff f'(-2) = \frac{1}{2}$, das heißt: $-4a = \frac{1}{2}$, $a = -\frac{1}{8}$

Parabel gehe durch $(-2|0) \iff f(-2) = 0$, das heißt: $4a + b = 0$

$\Rightarrow b = -4a = \frac{1}{2}$ $\quad f(x) = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}$

b) Symmetrie zum Ursprung: $f(x) = ax^3 + bx$ $\quad f'(x) = 3ax^2 + b$

bei –2 sei Steigung $\frac{1}{2}$ $\iff f'(-2) = \frac{1}{2}$, das heißt: $12a + b = \frac{1}{2}$

Kurve gehe durch $(-2|0) \iff f(-2) = 0$, das heißt: $-8a - 2b = 0$

$f(x) = \frac{1}{16}x^3 - \frac{1}{4}x$

13 $p(x) = ax^2 + bx$ (O auf Kurve schon im Ansatz)

$p'(x) = 2ax + b$

1 sei Waagrechtstelle $\iff p'(1) = 0$, das heißt: $2a + b = 0$

$(1|2)$ sei Kurvenpunkt $\iff p(1) = 2$, das heißt: $a + b = 2$

$p(x) = -2x^2 + 4x = -2x(x-2)$

$f(x) = ax^3 + bx$ (O ist Wendepunkt)

$f'(x) = 3ax^2 + b$

1 sei Waagrechtstelle $\iff f'(1) = 0$, das heißt: $3a + b = 0$

$(1|2)$ sei Kurvenpunkt $\iff f(1) = 2$, das heißt: $a + b = 2$

$f(x) = -x^3 + 3x = -x(x^2 - 3)$

$p(0{,}5) = 1{,}5 \quad f(0{,}5) = 1{,}375$

G_f liegt zwischen A und B näher an der x-Achse.

14 Beide Kurven haben in $(1|9)$ die Steigung 0 und gehn durch $(2|0)$.

a) Symmetrie zur y-Achse: $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ $\quad f'(x) = 4ax^3 + 2bx$

bei 1 sei Steigung 0 $\iff f'(1) = 0$, das heißt: $4a + 2b = 0$

Kurve gehe durch (1|9) $\Leftrightarrow$ $f(1) = 9$, das heißt: $a + b + c = 9$
Kurve gehe durch (2|0) $\Leftrightarrow$ $f(2) = 0$, das heißt: $16a + 4b + c = 0$
$f(x) = -x^4 + 2x^2 + 8$

b) Symmetrie zum Ursprung: $f(x) = ax^5 + bx^3 + cx$
$f'(x) = 5ax^4 + 3bx^2 + c$
bei 1 sei Steigung 0 $\Leftrightarrow$ $f'(1) = 0$, das heißt: $5a + 3b + c = 0$
Kurve gehe durch (1|9) $\Leftrightarrow$ $f(1) = 9$, das heißt: $a + b + c = 9$
Kurve gehe durch (2|0) $\Leftrightarrow$ $f(2) = 0$, das heißt: $32a + 8b + 2c = 0$
$f(x) = \frac{1}{2}x^5 - \frac{11}{2}x^3 + 14x$

15 Die Nullstellen 2 und –2 sind beide 2-fach: $f(x) = a(x-2)^2(x+2)^2$
die Kurve geht durch (0|–2): $f(0) = -2$, das heißt: $16a = -2$
$f(x) = -\frac{1}{8}(x-2)^2(x+2)^2$

16 $f(x) = ax^4 + bx^2$ $f'(x) = 4ax^3 + 2bx$ $f''(x) = 12ax^2 + 2b$
–1 sei Flachstelle $\Leftrightarrow$ $f''(-1) = 0$, das heißt: $12a + 2b = 0$
(–1|5) sei Kurvenpunkt $\Leftrightarrow$ $f(-1) = 5$, das heißt: $a + b = 5$
$f(x) = -x^4 + 6x^2$

•17 $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx$
$f''(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$
$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$
1 sei Wendestelle $\Rightarrow$ $f''(1) = 0$, das heißt: $12a + 6b + 2c = 0$
4 sei Kurvensteigung bei 1 $\Leftrightarrow$ $f'(1) = 4$, das heißt: $4a + 3b + 2c + d = 4$
0 sei Kurvensteigung bei 2 $\Leftrightarrow$ $f'(2) = 0$, das heißt: $32a + 12b + 4c + d = 0$
(1|5) sei Kurvenpunkt $\Leftrightarrow$ $f(1) = 5$, das heißt: $a + b + c + d = 5$
$f(x) = -x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 8x$ beschreibt die gesuchte Kurve nicht:
$f''(x) = -12x^2 + 24x - 12 = -12(x^2 - 2x + 1) = -12(x-1)^2$
1 ist zwar Flachstelle, aber nicht Wendestelle,
oder: für x=1 ist die Bedingung $f'''(x) \neq 0$ nicht erfüllt, das heißt,
es gibt keine Polynomkurve mit den geforderten Eigenschaften.

18 $f(x) = ax^5 + bx^3 + cx$ $f'(x) = 5ax^4 + 3bx^2 + c$ $f''(x) = 20ax^3 + 6bx$
1 sei Flachstelle $\Leftrightarrow$ $f''(1) = 0$, das heißt: $20a + 6b = 0$
Steigung in (1|8) sei $\Leftrightarrow$ $f'(1) = 0$, das heißt: $5a + 3b + c = 0$
(1|8) sei Kurvenpunkt $\Leftrightarrow$ $f(1) = 8$, das heißt: $a + b + c = 8$
$f(x) = 3x^5 - 10x^3 + 15x$

19 $f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3$ (berücksichtigt schon (0|0) als Terrassenpunkt)
$f'(x) = 5ax^4 + 4bx^3 + 3cx^2$ $f''(x) = 20ax^3 + 12bx^2 + 6cx$
–2sei Flachstelle $\Leftrightarrow$ $f''(-2) = 0$, das heißt: $-160a + 48b - 12c = 0$
Steigung in (–2|16) sei 0 $\Leftrightarrow$ $f'(-2) = 0$, das heißt: $80a - 32b + 12c = 0$
(–2|16) sei Kurvenpunkt $\Leftrightarrow$ $f(-2) = 16$, das heißt: $-32a + 16b - 8c = 16$
$f(x) = -3x^5 - 15x^4 - 20x^3$

3. Interpolation

◊1 Gerade g durch $(17|289)$ und $(18|324)$: $g(x) = 35x - 306$

a) $f(17{,}1) = 292{,}41$ $g(17{,}1) = 292{,}5$ rel.Fehler = 0,03%

b) $f(17{,}39) = 302{,}412$ $g(17{,}39) = 302{,}65$ rel.Fehler = 0,08%

c) $f(18{,}5) = 342{,}25$ $g(18{,}5) = 341{,}5$ rel.Fehler = 0,22%

2 Gerade g durch $(16|4)$ und $(25|5)$: $g(x) = \frac{1}{9}(x+20)$

a) $f(16{,}1) = 4{,}0124\ldots$ $g(16{,}1) = 4{,}0111\ldots$ rel.Fehler = 0,03%

b) $f(20) = 4{,}4721\ldots$ $g(20) = 4{,}4444\ldots$ rel.Fehler = 0,62%

c) $f(30) = 5{,}4772\ldots$ $g(30) = 5{,}5555\ldots$ rel.Fehler = 1,43%

3 Ansatz für Näherungsparabel: $p(x) = ax^2 + bx + c$; $p'(x) = 2ax + b$
$p'(16) = 0{,}125 = 32a + b$;
$p(16) = 4 = 256a + 16b + c$; $p(25) = 5 = 625a + 25b + c$;
$p(x) = \frac{1}{648}(1040 + 113x - x^2)$

a) $f(16{,}1) = 4{,}0124\ldots$ $p(16{,}1) = 4{,}0124\ldots$ rel.Fehler = 0,0001%

b) $f(20) = 4{,}4721\ldots$ $p(20) = 4{,}4753\ldots$ rel.Fehler = 0,07%

c) $f(30) = 5{,}4772\ldots$ $p(30) = 5{,}4475\ldots$ rel.Fehler = 0,54%

4 Bestimme dann jeweils den exakten Wert und den relativen Fehler.
Gerade g durch $(8|2)$ und $(27|3)$: $g(x) = \frac{1}{19}(x+30)$

a) $f(10) = 2{,}1544\ldots$ $g(10) = 2{,}1052\ldots$ rel.Fehler = 2,3%

b) $f(20) = 2{,}7144\ldots$ $g(20) = 2{,}6315\ldots$ rel.Fehler = 3,1%

c) $f(91{,}125) = 4{,}5$ $g(91{,}125) = 6{,}375$ rel.Fehler = 41,7%

•5 $f(x) = \sin x$; Stützpunkte $(0|0)$ und $(\frac{\pi}{2}|1)$;
berechne Näherungswerte für $f(0{,}5)$ und $f(1)$ durch

a) lineare Interpolation, $g(x) \approx f(x)$
Gerade g: $g(x) = \frac{2x}{\pi}$
$f(0{,}5) = 0{,}4794\ldots$ $g(0{,}5) = 0{,}3183\ldots$ rel.Fehler = 33,6%
$f(1) = 0{,}8414\ldots$ $g(1) = 0{,}6366\ldots$ rel.Fehler = 24,3%

b) quadratische Interpolation, $p(x) \approx f(x)$ mit $p'(0) = 1$
Parabel p: $p(x) = \frac{4-2\pi}{\pi^2}x^2 + x$
$f(0{,}5) = 0{,}4794\ldots$ $p(0{,}5) = 0{,}4421\ldots$ rel.Fehler = 7,8%
$f(1) = 0{,}8414\ldots$ $p(1) = 0{,}7686\ldots$ rel.Fehler = 8,7%

c) quadratische Interpolation, $q(x) \approx f(x)$ mit $q'(\pi/2) = 0$
Parabel q: $q(x) = -\frac{4}{\pi^2}x^2 + \frac{4}{\pi}x$

$f(0{,}5) = 0{,}4794\ldots$ $q(0{,}5) = 0{,}5352\ldots$ rel.Fehler = 11,7%
$f(1) = 0{,}8414\ldots$ $q(1) = 0{,}8679\ldots$ rel.Fehler = 3,1%

d) kubische Interpolation, $k(x) \approx f(x)$ mit $k'(0) = 1$ und $k''(0) = 0$
Kurve k: $k(x) = -\frac{4\pi-8}{\pi^3}x^3 + x$

$f(0{,}5) = 0{,}4794\ldots$ $k(0{,}5) = 0{,}4815\ldots$ rel.Fehler = 0,45%
$f(1) = 0{,}8414\ldots$ $k(1) = 0{,}8527\ldots$ rel.Fehler = 1,33%

e) kubische Interpolation, $l(x) \approx f(x)$ mit $l'(0) = 1$ und $l'(\pi/2) = 0$
Kurve k: $k(x) = -\frac{16-4\pi}{\pi^3}x^3 - \frac{4\pi-12}{\pi^2}x^2 + x$

$f(0{,}5) = 0{,}4794\ldots$ $l(0{,}5) = 0{,}4718\ldots$ rel.Fehler = 1,6%
$f(1) = 0{,}8414\ldots$ $l(1) = 0{,}8318\ldots$ rel.Fehler = 1,1%

f) lineare Interpolation, $g(x) \approx f(x)$

g) quadratische Interpolation, $p(x) \approx f(x)$ mit $p'(0) = 1$

h) quadratische Interpolation, $q(x) \approx f(x)$ mit $q'(\pi/2) = 0$

i) kubische Interpolation, $k(x) \approx f(x)$ mit $k'(0) = 1$ und $k''(0) = 0$

j) kubische Interpolation, $l(x) \approx f(x)$ mit $l'(0) = 1$ und $l'(\pi/2) = 0$

•6 Stützpunkte $P_0(-3|-3)$, $P_1(0|0)$, $P_2(3|-1{,}5)$, $P_3(7|-1{,}5)$,
Lege durch die 4 Stützpunkte eine Ersatzkurve als

a) Streckenzug: $g_1(x) = x$ für $-3 \leqq x < 0$; $g_2(x) = -\frac{x}{2}$ für $0 \leqq x < 3$;
$g_3(x) = -1{,}5$ für $3 \leqq x \leqq 7$

b) Parabelbogenzug, Teilterme $p_1(x)$ bis $p_3(x)$ mit $p_1'(-3) = 4$

$p_1(x) = -x(x+2)$ für $-3 \leqq x < 0$; $p_2(x) = \frac{1}{2}x(x-4)$ für $0 \leqq x < 3$;

$p_3(x) = -\frac{1}{4}(x^2 - 10x + 27)$ für $3 \leqq x \leqq 7$

c) Polynom vom Grad 3 nach Lagrange.
Nummerieren vorm Einsetzen:
$P_0(x_0{=}-3|y_0{=}-3)$ $P_1(x_1{=}0|y_1{=}0)$
$P_2(x_2{=}3|y_2{=}-1{,}5)$ $P_3(x_3{=}7|y_3{=}-1{,}5)$

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-0)(x-3)(x-7)}{(-3-0)(-3-3)(-3-7)}$$
$$= \frac{1}{180}(-x^3 + 10x^2 - 21x)$$
$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x+3)(x-3)(x-7)}{(0+3)(0-3)(0-7)}$$

$$= \tfrac{1}{63}(x^3-7x^2-9x+63)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x+3)(x-0)(x-7)}{(3+3)(3-0)(3-7)}$$

$$= \tfrac{1}{72}(-x^3+4x^2+21x)$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x+3)(x-0)(x-3)}{(7+3)(7-0)(7-3)}$$

$$= \tfrac{1}{280}(x^3-9x)$$

$$\begin{aligned} g(x) &= y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + y_2L_2(x) + y_3L_3(x) \\ &= -3\cdot L_0(x) + 0\cdot L_1(x) - 1{,}5\cdot L_2(x) - 1{,}5\cdot L_3(x) \\ &= \tfrac{1}{280}\,x(9x^2-70x-11) \end{aligned}$$

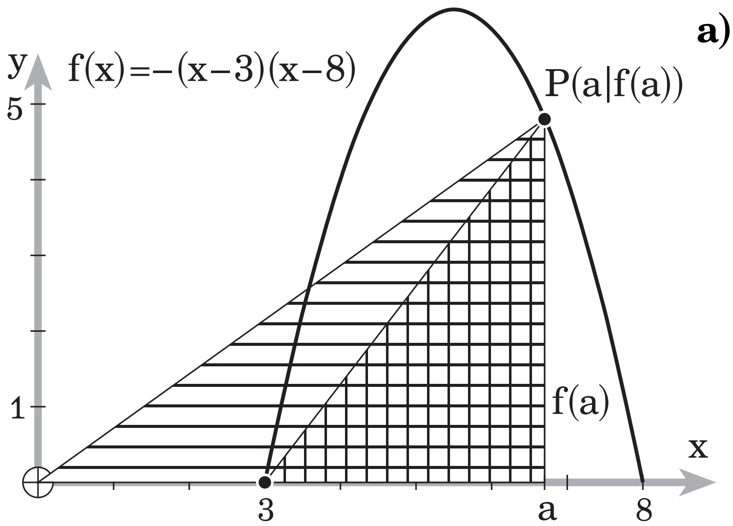
4. Extremwertaufgaben

◊1 $f(x) = x^2 - 6x + 9 = (x-3)(x-3),\ x \geqq 0$

a) Flächeninhalt $F(a) = a\cdot f(a) = a^3 - 6a^2 + 9a = a(a-3)(a-3)$
absolute FlächenMinima: $F(a) = 0 \Rightarrow a = 0$ oder $a = 3$
$F'(a) = 3(a^2 - 4a + 3) = 0 \Rightarrow a = 1$ oder $a = 3$
$a = 3$ schon erledigt,
also muss $F(1) = 4$ relatives FlächenMaximum sein,
denn wegen $a \to +\infty$, also $F(a) \to +\infty$, gibt es kein absolutes Fläch.Max.

b) Umfang $u(a) = 2a + 2\cdot f(a) = 2a^2 - 10a + 18 > 0$
$u'(a) = 0 \Rightarrow a = 2{,}5$
absolutes UmfangMinimum: $u(2{,}5) = 5{,}5$
wegen $a \to +\infty$, also $u(a) \to +\infty$, ist $u(0)$ relatives RandMaximum.

◊2 $f(x) = -(x-3)(x-8) \geqq 0,\ 3 \leqq x \leqq 8$



a) Flächeninhalt $F(a) = \frac{1}{2}a\cdot f(a)$
$= -\frac{1}{2}a(a-3)(a-8) = -\frac{1}{2}(a^3 - 11a^2 + 24a)$
absolute FlächenMinima:
$F(a) = 0 \Rightarrow a = 3$ oder $a = 8$
$F'(a) = -\frac{1}{2}(3a^2 - 22a + 24) = 0$
$\Rightarrow a = \frac{4}{3}$ oder $a = 6$
$a = \frac{4}{3}$ kommt nicht infrage, weil außerhalb der Definitionsmenge
$F''(6) = -7 < 0 \Rightarrow F(6) = 18$ ist lokales FlächenMaximum.

b) Flächeninhalt

$F(a)= \frac{1}{2}(a-3)\cdot f(a) = -\frac{1}{2}(a-3)(a-3)(a-8) = -\frac{1}{2}(a^3-14a^2+57a-72)$

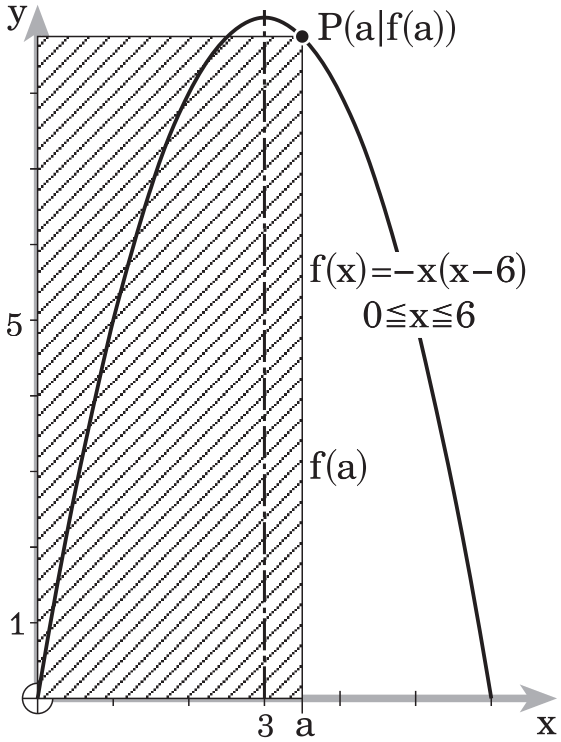
absolute FlächenMinima: $F(a) = 0 \Rightarrow a = 3$ oder $a = 8$

$F'(a) = -\frac{1}{2}(3a^2 - 28a + 57) = 0 \Rightarrow a = 3$ oder $a = \frac{19}{3}$

$a = 3$ schon erledigt

$F''(\frac{19}{3}) = -5 < 0 \Rightarrow F(\frac{19}{3}) = \frac{500}{27}$ ist lokales FlächenMaximum.

3 Bedingung für a: $0 \leqq a \leqq 6$



a) Flächeninhalt

$F(a) = a\cdot f(a) = a(-a^2 + 6a) = -a^3 + 6a^2$

absolute FlächenMinima

$F(a) = 0 \Rightarrow a = 0$ oder $a = 6$

$F'(a) = -3a^2 + 12a = -3a(a-4)$

$F'(a) = 0 \Rightarrow a = 0$ oder $a = 4$

$F(4) = 32$ ist absolutes FlächenMaximum mit $P(4|8)$

b) Umfang

$u(a) = 2a + 2f(a) = 2a + 2(-a^2 + 6a)$

$= -2a^2 + 14a = -2a(a-7)$

absolute UmfangMaxima

$u(a) = 0 \Rightarrow a = 0$ (oder $a = 7$)

$u'(a) = -4a + 14$

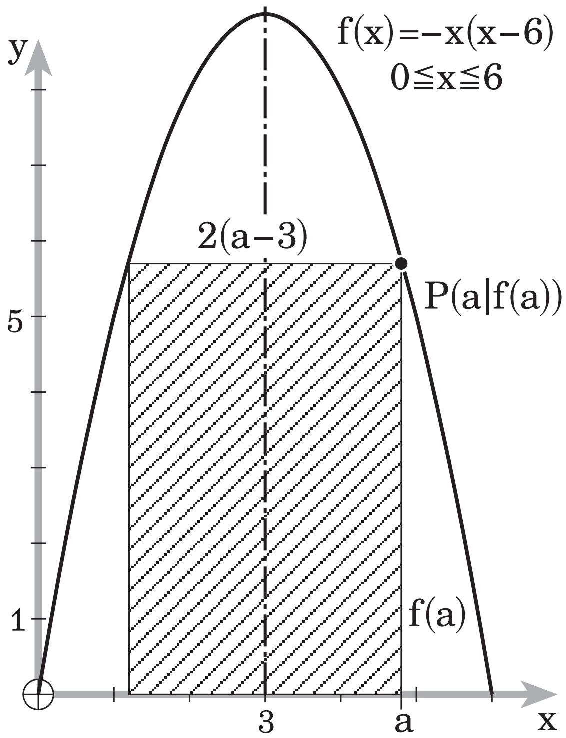
$u'(a) = 0 \Rightarrow a = 3{,}5$

$u(3{,}5) = 24{,}5$ ist absolut. UmfangMaximum mit $P(3{,}5|8{,}75)$

3* $P(a|y)$ sei ein Punkt einer Parabel mit $f(x) = -x^2 + 6x$, $0 \leqq x \leqq 6$, rechts von der Symmetrieachse. Ein Rechteck mit den Ecken P und Q auf der Parabel und den beiden andern Ecken auf der x-Achse soll:

a) extremalen Flächeninhalt haben.

b) extremalen Umfang haben.



Symmetrieachse $x = 3$

(liegt zwischen den Nullstellen 0 und 6)

Bedingung für a: $3 < a \leqq 6$

a) Flächeninhalt

$F(a) = 2(a-3)\cdot f(a) = -2(a-3)(a^2 - 6a)$

$= -2a(a-3)(a-6) = -2(a^3 - 9a^2 + 18a)$

absolute FlächenMinima

$F(a) = 0 \Rightarrow (a = 0$ oder $a = 3)$, $a = 6$

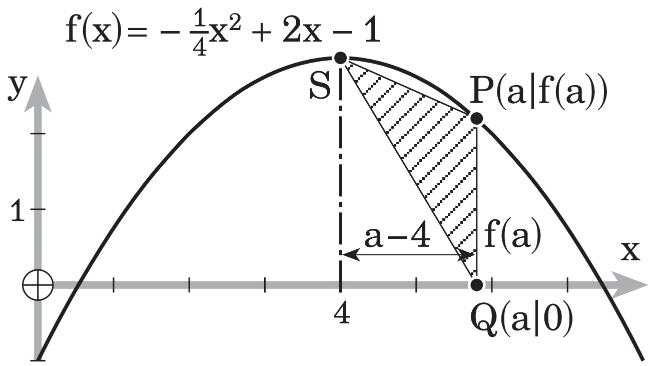
$F'(a) = -2(3a^2 - 18a + 18) = -6(a^2 - 6a + 6)$

$F'(a) = 0 \Rightarrow (a = 3 - \sqrt{3})$, $a = 3 + \sqrt{3}$

muss Stelle des absoluten Maximums sein wegen $F(3) = F(6) = 0$.
Absolutes FlächenMaximum $F(3+\sqrt{3}) = 12\sqrt{3}$

b) Umfang
$u(a) = 4(a-3) + 2f(a) = 4(a-3) - 2(a^2 - 6a) = -2(a^2 - 8a + 6)$
$u'(a) = -2(2a-8) = 0 \Rightarrow a = 4$
absolutes UmfangMaximum $u(4) = 20$, denn der Scheitel der unten offenen Parabel G_u ist absoluter Hochpunkt.

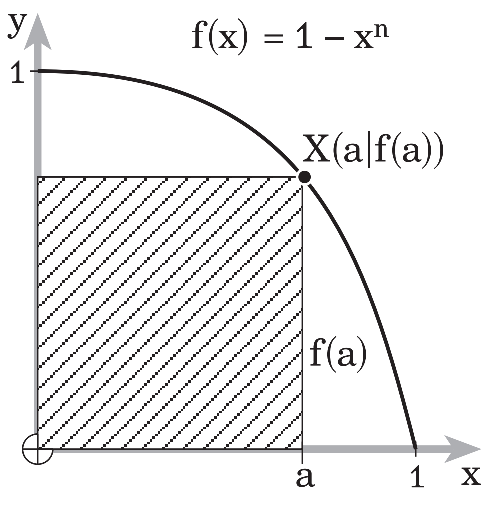
4 $f(x) = 0 \Rightarrow x = 4 \pm 2\sqrt{3}$



4 ist Symmetrieachse der Parabel
Bedingung für a: $4 < a < 4 + 2\sqrt{3}$
Dreieckgrundseite (senkrecht)
$f(a) = -\frac{1}{4}a^2 + 2a - 1$
Dreieckhöhe (waagrecht) $h = a - 4$
Dreieckfläche $F(a) = \frac{1}{2}h \cdot f(a)$
$= \frac{1}{2}(a-4)(-\frac{1}{4}a^2 + 2a - 1)$
$= -\frac{1}{8}(a^3 - 12a^2 + 36a - 16)$

$F'(a) = -\frac{3}{8}(a^2 - 8a + 12) = -\frac{3}{8}(a-2)(a-6) = 0 \Rightarrow (a = 2), a = 6$
wegen $F(4) = F(4+2\sqrt{3}) = 0$ ist $F(6) = 2$ absolutes FlächenMaximum.

5 Rechteckfläche $F(a) = a \cdot f(a) = a(1 - a^n) = a - a^{n+1}$



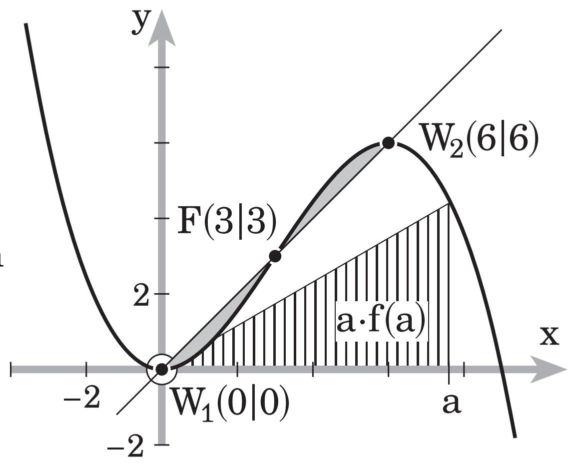
absolute FlächenMinima:
$F(a) = 0 \Rightarrow a = 0$ oder $a = 1$,
also muss für $0 < a < 1$ mindestens ein FlächenMaximum vorliegen
$F'(a) = 1 - (n+1)a^n = 0 \Rightarrow a = \left(\frac{1}{n+1}\right)^{1/n}$
das FlächenMaximum ist absolut, weil es nur dieses gibt
$F\left(\left(\frac{1}{n+1}\right)^{1/n}\right) = \left(\frac{1}{n+1}\right)^{1/n}\left(1 - \left(\frac{1}{n+1}\right)^{n/n}\right)$
$= \left(\frac{n}{n+1}\right)\left(\frac{1}{n+1}\right)^{1/n}$

6 $f(x) = -\frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{18}x^2(x-9)$

a) $f'(x) = -\frac{1}{6}x^2 + x = 0 \Rightarrow x = 0$ oder $x = 6$
Extrempunkte: $W_1(0|0)$, $W_2(6|6)$

$f''(x) = -\frac{1}{3}x + 1 = 0 \Rightarrow x = 3$

Wendepunkt F(3|3)



b) Weil die Verbindungsgerade (y = x) auch durchs Symmetriezentrum F der Kurve geht, liegen die Flächenstücke symmetrisch zu F und haben deshalb denselben Flächeninhalt.

c) Flächeninhalt

$F(a) = \frac{1}{2}a \cdot f(a) = -\frac{1}{36}(a^4 - 9a^3) =$

$= -\frac{1}{36}a^3(a-9)$

$F'(a) = -\frac{1}{36}(4a^3 - 27a^2) = -\frac{1}{36}a^2(4a-27)$

$F'(a) = 0 \Rightarrow a = \frac{27}{4}$ ist Maximumstelle

denn F(0) = F(9) = 0 (absolute Minima)

FlächenMaximum $F(\frac{27}{4}) = \frac{1}{3}(\frac{3}{2})^{10} \approx 19{,}22$

d) Tangente t durch O: y = t(x) = mx

Schnitt mit Kurve: t(x) = f(x)

$mx = -\frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{2}x^2$

$x(x^2 - 9x + 18m) = 0 \Rightarrow x^2 - 9x + 18m = 0$

Bedingung für Berührung: Diskriminante $= 81 - 4 \cdot 18m = 0 \Rightarrow m = \frac{9}{8}$

Berührstelle $x = \frac{9}{2}$; $y = t(\frac{9}{2}) = \frac{9}{8} \cdot \frac{9}{2} = \frac{81}{16}$, Berührpunkt$(\frac{9}{2}|\frac{81}{16})$

•7 $K(x) = \frac{1}{13467}(3x^3 - 339x^2 + 17258x + 27972)$

a) Fixkosten $K(0) = \frac{9324}{4489}$, das sind etwa 20771 DM,

für 6000 Stück nimmt man $6000 \cdot \frac{10}{9}$ DM ein $= \frac{2}{3} \cdot 10000$ DM,

weil 10000 DM die Einheit auf der y-Achse sind, ist $E(x) = \frac{2}{3}x$.

$G(x) = E(x) - K(x) = \frac{-1}{4489}(x^3 - 113x^2 + 2760x + 9324)$

b) $G(x) = \frac{-1}{4489}(x+3)(x-42)(x-74) = 0 \Rightarrow x = -3$ oder $x = 42$ oder $x = 74$

Verlustzone = [0;42[, Gewinnzone =]42;74[

c) $G'(x) = \frac{-1}{4489}(3x^2 - 226x + 2760) = 0 \Rightarrow x = \frac{46}{3}$ oder $x = 60$

$G''(x) = \frac{-2}{4489}(3x - 113)$

$G''(\frac{46}{3}) = \frac{2}{67}$, $G(\frac{46}{3}) = -6{,}38928\ldots$ bei $\frac{46}{3} \cdot 6000$ Stück = 92000 Stück ist der Verlust von etwa 63893 DM maximal,

$G''(60) = -\frac{2}{67}$, $G(60) = 3{,}53664\ldots$ bei $60 \cdot 6000$ Stück = 360000 Stück ist der Gewinn von etwa 35366 DM maximal.

8 $G''(x) = \frac{-2}{169}(3x-20) = 0$
die Wendestelle $x = \frac{20}{3}$ liegt knapp links von der Schnittstelle 7.

9 Zahl x; Quadrat der Zahl x^2; Unterschied $u(x) = x - x^2$
$u'(x) = 1 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0{,}5$ (Stelle des absoluten Maximums)

10 Zahl x; Quadrat der Zahl x^2; Summe $s(x) = x + x^2$
$s'(x) = 1 + 2x = 0 \Rightarrow x = -0{,}5$ (Stelle des absoluten Minimums)

◊11 Zahlen x und 100 – x

a) Produkt: $p(x) = x(100 - x) = 100x - x^2$
$p'(x) = 100 - 2x = 0 \Rightarrow x = 50$
der Extremwert $p(50) = 2500$ ist das absolutes Maximum,
weil der Grenzfall $p(1) = 99$ das absolutes Minimum ist.

b) Summe der Quadrate: $s(x) = x^2 + (100 - x)^2 = 2x^2 - 200x + 10000$
$s'(x) = 2(x^2 - 100x + 5000)' = 2(2x - 100) = 0 \Rightarrow x = 50$
der Extremwert $s(50) = 5000$ ist das absolutes Minimum,
weil der Grenzfall $s(1) = 9802$ das absolutes Maximum ist.

12 Rechteckseiten: a, b

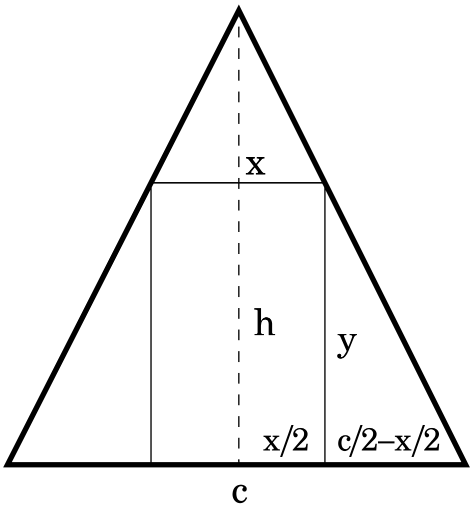
a) $u = 2a + 2b \Rightarrow b = \frac{1}{2}u - a$
Flächeninhalt $F(a) = ab = a(\frac{1}{2}u - a) = \frac{1}{2}ua - a^2$
$F'(a) = \frac{1}{2}u - 2a = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{4}u \Rightarrow b = \frac{1}{2}u - a = \frac{1}{4}u$
a:b = 1 (Quadrat!); $F(\frac{1}{4}u) = \frac{1}{16}u^2$ ist absolutes FlächenMaximum,
weil $F(0) = 0$ absolutes FlächenMinimum ist.

b) $u = 2a + b \Rightarrow b = u - 2a$
Flächeninhalt $F(a) = ab = a(u - 2a) = ua - 2a^2$
$F'(a) = u - 4a = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{4}u \Rightarrow b = u - 2a = \frac{1}{2}u$
a:b = 1:2; $F(\frac{1}{4}u) = \frac{1}{8}u^2$ ist absolutes FlächenMaximum,
weil $F(0) = 0$ absolutes FlächenMinimum ist.

c) $u = a + b \Rightarrow b = u - a$
Flächeninhalt $F(a) = ab = a(u - a) = ua - a^2$
$F'(a) = u - 2a = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}u \Rightarrow b = u - a = \frac{1}{2}u$
a:b = 1 (Quadrat!); $F(\frac{1}{2}u) = \frac{1}{4}u^2$ ist absolutes FlächenMaximum,
weil $F(0) = 0$ absolutes FlächenMinimum ist.

•13 Kreisbogen $b = \frac{r\pi}{180°}\mu$; Umfang $u = 2r + b = 2r + \frac{r\pi}{180°}\mu \Rightarrow \mu = \frac{u-2r}{r\pi} \cdot 180°$
Sektorfläche $F = \frac{r^2\pi}{360°}\mu = \frac{1}{2}(ur - 2r^2)$ $F'(r) = \frac{1}{2}(u - 4r) = 0 \Rightarrow r = \frac{1}{4}u$
FlächenMaximum $F(\frac{1}{4}u) = \frac{1}{16}u^2$ Mittelpunktwinkel $\mu = \frac{360°}{\pi} \approx 114{,}6°$

14 Strahlensatz: $\frac{y}{h} = \frac{c/2 - x/2}{c/2} \Rightarrow y = \frac{y}{h}(c - x)$



Rechteckfläche $F(x) = xy = \frac{y}{h}(c - x)x$

$F(x) = \frac{h}{c}(cx - x^2),\ 0 \leqq x \leqq c$

$F'(x) = \frac{h}{c}(c - 2x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}c \Rightarrow y = \frac{1}{2}h$

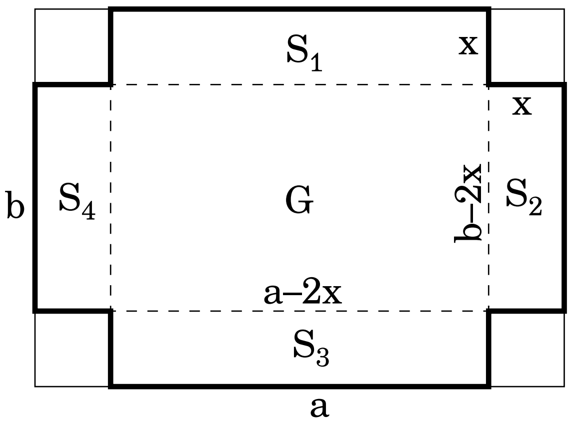
$F(\frac{1}{2}c) = \frac{1}{4}hc$ ist Maximalwert,
weil $F(c) = F(0) = 0$ das absolute Minimum ist.
Die Fläche des Dreiecks ist doppelt so groß wie die des Rechtecks.

15 Kantenlängen a, b und c
$4a + 4b + 4c = 504$, eine doppelt so lang wie eine andere: $c = 2b$
$4a + 4b + 4 \cdot 2b = 504 \Rightarrow a + 3b = 126 \Rightarrow a = 126 - 3b = 3(42 - b)$

a) Quadervolumen $V = abc$, a und c eingesetzt
$V(b) = 3(42 - b) \cdot b \cdot 2b = 6(42b^2 - b^3)$
$V'(b) = 18(28b - b^2) = 18b(28 - b)$
$V'(b) = 0 \Rightarrow b = 28,\ c = 2b = 56,\ a = 126 - 3b = 42$
$V = abc = 65856$

b) Quaderoberfläche $F = 2ab + 2ac + 2bc$, a und c eingesetzt
$F(b) = 2 \cdot 3(42 - b)b + 2 \cdot 3(42 - b) \cdot 2b + 2b \cdot 2b = 14(54b - b^2)$
$F'(b) = 14(54 - 2b) = 0 \Rightarrow b = 27,\ c = 54,\ a = 126 - 3b = 45$
$F(27) = 10206$

•16 Grundfläche $G = (a - 2x)(b - 2x),\ 0<x<b/2$



Volumen $V = Gh = Gx = (a - 2x)(b - 2x)x$
$V(x) = 4x^3 - 2bx^2 - 2ax^2 + abx$
$V'(x) = 12x^2 - 4(b + a)x + ab$

$V'(x) = 0 \Rightarrow x_\pm = \frac{a + b \pm \sqrt{a^2 - ab + b^2}}{6}$

$V''(x) = 24x - 4(b + a)$

$V''(x_+) = +\sqrt{a^2 - ab + b^2} > 0$

x_+ ist Stelle des relativen Minimums

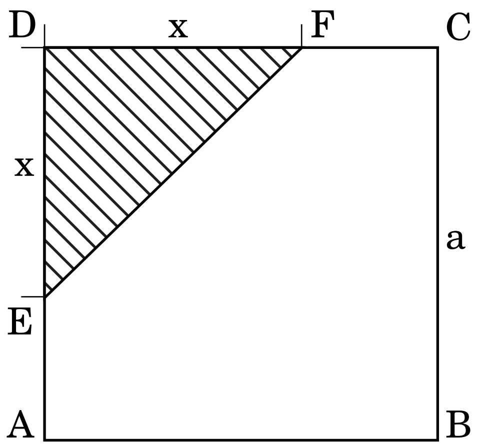
$V''(x_-) = -\sqrt{a^2 - ab + b^2} < 0 \Rightarrow x_- = \frac{a + b - \sqrt{a^2 - ab + b^2}}{6}$

ist Stelle des relativen Maximums

Sonderfall $a = b$: $x_- = \frac{a}{6}$

Fall $a = 21,\ b = 16 \Rightarrow x_- = 3,\ V(3) = 15 \cdot 10 \cdot 3 = 450$

17 Grundfläche der Pyramide $G = a^2 - \frac{1}{2}x^2$



Höhe der Pyramide $h = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,x$

(halbe Diagonale im x-Quadrat)

Volumen der Pyramide $V = \frac{1}{3}Gh$

$V(x) = \frac{1}{3}(a^2 - \frac{1}{2}x^2)\frac{1}{2}\sqrt{2}\,x = \frac{1}{6}\sqrt{2}\,(a^2x - \frac{1}{2}x^3)$

$V'(x) = \frac{1}{6}\sqrt{2}\,(a^2 - \frac{1}{2}3x^2)$

$V'(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{1}{3}\sqrt{6}\,a$

ist Stelle fürs VolumenMaximum,

denn $V(0) = 0$ ist absolutes Minimum.

$V_{max} = V(\frac{1}{3}\sqrt{6}\,a) = \frac{2}{27}\sqrt{3}a^3$

•18 Bezeichnungen und Beziehungen wie in 14: $y = \frac{h}{c}(c-x)$

a) Zylindervolumen $V(x) = r^2\pi y = (\frac{x}{2})^2\pi\frac{h}{c}(c-x) = \frac{\pi h}{4c}(cx^2-x^3),\ 0 \leqq x \leqq c$

$V'(x) = \frac{\pi h}{4c}(2cx - 3x^2) = \frac{\pi h}{4c}x(2c - 3x) = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{2}{3}c \;\Rightarrow\; y = \frac{1}{3}h$

$V(\frac{2}{3}c) = \frac{1}{27}\pi hc^2$ ist Maximalwert, denn $V(0) = V(c) = 0$ ist abs. Minimum

Kegelvolumen $\frac{1}{3}\pi h(\frac{c}{2})^2 = \frac{1}{12}\pi hc^2$; VolumenVerhältnis = 9 : 4

b) Zylindermantel $M(x) = 2r\pi y = x\pi\frac{h}{c}(c-x),\ 0 \leqq x \leqq c$

$M'(x) = \frac{\pi h}{c}(c - 2x) = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{c}{2}$

$M(\frac{c}{2}) = \frac{1}{4}ch\pi$ ist Maximalwert,denn $M(0)=M(c)=0$ ist abs. Minimum.

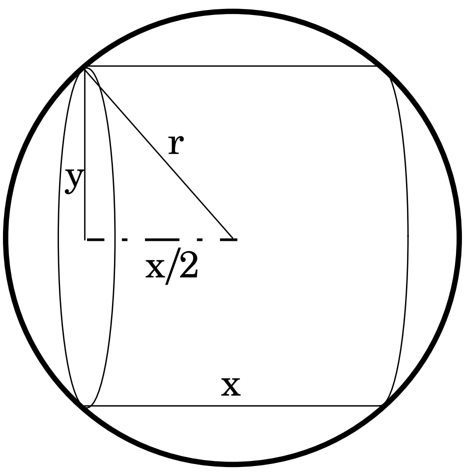
c) Zylinderoberfläche $F(x) = 2r^2\pi+2r\pi y = 2(\frac{x}{2})^2\pi+x\pi\frac{h}{c}(c-x),\ 0 \leqq x \leqq c$

$F'(x) = \pi x + \frac{\pi h}{c}(c - 2x) = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{ch}{2h-c}$ ist Stelle des relat. Maximums,

wenn $F''(x) = \frac{\pi}{c}(c - 2h) < 0$, wenn also $c < 2h$; $F_{max} = \frac{c\pi h^2}{4h-2c}$;

wenn $c \geqq 2h$ wächst $F(x)$ monoton.

19 Zylindervolumen $V(x) = y^2\pi x = (r^2 - (\frac{x}{2})^2)x$



$V(x) = \frac{1}{4}(4r^2x - x^3),\ 0 \leqq x \leqq 2r$

$V'(x) = \frac{1}{4}(4r^2 - 3x^2) = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{2}{3}\sqrt{3}\,r$

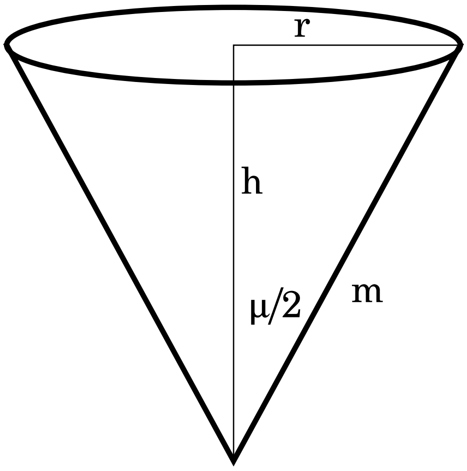
$V(\frac{2}{3}\sqrt{3}\,r) = \frac{4}{9}\sqrt{3}\,r^3\pi$ ist Maximum,

weil $V(0) = V(2r) = 0$

Kugelvolumen $= \frac{4}{3}r^3\pi$

Volumenverhältnis $= \sqrt{3}$

20 Kegelvolumen $V = \frac{1}{3}r^2\pi h$



Pythagoras: $r^2 = m^2 - h^2$

$V(h) = \frac{1}{3}(m^2 - h^2)\pi h = \frac{1}{3}\pi\,(m^2h - h^3)$

$V'(h) = \frac{1}{3}\pi\,(m^2 - 3h^2) = 0 \;\Rightarrow\; h = \frac{1}{3}\sqrt{3}\,m$

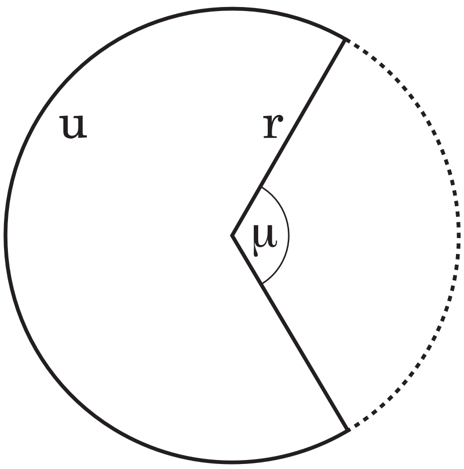
$V(\frac{1}{3}\sqrt{3}\,m) = \frac{2}{27}\sqrt{3}\,\pi m^3$ ist Maximum,

weil $V(m) = V(0) = 0$

Öffnungswinkel μ: $\cos\frac{1}{2}\mu = \frac{h}{m} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

$\Rightarrow\; \mu \approx 109{,}47°$.

21 Umfang $u = 2r\pi - \frac{2r\pi}{360°}\mu = \frac{r\pi}{180°}(360° - \mu)$



Bogenmaß erleichtert den Verkehr !

$u = r(2\pi - \mu)$

u ist auch der Umfang des Kegel-Grundkreises (Radius R): $u = 2R\pi$

$2R\pi = r(2\pi - \mu) \;\Rightarrow\; R = \frac{r}{2\pi}(2\pi - \mu)$

Höhe des Kegels: $h = \sqrt{r^2 - R^2}$

$h = \frac{r}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - (2\pi - \mu)^2} = \frac{r}{2\pi}\sqrt{4\pi\mu - \mu^2}$

Kegelvolumen:

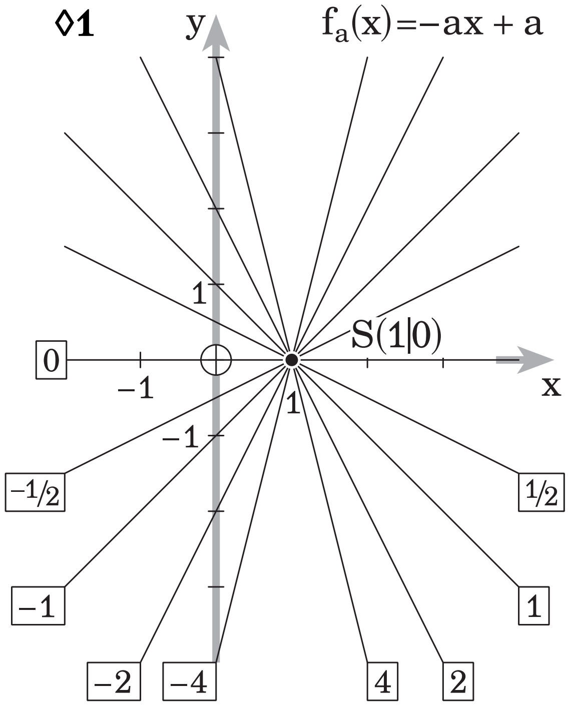
$V = \frac{1}{3}R^2\pi h = \frac{1}{12\pi^2}(2\pi - \mu)^2 r^2\pi\frac{r}{2\pi}\sqrt{4\pi\mu - \mu^2}$

$V = \frac{1}{24\pi^2}r^3\pi(2\pi - \mu)^2\sqrt{4\pi\mu - \mu^2}$

V. Scharen

Anmerkung: handelt eine Rechnung von 2 Scharkurven, so haben diese die Parameter a und u statt a_1 und a_2 – der Schreibaufwand verringert sich dann spürbar.

◊1



a) Am Achsenpunkt (0|a) erkennt man im Bild die Schargeraden.

b) $A(-1|2)$ auf f_a: $f_a(-1) = 2 \Rightarrow a + a = 2$
$a = 1$, $y = f_1(x) = -x+1$ geht durch A
$B\ (1|2)$: $f_a(1) = 2 \Rightarrow -a + a = 2$,
Widerspruch: durch B geht keine Gerade
$C(2|1)$: $f_a(2) = 1 \Rightarrow -2a + a = 1$
$a = -1$, $y = f_{-1}(x) = x-1$ geht durch C

c) der Parameter ist zugleich negative Steigung einer Gerade; die Gerade $y = f_{-1}(x) = x-1$ ist parallel zur Winkelhalbierenden des 1. Quadranten.

d) Eine Gerade senkrecht zur Gerade mit $y = 2x$ hat die Steigung $-1/2$,
Schargerade: $f_{1/2}(x) = -\frac{1}{2}2x + \frac{1}{2}$

e) der richtige Blick: $f_a(x) = -ax + a = -a(x-1) \Rightarrow x=1$ ist Nullstelle jeder Schargerade, also treffen sich alle Schargeraden in $S(1|0) \Rightarrow$ sonst:
Schnittpunkt zweier Schargeraden a, u ($a \neq u$): $f_a(x) = f_u(x)$
$-ax + a = -ux + u \Rightarrow x(u-a) = u-a \Rightarrow x = 1,\ y = f_a(1) = 0,\ S(1|0)$

f) Schargerade a: $f_a(x) = -ax + a$ Schargerade u: $f_u(x) = -ux + u$
Schargerade a gespiegelt an der y-Achse: $f_a(-x) = ax + a$
Schargerade a gespiegelt an der x-Achse: $-f_a(x) = ax - a$
Schargerade a gespiegelt am Ursprung: $-f_a(-x) = -(ax + a) = -ax - a$
Symmetrie zur y-Achse ?
$f_a(-x) = f_u(x)$: $ax + a = -ux + u \Rightarrow x(a+u) = -a+u$, es muss sein $(a+u)=0$ und $-a+u=0$, Widerspr. für $a \neq u$, keine Symm. zur y-Achse.
Symmetrie zur x-Achse ?
$-f_a(x) = f_u(x)$: $ax - a = -ux + u \Rightarrow x(a+u) = a+u$, beide Summen $(a+u)$ sind gleich 0 für $u = -a$, zur x-Achse symmetrische Schargeraden:
$y = f_a(x) = -ax + a$ und $y = f_{-a}(x) = ax - a$
Symmetrie zum Ursprung ?
$-f_a(-x) = f_u(x)$: $-ax-a = -ux + u \Rightarrow x(u-a) = a+u$, es muss sein $(u-a)=0$ und $a+u=0$, Widerspruch für $a \neq u$, keine Symm. zum Ursprung.

◊2 $f_a(x) = -a^2x + a$

Am Achsenpunkt (0|a) erkennt man im Bild die Schargeraden.

a) $\mathbf{A(\frac{1}{4}|1)}$ auf f_a: $f_a(\frac{1}{4}) = 1 \Rightarrow -a^2\frac{1}{4} + a = 1 \Rightarrow (\frac{1}{2}a - 1)^2 = 0 \Rightarrow a = 2$
A liegt auf der Schargerade: $y = f_2(x) = -4x + 2$

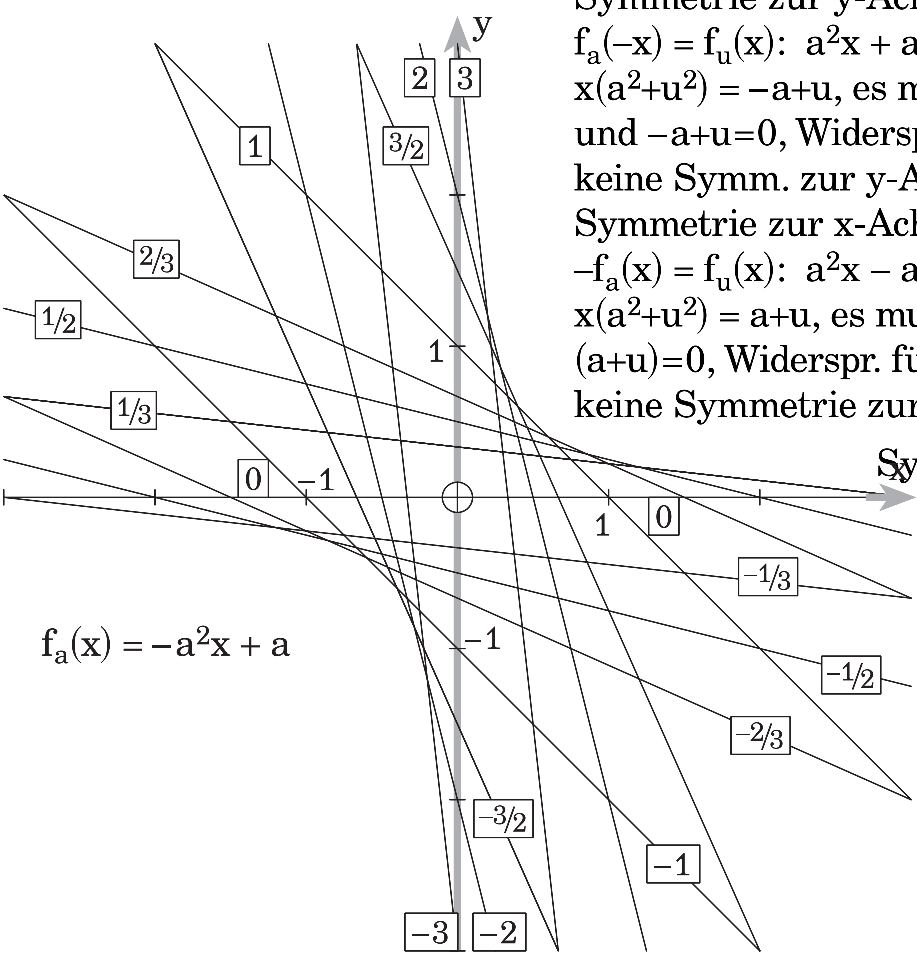
B(−3|2): $f_a(-3) = 2 \Rightarrow a = -1$ oder $a = \frac{2}{3}$, in B schneiden sich die Schargeraden: $y = f_{-1}(x) = -x - 1$ und $y = f_{2/3}(x) = -\frac{4}{9}x + \frac{2}{3}$
C(1|1): $f_a(1) = 1 \Rightarrow$ keine Lösung, durch C geht keine Schargerade
D($\frac{1}{2}$|$\frac{1}{2}$): $f_a(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 1$, durch D geht: $y = f_1(x) = -x + 1$
E(1|−2): $f_a(1) = -2 \Rightarrow a = -1$ oder $a = 2$, in E schneiden sich die Schargeraden: $y = f_{-1}(x) = -x - 1$ und $y = f_2(x) = -4x + 2$
F(−$\frac{1}{2}$|−1): $f_a(-\frac{1}{2}) = -1 \Rightarrow$ keine Lösung, durch F geht keine Scharger.

b) eine Schargerade parallel zur Winkelhalbierenden des 1. Quadranten muss die Steigung 1 haben, für sie muss sein: $-a^2 = 1$, keine Lösung, eine solche Schargerade gibt es nicht.

c) eine Schargerade senkrecht zur Gerade mit $y = \frac{1}{4}x$ muss die Steigung -4 haben, für sie muss sein: $-a^2 = -4 \Rightarrow a = \pm 2$
das sind die Schargeraden: $y = f_2(x) = -4x + 2$ und $y = f_{-2}(x) = -4x - 2$

d) Schnitt zweier Schargeraden ($a \neq u$): $f_a(x) = f_u(x)$, $-a^2x + a = -u^2x + u$
$\Rightarrow x(u^2-a^2) = u-a \Rightarrow x = \frac{1}{a+u}$, $y = f_a(\frac{1}{a+u}) = \frac{au}{a+u}$; $S(\frac{1}{a+u} | \frac{au}{a+u})$

e) Schargerade a: $f_a(x) = -a^2x + a$ Schargerade u: $f_u(x) = -u^2x + u$
Schargerade a gespiegelt an der y-Achse: $f_a(-x) = a^2x + a$
Schargerade a gespiegelt an der x-Achse: $-f_a(x) = a^2x - a$
Schargerade a gespiegelt am Ursprung: $-f_a(-x) = -a^2x - a$

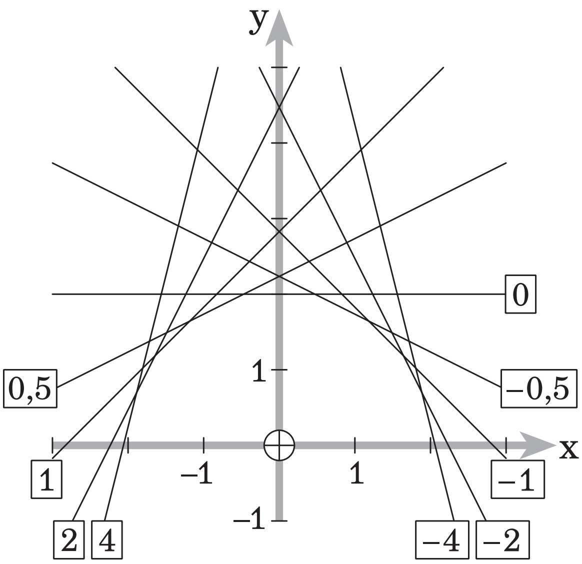


Symmetrie zur y-Achse ?
$f_a(-x) = f_u(x)$: $a^2x + a = -u^2x + u \Rightarrow$
$x(a^2+u^2) = -a+u$, es muss sein $(a^2+u^2)=0$ und $-a+u=0$, Widerspr. für $a \neq u$, keine Symm. zur y-Achse.

Symmetrie zur x-Achse ?
$-f_a(x) = f_u(x)$: $a^2x - a = -u^2x + u \Rightarrow$
$x(a^2+u^2) = a+u$, es muss sein $(a^2+u^2)=0$ und $(a+u)=0$, Widerspr. für $a \neq u$, keine Symmetrie zur x-Achse.

Symmetrie zum Ursprung?
$-f_a(-x) = f_u(x)$:
$-a^2x - a = -u^2x + u$
$\Rightarrow x(u^2-a^2) = a+u$,
es muss sein
$(u^2-a^2)=0$ und $a+u=0$
$\Rightarrow u = -a$,
zum Ursprung symmetrische Schargeraden:
$y = f_a(x) = -a^2x + a$ und
$y = f_{-a}(x) = -a^2x - a$

3 a)
$f_a(x) = ax + 2\sqrt{a^2+1}$



A(−1|2): $f_a(-1) = 2 \Rightarrow -a+2\sqrt{a^2+1} = 2$

$(2\sqrt{a^2+1})^2 = (2+a)^2$

$4a^2+4 = 4+4a+a^2 \Rightarrow a(3a-4) = 0$

$a = 0$ oder $a = 4/3$

durch A gehn die Schargeraden

$y = f_0(x) = 2$ und $y = f_{4/3}(x) = 4/3x + 10/3$

B(1|2): $f_a(1) = 2$

$a = 0$ oder $a = -4/3$

durch B gehn die Schargeraden

$y = f_0(x) = 2$ und $y = f_{-4/3}(x) = -4/3x + 10/3$

C(2|0): $f_a(2) = 0$

keine Lösung für a,

keine Schargerade geht durch C.

D($\sqrt{2}$|$\sqrt{2}$): $f_a(\sqrt{2}) = \sqrt{2} \Rightarrow a = -1$

Schargerade durch D: $y = f_{-1}(x) = -x + 2\sqrt{2}$

An der Steigung erkennt man im Bild die Schargeraden.

b) Schargerade a: $f_a(x) = ax + 2\sqrt{a^2+1}$

Schargerade u: $f_u(x) = ux + 2\sqrt{u^2+1}$

Schargerade a gespiegelt an der y-Achse: $f_a(-x) = -ax + 2\sqrt{a^2+1}$

Schargerade a gespiegelt an der x-Achse: $-f_a(x) = -ax - 2\sqrt{a^2+1}$

Schargerade a gespiegelt am Ursprung: $-f_a(-x) = ax - 2\sqrt{a^2+1}$

Symmetrie zur y-Achse ?

$f_a(-x) = f_u(x)$: $-ax + 2\sqrt{a^2+1} = ux + 2\sqrt{u^2+1}$

$x(a+u) = 2(\sqrt{a^2+1} - \sqrt{u^2+1})$,

es muss sein $(a+u)=0$ und $(\sqrt{a^2+1} - \sqrt{u^2+1})=0$,

weil $u = -a$ beide Gleichungen erfüllt, sind symmetrisch zur y-Achse die Scharger.: $y = f_a(x) = ax+2\sqrt{a^2+1}$ und $y = f_{-a}(x) = -ax+2\sqrt{a^2+1}$

Symmetrie zur x-Achse ?

$-f_a(x) = f_u(x)$: $-ax - 2\sqrt{a^2+1} = ux + 2\sqrt{u^2+1}$

$x(a+u) = -2(\sqrt{a^2+1} + \sqrt{u^2+1})$, hat keine Lösung wegen

$(\sqrt{a^2+1} + \sqrt{u^2+1}) \geqq 2$, also keine Symmetrie zur x-Achse

Symmetrie zum Ursprung ?

$-f_a(-x) = f_u(x)$: $ax - 2\sqrt{a^2+1} = ux + 2\sqrt{u^2+1}$

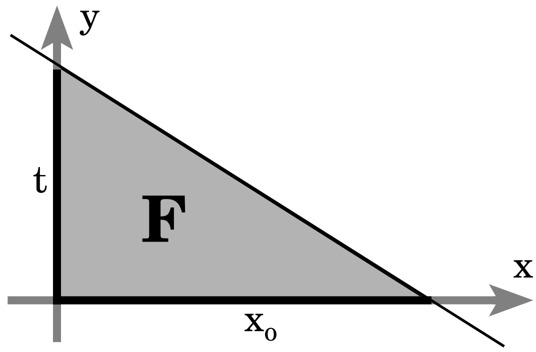
$x(a-u) = 2(\sqrt{a^2+1} + \sqrt{u^2+1})$, hat keine Lösung wegen

$(\sqrt{a^2+1} + \sqrt{u^2+1}) \geqq 2$, also keine Symmetrie zum Ursprung.

•4 Eigenschaft: Jede Schargerade geht durch (2|3)
Ansatz: $f_a(x) = k \cdot a(x-2) + 3$
der Faktor k ist nötig, weil es beliebig viele Terme gibt, die solche Geraden beschreiben: $a(x-2) + 3$, $2a(x-2) + 3$, $-\sqrt{3}\,a(x-2) + 3$, …
Eigenschaft: Die Schargerade mit $y = f_1(x)$ geht durch (1|4)
Gleichung: $f_1(1) = 4 \Rightarrow k \cdot 1(1-2) + 3 = 4 \Rightarrow -k = 1$
$f_a(x) = -a(x-2) + 3$

:5 Eine Geradenschar f_a habe die Eigenschaft:
Jede Schargerade und die Koordinatenachsen bestimmen ein rechtwinkliges Dreieck im 1. Quadranten vom Flächeninhalt 8.

a) Ansatz: $y = mx + t$
Nullstelle: $x_o = -\,{}^t/_m$
x_o und t sind die Katheten
Flächeninhalt $F = \frac{1}{2} x_o \cdot t = -\frac{1}{2} t^2/m$
Bedingung: $F = 8 \Rightarrow -\frac{1}{2} t^2/m = 8$



aufgelöst nach t: $t = \pm\sqrt{-16m}$,
Dreieck im 1.Quadranten: x_o und t sind positiv, also $t=\sqrt{-16m}$, $m<0$;
möglicher Scharterm $f_m(x) = mx + \sqrt{-16m}$, $m<0$
aufgelöst nach m: $m = -t^2/16$, $t>0$
möglicher Scharterm $f_t(x) = -\frac{t^2}{16}x + t$, $t>0$
als Lösung bieten sich an mit a als Parameter:
$f_a(x) = ax + \sqrt{-16a}$, $a<0$ (Steigung ist Parameter)
$f_a(x) = -\frac{a^2}{16}x + a$, $a>0$ (y-Achsenabschnitt als Parameter)

b) Schargerade g_k durch (4|4): $g_k(x) = k(x-4) + 4$
steht senkrecht auf einer Gerade der Schar mit
$f_a(x) = ax + \sqrt{-16a}$, $a<0$, für k gilt dann: $k = -\frac{1}{a}$, $g_a(x) = -\frac{1}{a}(x-4) + 4$
$f_a(x) = -\frac{a^2}{16}x + a$, $a>0$, für k gilt dann: $k = \frac{16}{a^2}$, $g_a(x) = \frac{16}{a^2}(x-4) + 4$

c) Schnittpunkte $(x_s|y_s)$ von f_a und g_a: $f_a(x) = g_a(x)$, je nach Term:
$ax + \sqrt{-16a} = -\frac{1}{a}(x-4) + 4 \Rightarrow x_s = \frac{4(1+a-a\sqrt{-a})}{1+a^2}$, $y_s = \frac{4(a^2+a+\sqrt{-a})}{1+a^2}$
$-\frac{a^2}{16}x + a = \frac{16}{a^2}(x-4) + 4 \Rightarrow x_s = \frac{16(a^3-4a^2+64)}{a^4+256}$, $y_s = \frac{4a(a^3-16a+64)}{a^4+256}$

6 $f_a(x) = 2x^2 - 4ax + a^2 + 4$

a) **A(1|3)**: $f_a(1) = 3 \Rightarrow a^2 - 4a + 6 = 3 \Rightarrow (a-1)(a-3) = 0$
durch A gehn die Parabeln: $f_1(x) = 2x^2 - 4x + 5$, $f_3(x) = 2x^2 - 12x + 13$
B(–1|2): $f_a(-1) = 2 \Rightarrow a^2 + 4a + 6 = 2 \Rightarrow (a+2)^2 = 0$
durch B geht die Parabel: $f_{-2}(x) = 2x^2 + 4x + 8$.
durch C(1|1) geht keine Parabel.

b) Parabelpunkte auf der y-Achse $(0|a^2 + 4)$: alle von $(0|4)$ an aufwärts

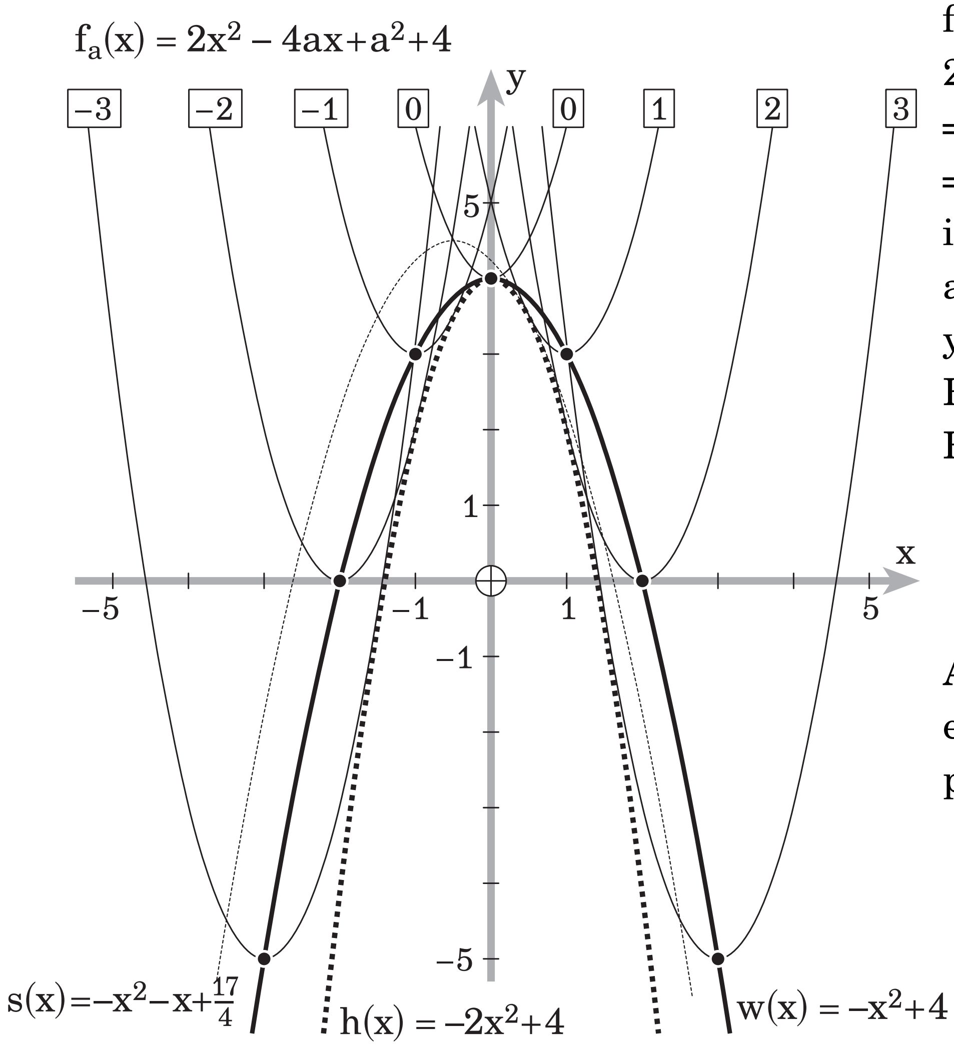
c) Nullstellen: $2x^2 - 4ax + a^2 + 4 = 0$, $D = 16a^2 - 8(a^2+4) = 8(a^2-4)$
2fache Nullstellen: $D = 0 \Rightarrow a = \pm 2$,
$f_2(x) = 2x^2 - 8x + 8 = 2(x-2)^2$ mit 2 als 2facher Nullstelle
$f_{-2}(x) = 2x^2 + 8x + 8 = 2(x+2)^2$ mit –2 als 2facher Nullstelle
1fache Nullstellen: $D > 0 \Rightarrow a^2 > 4$, $|a| > 2$, $a < -2$ oder $2 < a$
$x = a \pm \frac{\sqrt{2(a^2-4)}}{2}$ keine Nullstellen im Bereich $-2 < x < 2$

d) Symmetrie im Koordinatensystem
Scharparabel a: $f_a(x) = 2x^2 - 4ax + a^2 + 4$
Scharparabel u: $f_u(x) = 2x^2 - 4ux + u^2 + 4$
Scharparabel a gespiegelt an der y-Achse: $f_a(-x) = 2x^2 + 4ax + a^2 + 4$
Scharparabel a gespiegelt an der x-Achse: $-f_a(x) = -2x^2 + 4ax - a^2 - 4$
Scharparabel a gespiegelt am Ursprung: $-f_a(-x) = -2x^2 - 4ax - a^2 - 4$
Symmetrie zur y-Achse ?
$f_a(-x) = f_u(x)$: $2x^2 + 4ax + a^2 + 4 = 2x^2 - 4ux + u^2 + 4$
$4x(a+u) + (a^2-u^2) = 0 \Rightarrow (a+u)$ und (a^2-u^2) sind gleich 0 für $u = -a$, zur y-Achse symmetrische Schargeraden:
$y = f_a(x) = 2x^2 - 4ax + a^2 + 4$ und $y = f_{-a}(x) = 2x^2 + 4ax + a^2 + 4$
Symmetrie zur x-Achse und zum Ursprung ?
Fehlanzeige: alle Scharparabeln sind oben offen.

e) Waagrechtpunkte W_a: $f_a'(x) = 4x - 4a = 4(x - a)$
$f_a'(x) = 0 \Rightarrow x = a$, $y = f_a(a) = 4 - a^2$, $W_a(a|4 - a^2)$
Kurve der E_a: $w(x) = 4 - x^2$

f) Kurvenpunkte mit Steigung –2: $f_a'(x) = -2 \Rightarrow 4(x - a) = -2$
$a = x + \frac{1}{2}$ eingesetzt in Scharterm: $y = s(x) = -x^2 - x + \frac{17}{4}$

g) Die Kurve mit $y = h(x) = 4 - 2x^2$ berührt jede Scharkurve, wenn die Schnittstellen von h und f_a mindestens 2fach sind (oder die Diskriminante der Schnittgleichung gleich 0 ist).



$f_a(x) = h(x)$:
$2x^2-4ax+a^2+4=4-2x^2$
$\Rightarrow\ 4x^2 - 4ax + a^2 = 0$
$\Rightarrow\ (2x - a)^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}a$
ist 2fache Schnittstelle, also Berührstelle
$y = h(\frac{1}{2}a) = 4 - \frac{1}{2}a^2$
Berührpunkte Ba
$B_a(\frac{1}{2}a|4-\frac{1}{2}a^2)$

Am x-Wert des Scheitels erkennt man die Scharparabel.

7 $f_a(x) = x^2 + ax + \frac{1}{2}a^2$

a) $A(-2|1)$: $f_a(-2) = 1 \Rightarrow \frac{1}{2}a^2 - 2a + 4 = 1 \Rightarrow \frac{1}{2}(a^2 - 4a + 6) = 0$
keine Lösung, keine Scharparabel geht durch A.
$B(-2|2)$: $f_a(-2) = 2 \Rightarrow \frac{1}{2}(a^2 - 4a + 4) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}(a - 2)^2 = 0$
durch B geht die Scharparabel: $f_2(x) = x^2 + 2x + 2$
$C(-2|4)$: $f_a(-2) = 4 \Rightarrow \frac{1}{2}(a^2 - 4a) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}a(a - 4) = 0$
durch C gehen die Scharparabeln: $f_4(x) = x^2 + 4x + 8$ und $f_0(x) = x^2$.

b) Parabelpunkte auf der y-Achse $(0|a^2/_2)$: alle von $(0|0)$ an aufwärts

c) Scharkurve mit Tangente $y = t(x) = 2x + 2$
die Vielfachheit der Schnittstellen von $f_a(x)$ und $t(x)$ muss mindestens 2 sein; dann ist Diskriminante D der Schnittgleichung gleich 0:
$f_a(x) = t(x) \Rightarrow x^2 + (a-2)x + \frac{1}{2}a^2 - 2 = 0$
$D = (a-2)^2 - 2a^2 + 8 = -(a^2 + 4a - 12) = -(a + 6)(a - 2)$
$D = 0$: die Schnittstellen sind Berührstellen: $x = 1- {}^a/_2$, $y = 4-a$
$D = 0$: $\Rightarrow$ $a = -6$ oder $a = 2$; die Tangente berührt
$f_{-6}(x) = x^2 - 6x+ 18$ in $(4|10)$ und $f_2(x) = x^2 + 2x+ 2$ in $(0|2)$.

d) Schnittpunkt $(x_s|y_s)$ zweier Scharkurven: $f_a(x) = f_u(x)$

$x^2 + ax + \frac{1}{2}a^2 = x^2 + ux + \frac{1}{2}u^2 \;\Rightarrow\; x(a-u) + \frac{1}{2}(a^2-u^2) = 0 \,|\; :(a-u)$

$x_s = -\frac{1}{2}(a+u),\; y_s = \frac{1}{4}(a^2+u^2)$

e) Symmetrie im Koordinatensystem

Scharparabel a: $f_a(x) = x^2 + ax + \frac{1}{2}a^2$

Scharparabel u: $f_u(x) = x^2 + ux + \frac{1}{2}u^2$

Scharparabel a gespiegelt an der y-Achse: $f_a(-x) = x^2 - ax + \frac{1}{2}a^2$

Scharparabel a gespiegelt an der x-Achse: $-f_a(x) = -x^2 - ax - \frac{1}{2}a^2$

Scharparabel a gespiegelt am Ursprung: $-f_a(-x) = -x^2 + ax - \frac{1}{2}a^2$

Symmetrie zur y-Achse ?

$f_a(-x) = f_u(x)$: $x^2 - ax + \frac{1}{2}a^2 = x^2 + ux + \frac{1}{2}u^2 \;\Rightarrow\; x(a+u) + \frac{1}{2}(u^2-a^2) = 0$

$(a+u)$ und (u^2-a^2) sind gleich 0 für $u = -a$,

zur y-Achse symmetrische Scharparabeln:

$y = f_a(x) = x^2 + ax + \frac{1}{2}a^2$ und $y = f_{-a}(x) = x^2 - ax + \frac{1}{2}a^2$

Symmetrie zur x-Achse und zum Ursprung ?

Fehlanzeige: alle Scharparabeln sind oben offen.

f) Waagrechtpunkte $(x_w|y_w)$: $f_a'(x) = 2x + a$

$f_a'(x) = 0 \;\Rightarrow x_w = -\frac{1}{2}a,\; y_w = \frac{1}{2}a^2$

$f_a'(x) = 0 \;\Rightarrow\; a = -2x$ eingesetzt in $f_a(x)$

die Waagrechtpunkte liegen auf der Kurve mit $y = f_0(x) = x^2$

g) Kurvenpunkte mit Steigung 2

$f_a'(x) = 2 \;\Rightarrow\; a = 2 - 2x$ eingesetzt in $f_a(x)$: $y = f_{-2}(x) = x^2 - 2x + 2$

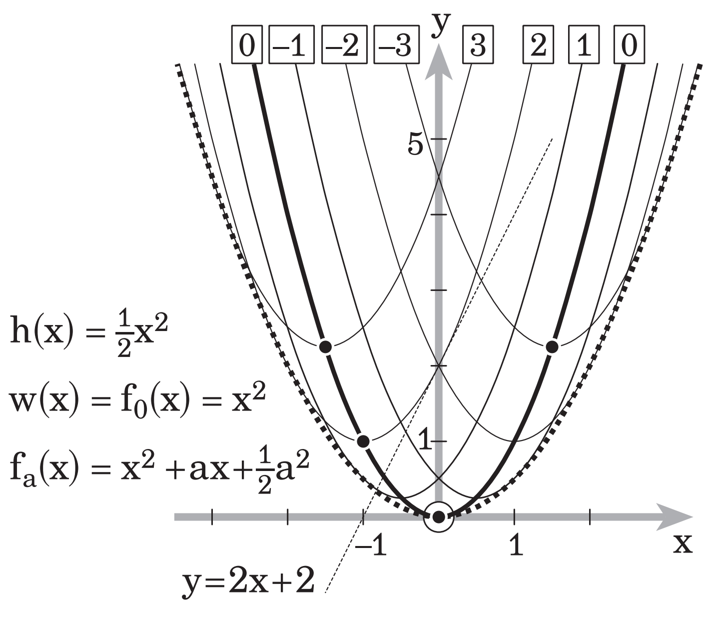
h) Ist Kurve mit $y = h(x) = \frac{1}{2}x^2$ Berührkurve ?

die Schnittstellen von $f_a(x) = h(x)$ müssen mindestens 2fach sein

$x^2 + ax + \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2}x^2 \;\Rightarrow\; (x-a)^2 = 0$, Berührstelle $x_a = a$, $y_a = \frac{1}{2}a^2$

Berührpunkt $B_a(a|\frac{1}{2}a^2)$

i) Bild rechts



8 $f_a(x) = x^2 + 2ax + a^2 + a$

a) $A(2|0)$: $f_a(2) = 0 \Rightarrow a^2 + 5a + 4 = 0 \Rightarrow (a + 1)(a + 4) = 0$
durch A gehn die Scharparabeln: $f_{-1}(x) = x^2 - 2x$ und $f_{-4}(x) = x^2 - 8x + 12$
$B(0|0)$: $f_a(0) = 0 \Rightarrow a^2 + a = 0 \Rightarrow a(a + 1) = 0$
durch B gehn die Scharparabeln: $f_{-1}(x) = x^2 - 2x$ und $f_0(x) = x^2$
$C(-2|0)$: $f_a(-2) = 0 \Rightarrow a^2 - 3a + 4 = 0 \Rightarrow$ keine Lösung
durch C geht keine Scharparabel

b) Parabelpunkte auf der y-Achse $(0|a^2 + a)$
$a^2 + a = (a+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$, also $-\frac{1}{4}$ ist der kleinste Wert von $a^2 + a$
von $(0|-\frac{1}{4})$ an aufwärts ist jeder y-Achsenpunkt auch Parabelpunkt.

•c) Nullstellen: $x^2 + 2ax + a^2 + a = 0$, $D = 4a^2 - 4a^2 - 4a = -4a$
$D = 0 \Rightarrow a = 0$, 2fache Nullstelle $x = 0$
$D > 0 \Rightarrow a < 0$, 1fache Nullstellen $x = - a \pm \sqrt{-a}$
$D < 0 \Rightarrow a > 0$, keine Nullstelle

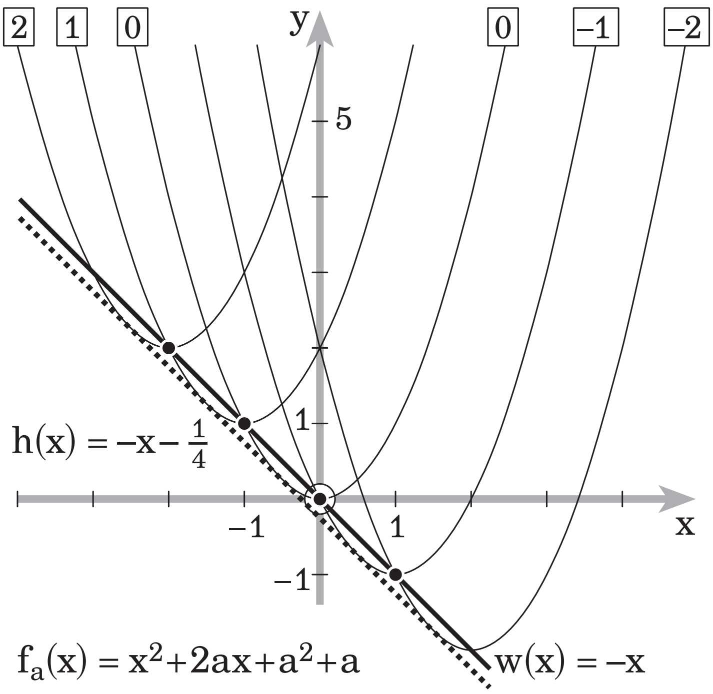
d) Schnittpunkt $(x_s|y_s)$: $f_a(x) = f_{-a}(x)$: $x^2 + 2ax + a^2 + a = x^2 - 2ax + a^2 - a$
$4ax + 2a = 0 \Rightarrow x_s = -\frac{1}{2}$, $y_s = a^2 + \frac{1}{4}$

e) Scharkurven schneiden sich auf der y-Achse: $a^2 + a = u^2 + u$
$u^2 + u - a^2 - a = 0$, $D = 1 + 4a^2 + 4a = (1+2a)^2$
$u = \frac{-1 \pm (2a+1)}{2}$, ($u = a$ oder) $u = -1-a$

f) Symmetrie im Koordinatensystem
Scharparabel a: $f_a(x) = x^2 + 2ax + a^2 + a$
Scharparabel u: $f_u(x) = x^2 + 2ux + u^2 + u$
Scharparabel a gespiegelt an der y-Achse: $f_a(-x) = x^2 - 2ax + a^2 + a$
Scharparabel a gespiegelt an der x-Achse: $-f_a(x) = - x^2 - 2ax - a^2 - a$
Scharparabel a gespiegelt am Ursprung: $-f_a(-x) = - x^2 + 2ax - a^2 - a$
Symmetrie zur y-Achse ?
$f_a(-x) = f_u(x)$: $x^2 - 2ax + a^2 + a = x^2 + 2ux + u^2 + u$
$2x(u+a) + (u^2-a^2) + (u-a) = 0 \Rightarrow$ keine Lösung, keine Symmetrie
Symmetrie zur x-Achse und zum Ursprung ?
Fehlanzeige: alle Scharparabeln sind oben offen.

g) Waagrechtpunkte $(x_w|y_w)$: $f_a'(x) = 2x + 2a = 2(x + a)$
$f_a'(x) = 0 \Rightarrow x_w = -a$, $y_w = a$
Kurve der Waagrechtpunkte: $y = - x$

•h) f_a ist eine Schar von Normalparabeln: spielt man am Parameter, dann rutschen ihre Scheitel auf der Winkelhalbierenden $y = -x$,
beim Rutschen überstreichen die Parabeln ein Gebiet, das begrenzt ist von einer Gerade, die parallel zu dieser Winkelhalbierenden sein muss, also die Gleichung hat: $y = h(x) = -x + t$.



Bestimmung von t so,
dass die Schnittstellen von f_a
und h 2fach sind:
$x^2 + 2ax + a^2 + a = -x + t$
$x^2 + (2a+1)x + a^2 + a - t = 0$
$D = (2a+1)^2 - 4a^2 - 4a + 4t$
$\quad = 1 + 4t$
Bedingung:
$D = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{4}$;
gemeinsame Tangente:
$y = -x - \frac{1}{4}$

9 $f_a(x) = \frac{1}{a}x^2 + a$

a) Scharkurve a: $f_a(x) = \frac{1}{a}x^2 + a$ Scharkurve u: $f_u(x) = \frac{1}{u}x^2 + u$
Scharkurve a gespiegelt an der y-Achse: $f_a(-x) = \frac{1}{a}x^2 + a$
Scharkurve a gespiegelt an der x-Achse: $-f_a(x) = -\frac{1}{a}x^2 - a$
Scharkurve a gespiegelt am Ursprung: $-f_a(-x) = -\frac{1}{a}x^2 - a$
Symmetrie zur y-Achse ?
$f_a(-x) = f_u(x)$: $\frac{1}{a}x^2 + a = \frac{1}{u}x^2 + u \Rightarrow$ keine Lösung für $a \neq u$,
kein Parabelpaar liegt symmetrisch zur y-Achse,
aber wegen $f_a(-x) = f_a(x)$ ist jede Parabel symmetrisch zur y-Achse.

Symmetrie zur x-Achse ?
$-f_a(x) = f_u(x)$: $-\frac{1}{a}x^2 - a = \frac{1}{u}x^2 + u \Rightarrow x^2(\frac{1}{u} + \frac{1}{a}) + (u + a) = 0 \mid \cdot au$
$x^2(a + u) + au(a + u) = 0$ also $u = -a$,
also Symmetrie zur x-Achse: $f_a(x) = \frac{1}{a}x^2 + a$ und $f_{-a}(x) = -\frac{1}{a}x^2 - a$

Symmetrie zum Ursprung ?
$-f_a(-x) = f_u(x)$: $-\frac{1}{a}x^2 - a = \frac{1}{u}x^2 + u$ (wie bei Symmetrie zur x-Achse)
also Symmetrie zur x-Achse: $f_a(x) = \frac{1}{a}x^2 + a$ und $f_{-a}(x) = -\frac{1}{a}x^2 - a$

b) Nullstellen: $\frac{1}{a}x^2 + a = 0 \mid \cdot a \Rightarrow x^2+a^2 = 0$, keine Lösung, denn x^2+a^2 ist wegen $a \neq 0$ immer positiv, keine Scharkurve trifft die x-Achse.

c) Schnittpunkt $(x_s|y_s)$ zweier Scharparabeln: $f_a(x) = f_u(x)$
$\frac{1}{a}x^2 + a = \frac{1}{u}x^2 + u \mid \cdot au \Rightarrow x^2(u-a) - au(u-a) = 0$
$x_s = \pm\sqrt{au}$, $y_s = a + u$

d) Waagrechtpunkte
Weil jede Scharparabel symmetrisch zur y-Achse ist, ist die y-Achse die Kurve, auf der die Parabelscheitel liegen.

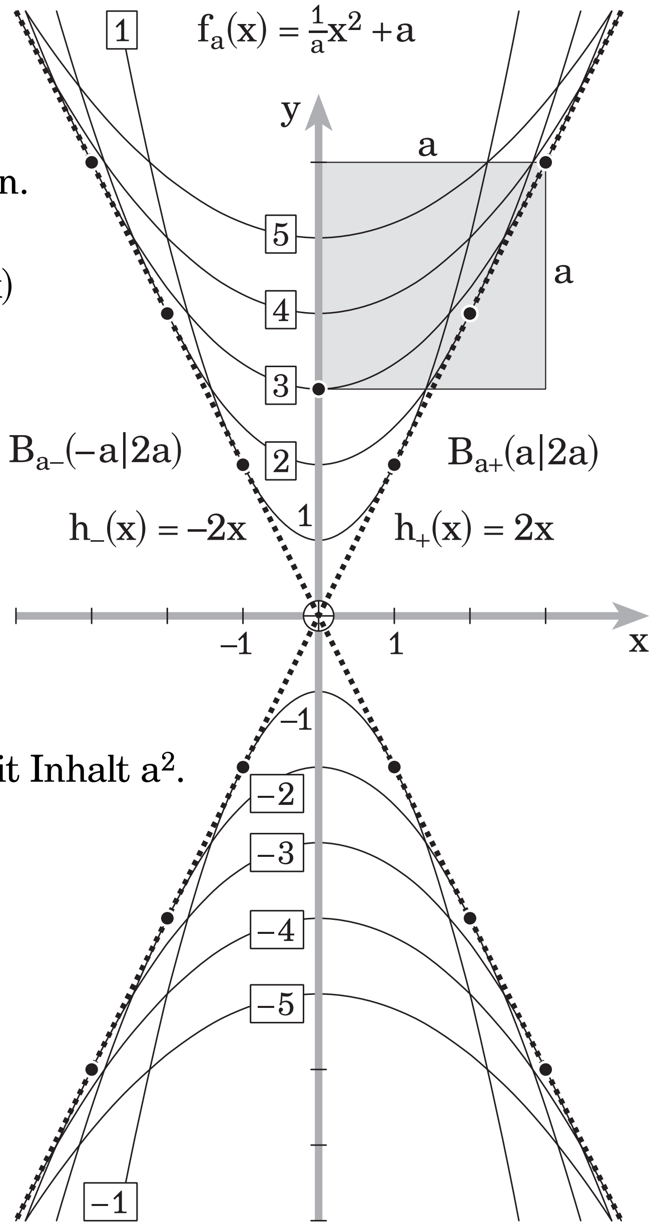
e) Ist y= h(x) = 2x Tangente ?
die Schnittstellen von $f_a(x) = h(x)$ müssen mindestens 2fach sein:

$\frac{1}{a}x^2 + a = 2x \mid \cdot a$

$x^2 - 2ax + a^2 = 0$

$(x-a)^2 = 0$, also $B_a(a|2a)$

f) Berührpunkt $B_a(a|2a)$,
Scheitel $S_a(0|a)$
Rechteckbreite = a,
Rechteckhöhe = 2a − a = a
das Rechteck ist ein Quadrat mit Inhalt a^2.



10 $f_a(x) = \frac{1}{2}(x^2 - ax - \frac{3}{4}a^2)$

a) Symmetrie: $f_a(x) = \frac{1}{2}(x^2 - ax - \frac{3}{4}a^2)$ $\quad f_u(x) = \frac{1}{2}(x^2 - ux - \frac{3}{4}u^2)$
Scharparabel a gespiegelt an der y-Achse: $f_a(-x) = \frac{1}{2}(x^2 + ax - \frac{3}{4}a^2)$
Scharparabel a gespiegelt an der x-Achse: $-f_a(x) = -\frac{1}{2}(x^2 - ax - \frac{3}{4}a^2)$
Scharparabel a gespiegelt am Ursprung: $-f_a(-x) = -\frac{1}{2}(x^2 + ax - \frac{3}{4}a^2)$
Symmetrie zur y-Achse ?

$f_a(-x) = f_u(x)$: $\frac{1}{2}(x^2 + ax - \frac{3}{4}a^2) = \frac{1}{2}(x^2 - ux - \frac{3}{4}u^2)$

$x(a+u) - \frac{3}{4}(a^2 - u^2) = 0 \Rightarrow$ (a+u) und (a^2-u^2) sind gleich 0 für u = −a,

zur y-Achse symmetrische Schargeraden:

$y = f_a(x) = \frac{1}{2}(x^2 - ax - \frac{3}{4}a^2)$ und $y = f_{-a}(x) = \frac{1}{2}(x^2 + ax - \frac{3}{4}a^2)$

alle Scharparabeln sind oben offen:
weder Symmetrie zur x-Achse noch zum Ursprung.

b) Nullstellen: $f_a(x) = 0 \Rightarrow x^2 - ax - \frac{3}{4}a^2 = 0,\ D = a^2 + 3a^2 = 4a^2$

$D = 0 \Rightarrow a = 0 : f_0(x) = x^2$ hat die 2fache Nullstelle 0

$D > 0 \Rightarrow a \neq 0 : f_a(x)$ hat 2 1fache Nullstellen $x = \frac{a \pm 2a}{2}$

$x = -\frac{1}{2}a$ und $x = \frac{3}{2}a$

c) Schnittpunkt $(x_s|y_s)$ zweier Scharparabeln: $f_a(x) = f_u(x)$

$x(a-u) + \frac{3}{4}(a^2-u^2) = 0$

$x_s = -\frac{3}{4}(a+u)$,

$y_s = \frac{3}{32}(3a^2 + 10au + 3u^2)$

d) Schnittpunkt von $f_a(x)$ und $f_{-2a}(x)$: in **c)** u durch $-2a$ ersetzen

$x_s = \frac{3}{4}a,\ y_s = -\frac{15}{32}a^2$,

a eliminieren: $y_s = -\frac{5}{6}x_s^2$

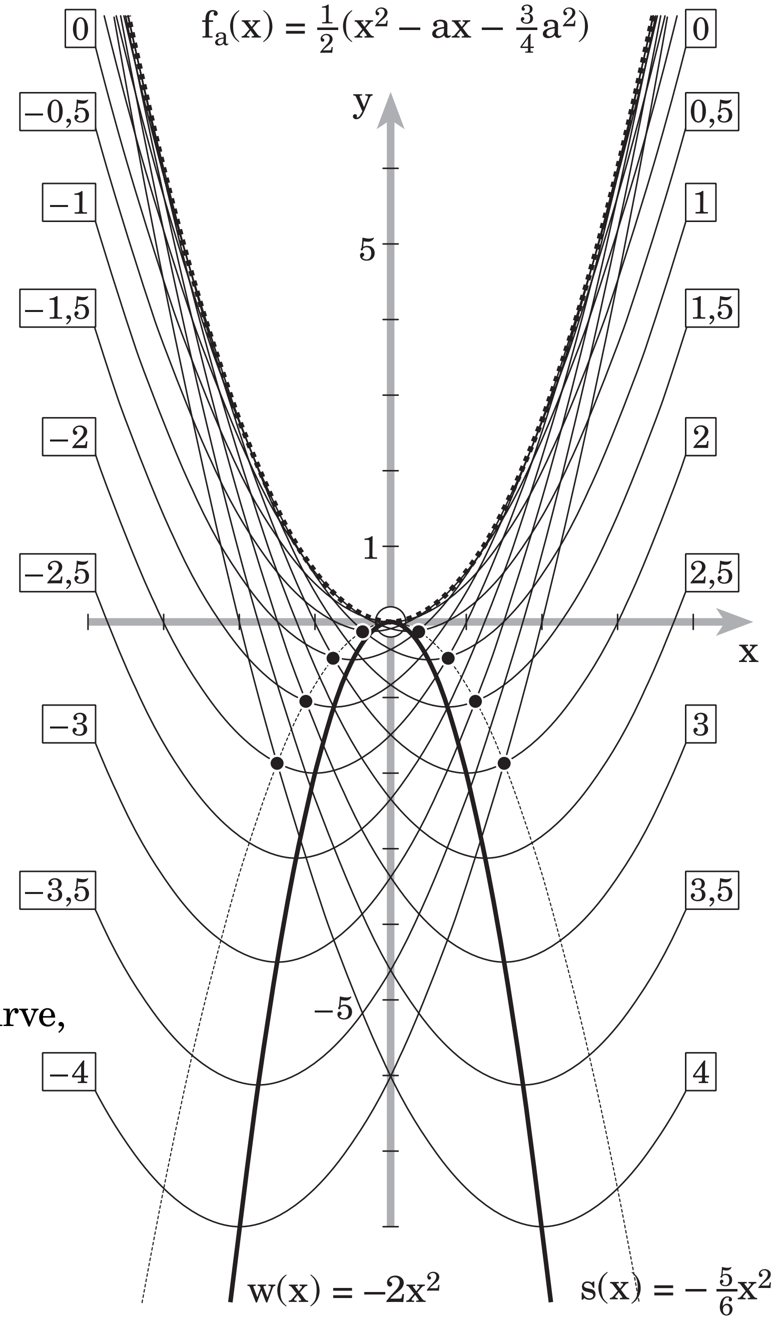
e) Kurve der Scheitel:

$f_a'(x) = 0$

$2x - a = 0 \Rightarrow a = 2x$

eingesetzt in $f_a(x)$:

$y = w(x) = -2x^2$



f) Ist $y = h(x) = \frac{2}{3}x^2$ Berührkurve, so müssen die Schnittstellen von $h(x)$ und $f_a(x)$ mindestens 2fache Vielfachheit haben

$f_a(x) = h(x)$:

$\frac{1}{2}(x^2 - ax - \frac{3}{4}a^2) = \frac{2}{3}x^2$

$(2x+3a)^2 = 0$, also Berührung

Berührpunkt $B_a(-\frac{3}{2}a|\frac{3}{2}a^2)$

:11 $f_a(x) = \frac{1}{12}x(x-a)^2 = \frac{1}{12}(x^3 - 2ax^2 + a^2x)$

a) Symmetrie: $f_a(x) = \frac{1}{12}(x^3 - 2ax^2 + a^2x)$ $\quad f_u(x) = \frac{1}{12}(x^3 - 2ux^2 + u^2x)$

Scharkurve a gespiegelt an der y-Achse: $f_a(-x) = \frac{1}{12}(-x^3 - 2ax^2 - a^2x)$

Scharkurve a gespiegelt an der x-Achse: $-f_a(x) = -\frac{1}{12}(x^3 - 2ax^2 + a^2x)$

Scharkurve a gespiegelt am Ursprung: $-f_a(-x) = \frac{1}{12}(x^3 + 2ax^2 + a^2x)$

Symmetrie zur y-Achse ?

$f_a(-x) = f_u(x)$: $\frac{1}{12}(-x^3-2ax^2-a^2x) = \frac{1}{12}(x^3-2ux^2+u^2x)$

$2x^3-2(u-a)x^2 + (u^2+a^2)x = 0$, keine Identität herstellbar: bei x^3 steht kein Faktor, der 0 werden könnte, also keine Symmetrie zur y-Achse

Symmetrie zur x-Achse ?

$-f_a(x) = f_u(x)$: $-\frac{1}{12}(x^3-2ax^2+a^2x) = \frac{1}{12}(x^3-2ux^2+u^2x)$

$2x^3-2(u+a)x^2 + (u^2+a^2)x = 0$, keine Identität herstellbar: bei x^3 steht kein Faktor, der 0 werden könnte, also keine Symmetrie zur x-Achse

Symmetrie zum Ursprung?

$-f_a(-x) = f_u(x)$: $\frac{1}{12}(x^3+2ax^2+a^2x) = \frac{1}{12}(x^3-2ux^2+u^2x)$

$2(a+u)x^2 + (a^2-u^2)x = 0$, Identität, falls $u = -a$

Symmetrie zum Ursprung: $f_a(x)=\frac{1}{12}x(x-a)^2$ und $f_{-a}(x)=\frac{1}{12}x(x+a)^2$

b) Waagrechtpunkte $W(x_w|y_w)$: $f_a'(x) = 0$

$3x^2 - 4ax + a^2 = 0$, $D = 16a^2 - 12a^2 = 4a^2$, $x = \frac{1}{6}(4a \pm 2a)$

$x_w = a$, $y_w = 0$, also liegen auf der x-Achse Waagrechtpunkte $W_1(a|0)$

$x_w = \frac{1}{3}a$, $y_w = \frac{1}{81}a^3$, $W_2(\frac{1}{3}a|\frac{1}{81}a^3)$, Kurve der W_2: $y = w(x) = \frac{1}{3}x^3$

Art der Waagrechtpunkte

$f_a''(x) = \frac{1}{12}(6x-4a) = \frac{1}{6}(3x-2a)$

$W_1(a|0)$: $f_a''(a) = \frac{1}{6}a = 0 \Rightarrow a = 0$, Ursprung ist Terrassenpunkt von f_0

$W_1(a|0)$: $f_a''(a) = \frac{1}{6}a > 0 \Rightarrow a > 0$, Tiefpunkte auf der pos. x-Achse

$W_1(a|0)$: $f_a''(a) = \frac{1}{6}a < 0 \Rightarrow a < 0$, Hochpunkte auf der neg. x-Achse

$W_2(\frac{1}{3}a|y_w)$: $f_a''(\frac{1}{3}a) = -\frac{1}{6}a > 0 \Rightarrow a < 0$,

W_2 links von der y-Achse sind Tiefpunkte

$W_2(\frac{1}{3}a|y_w)$: $f_a''(\frac{1}{3}a) = -\frac{1}{6}a < 0 \Rightarrow a > 0$,

W_2 rechts von der y-Achse sind Hochpunkte

c) Flachpunkte $F(x_f|y_f)$: $f_a''(x) = 0 \Rightarrow x_f = \frac{2}{3}a$ $F(\frac{2}{3}a|\frac{1}{162}a^3)$

die Flachpunkte sind Wendepunkte, sie liegen auf $y = u(x) = \frac{1}{48}x^3$

d) Schar t_a der Wendetangenten

Steigung im Wendepunkt $F(\frac{2}{3}a|\frac{1}{162}a^3)$: $m_a = f_a'(\frac{2}{3}a) = -\frac{1}{36}a^2$

Ansatz: $t_a(x) = m_a x + c_a \Rightarrow \frac{1}{162}a^3 = -\frac{1}{36}a^2 \cdot \frac{2}{3}a + c_a \Rightarrow c_a = \frac{2}{81}a^3$

$t_a(x) = -\frac{1}{36}a^2x + \frac{2}{81}a^3$

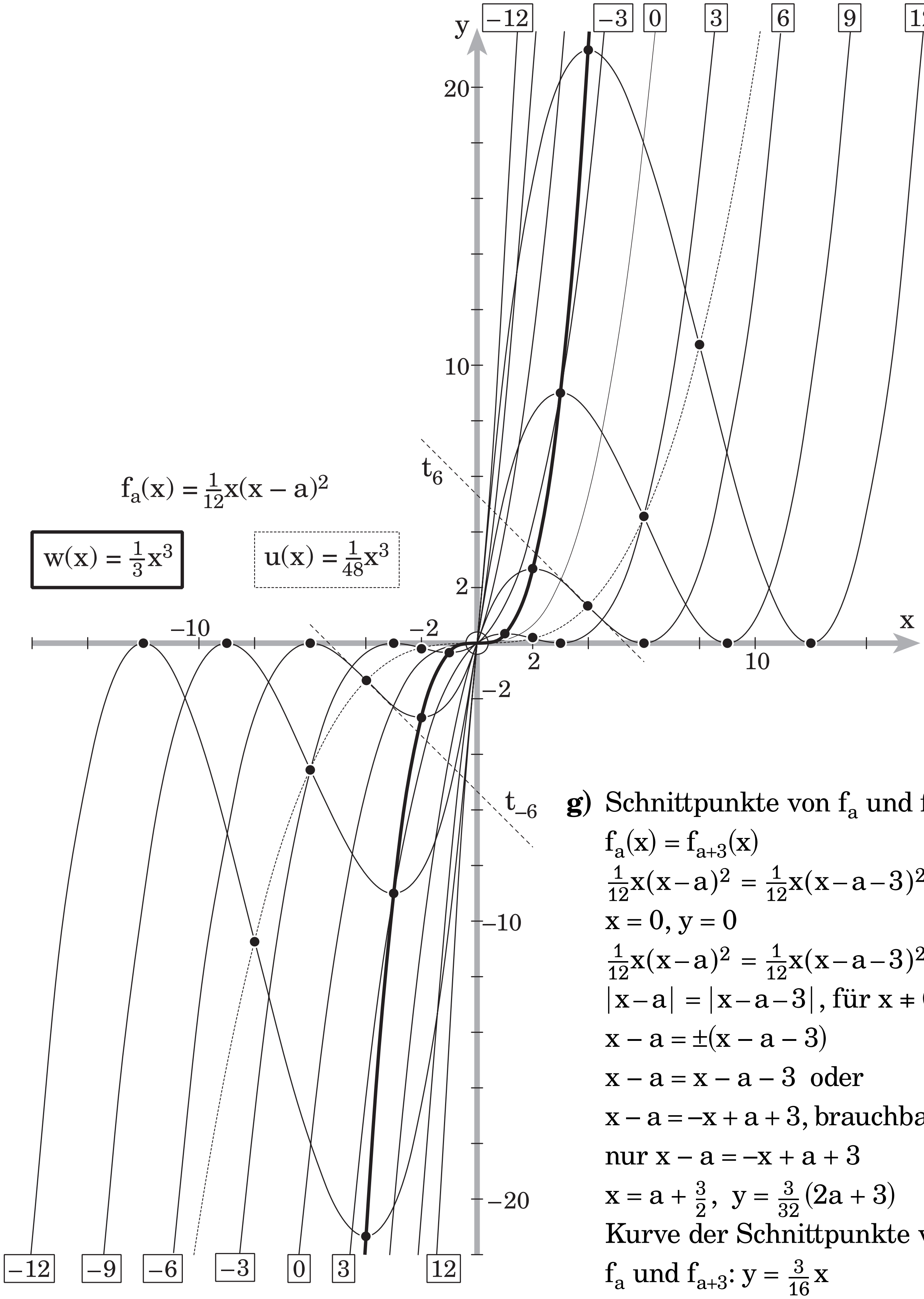
e) Die Winkelhalbierende des 2. und 4. Quadranten $y = -x$ hat die Steigung -1, also muss sein $m_a = -\frac{1}{36}a^2 = -1 \Rightarrow a = \pm 6$

Wendetangenten: $t_{\pm 6}(x) = -x \pm \frac{16}{3}$

f) Nullstelle einer Wendetangente: $t_a(x) = 0 \Rightarrow \quad x = \frac{8}{9}a$

Bedingung: $\frac{1}{2} \cdot x \cdot c_a = 72$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{8}{9}a \cdot \frac{2}{81}a^3 = 72 \;\Rightarrow\; \frac{8}{729}a^4 = 72 \;\Rightarrow\; a = \pm 9$



g) Schnittpunkte von f_a und f_{a+3}:

$f_a(x) = f_{a+3}(x)$

$\frac{1}{12}x(x-a)^2 = \frac{1}{12}x(x-a-3)^2$

$x = 0, y = 0$

$\frac{1}{12}x(x-a)^2 = \frac{1}{12}x(x-a-3)^2$

$|x-a| = |x-a-3|$, für $x \neq 0$

$x - a = \pm(x - a - 3)$

$x - a = x - a - 3$ oder

$x - a = -x + a + 3$, brauchbar ist

nur $x - a = -x + a + 3$

$x = a + \frac{3}{2}, \;\; y = \frac{3}{32}(2a + 3)$

Kurve der Schnittpunkte von f_a und f_{a+3}: $y = \frac{3}{16}x$

•12 $f_a(x) = \frac{1}{8}(x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - 12x)$

a) Symmetrie im Koordinatensystem

$f_u(x) = \frac{1}{8}(x^3 - 3ux^2 + 3u^2x - 12x)$

Kurve a gespiegelt an der y-Achse: $f_a(-x) = \frac{1}{8}(-x^3 - 3ax^2 - 3a^2x + 12x)$

Kurve a gespiegelt an der x-Achse: $-f_a(x) = -\frac{1}{8}(x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - 12x)$

Kurve a gespiegelt am Ursprung: $-f_a(-x) = \frac{1}{8}(x^3 + 3ax^2 + 3a^2x - 12x)$

Symmetrie zur y-Achse ?

$f_a(-x) = f_u(x)$: $\frac{1}{8}(-x^3 - 3ax^2 - 3a^2x + 12x) = \frac{1}{8}(x^3 - 3ux^2 + 3u^2x - 12x)$

$2x^3 - 3(u-a)x^2 + 3(u^2+a^2)x = 0$, keine Identität herstellbar: bei x^3 steht kein Faktor, der 0 werden könnte, also keine Symmetrie zur y-Achse

Symmetrie zur x-Achse ?

$-f_a(x) = f_u(x)$: $-\frac{1}{8}(x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - 12x) = \frac{1}{8}(x^3 - 3ux^2 + 3u^2x - 12x)$

$2x^3 - 3(u+a)x^2 + 3(u^2+a^2)x = 0$, keine Identität herstellbar: bei x^3 steht kein Faktor, der 0 werden könnte, also keine Symmetrie zur x-Achse

Symmetrie zum Ursprung ?

$-f_a(-x) = f_u(x)$: $\frac{1}{8}(x^3 + 3ax^2 + 3a^2x - 12x) = \frac{1}{8}(x^3 - 3ux^2 + 3u^2x - 12x)$

$3(a+u)x^2 + 3(a^2 - u^2)x = 0$, Identität, falls $u = -a$

Symmetrie zum Ursprung: $f_a(x)$ und $f_{-a}(x)$.

b) Nullstellen: $f_a(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{8}x(x^2 - 3ax + 3a^2 - 12) = 0 \Rightarrow x = 0$ (1fach)

oder $x^2 - 3ax + 3a^2 - 12 = 0$, $D = 9a^2 - 4(3a^2 - 12) = 3(16 - a^2)$

$D = 0$, $a^2 = 16 \Rightarrow a = \pm 4$, 2fache Nullstellen $x = \frac{3}{2}a$

$f_4(x) = \frac{1}{8}x(x-6)^2$ hat auch die 2fache Nullstelle 6

$f_{-4}(x) = \frac{1}{8}x(x+6)^2$ hat auch die 2fache Nullstelle -6

$D < 0$, $a^2 > 16 \Rightarrow a < -4$ oder $a > 4$, außer $x=0$ keine Nullstelle

$D > 0$, $a^2 < 16 \Rightarrow -4 < a < 4$, neben $x=0$ noch zwei 1fache Nullstellen

$x = \frac{3a \pm \sqrt{3(16-a^2)}}{2}$

c) Waagrechtpunkte W: $f_a'(x) = \frac{3}{8}(x^2 - 2ax + a^2 - 4) = 0$, $D = 16$

$x = \frac{2a \pm 4}{2} \Rightarrow x_+ = a + 2$ oder $x_- = a - 2$

$f_a''(x) = \frac{3}{4}(x - a)$; $f_a''(x_+) = \frac{3}{2} > 0 \Rightarrow x_+$ ist x-Wert der Tiefpunkte

$f_a''(x_-) = -\frac{3}{2} < 0 \Rightarrow x_-$ ist x-Wert der Hochpunkte

Kurve der Tiefpunkte $(a+2|\frac{1}{8}(a+2)(a^2-2a-8)$: $y = w_+(x) = \frac{1}{8}x^2(x-6)$

Kurve der Hochpunkte $(a-2|\frac{1}{8}(a+2)(a^2+2a-8)$: $y = w_-(x) = \frac{1}{8}x^2(x+6)$

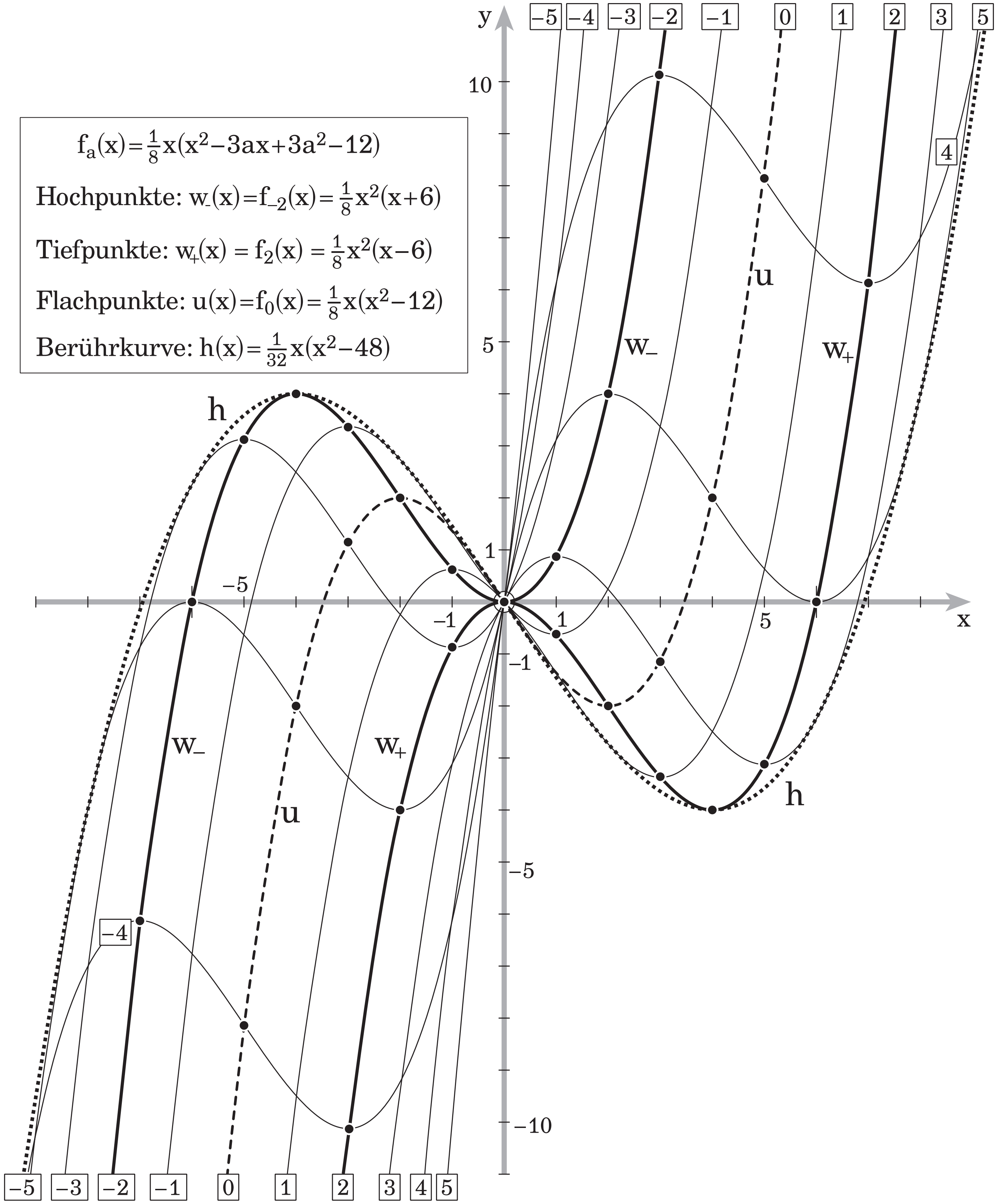
d) Kurve der Flachpunkte: $f_a''(x) = \frac{3}{4}(x - a) = 0$

$x = a$ eingesetzt in $f_a(x)$: $y = u(x) = \frac{1}{8}x(x^2 - 12)$

e) $y = h(x) =$ ist Berührkurve, wenn die Schnittstellen von $f_a(x) = h(x)$ mindestens 2fach sind $\frac{1}{8}x(x^2 - 3ax + 3a^2 - 12) = \frac{1}{32}x(x^2 - 48)$

$3x^3 - 12ax^2 + 12a^2x = 0 \Rightarrow 3x(x^2 - 4ax + 4a^2) = 0$

$3x(x - 2a)^2 = 0$, $x = 2a$ ist 2fache Schnittstelle, also $B_a(2a \mid \frac{1}{4}a(a^2 - 12))$



•13 $f_a(x) =$

a) Symmetrie im Koordinatensystem
$f_u(x) = \frac{1}{81}(3x^4 - ux^3 + 3ux^2)$
Kurve a gespiegelt an der y-Achse: $f_a(-x) = \frac{1}{81}(3x^4 + ax^3 + 3ax^2)$
Kurve a gespiegelt an der x-Achse: $-f_a(x) = -\frac{1}{81}(3x^4 - ax^3 + 3ax^2)$
Kurve a gespiegelt am Ursprung: $-f_a(-x) = -\frac{1}{81}(3x^4 + ax^3 + 3ax^2)$
Symmetrie zur y-Achse ?
$f_a(-x) = f_u(x)$: $\frac{1}{81}(3x^4 + ax^3 + 3ax^2) = \frac{1}{81}(3x^4 - ux^3 + 3ux^2)$
$\Rightarrow$ $(a+u)x^3 + 3(a-u)x^2 = 0$, keine Identität herstellbar,
also keine Symmetrie zur y-Achse.
Symmetrie zur x-Achse ?
$-f_a(x) = f_u(x)$: $-\frac{1}{81}(3x^4 - ax^3 + 3ax^2) = \frac{1}{81}(3x^4 - ux^3 + 3ux^2)$
$\Rightarrow$ $6x^4 - (u+a)x^3 + 3(u+a)x^2 = 0$, keine Identität herstellbar,
also keine Symmetrie zur x-Achse.
Symmetrie zum Ursprung ?
$-f_a(-x) = f_u(x)$: $-\frac{1}{81}(3x^4 + ax^3 + 3ax^2) = \frac{1}{81}(3x^4 - ux^3 + 3ux^2)$
$\Rightarrow$ $6x^4 - (u-a)x^3 + 3(u+a)x^2 = 0$, keine Identität herstellbar,
also keine Symmetrie zuUrsprung.

b) Nullstellen: $f_a(x) = \frac{1}{81}(3x^4 - ax^3 + 3ax^2) = \frac{1}{81}x^2(3x^2 - ax + 3a) = 0$
$x = 0$ ist 2fache Nullstelle
$3x^2 - ax + 3a = 0$, $D = a^2 - 36a = a(a-36)$
$D = 0 \Rightarrow a=0$ oder $a=36$: 2fache Nullstellen von $f_0(x)$ und $f_{36}(x)$
$f_0(x) = \frac{1}{27}x^4$ mit 0 als 4facher Nullstelle
$f_{36}(x) = \frac{1}{27}x^2(x-6)^2$ mit 0 und 6 als 2fache Nullstellen
$D < 0 \Rightarrow 0<a<36$: außer $x=0$ keine weiteren Nullstellen
$D > 0 \Rightarrow a<0$ oder $36<a$: außer $x=0$ zwei 1fache Nullstellen:
$x = \frac{a \pm \sqrt{a(a-36)}}{6}$

c) Schnitte von $f_a(x)$ und $f_u(x)$: $f_a(x) = f_u(x) \Rightarrow x=0, y=0$; außerdem:
$3x^2 - ax + 3a = 3x^2 - ux + 3u \Rightarrow x(a-u) = 3(a-u) \Rightarrow x=3, y=3$

d) Waagrechtpunkte W: $f_a'(x) = \frac{1}{27}x(4x^2 - ax + 2a) = 0$
$x = 0$ ist Waagrechtstelle
$4x^2 - ax + 2a = 0$, $D = a^2 - 32a = a(a-32)$
$D = 0 \Rightarrow a=0$ oder $a=32$:
die 2fachen Waagrechtstellen $^a/_8$ von $f_0(x)$ und $f_{32}(x)$
$D < 0 \Rightarrow 0<a<32$: außer $x=0$ keine weiteren Waagrechtstellen
$D > 0 \Rightarrow a<0$ oder $32<a$: außer $x=0$ noch Waagrechtstellen
$x = \frac{a \pm \sqrt{a(a-32)}}{8}$

Kurve der Waagrechtpunkte: $4x^2 - ax + 2a = 0$

$a = \frac{4x^2}{x-2}$ eingesetzt in $f_a(x)$: $y = w(x) = \frac{x^4(6-x)}{81(x-2)}$

e) Flachpunkte F: $f_a''(x) = \frac{2}{27}(6x^2 - ax + a) = 0$

$6x^2 - ax + a = 0$, $D = a^2 - 24a = a(a-24)$

$D = 0 \Rightarrow$ a=0 oder a=24: 2fache Flachstellen von $f_0(x)$ und $f_{24}(x)$

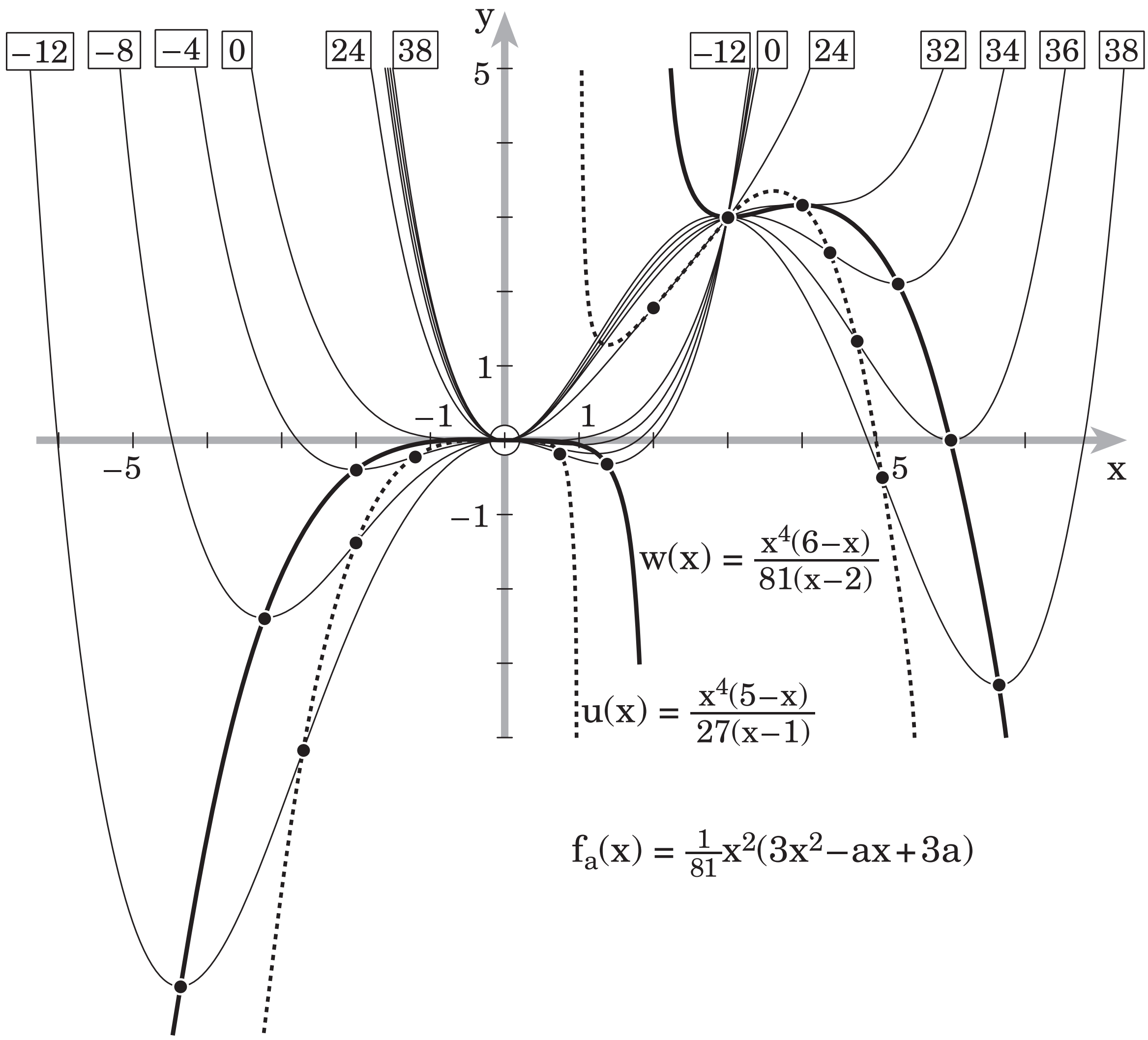
$x = {}^a/_{12}$ sind keine Wendestellen

$(0|0)$ von f_0 ist Tiefpunkt und Flachpunkt

$(2|{}^{16}/_9)$ von f_{24} ist Flachpunkt, aber kein Wendepunkt

Kurve der Flachpunkte: $6x^2 - ax + a = 0 \Rightarrow a = \frac{6x^2}{x-1}$ eingesetzt in $f_a(x)$:

$y = u(x) = \frac{x^4(5-x)}{27(x-1)}$



VI. Technik des Ableitens

Verlangte Definitionsmengen sind nur dann angegeben, wenn sie von $\mathbb{R}$ abweichen.
n steht für eine natürliche Zahl, z für eine ganze Zahl.

◊1 Berechne die Grenzwerte für $x \to 0$ und verwende dabei $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

a) $\frac{x}{\sin x}$ **b)** $\frac{\sin 2x}{2x}$ **c)** $\frac{\sin x}{2x}$ **d)** $\frac{\sin 2x}{3x}$ **e)** $\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$

f) $\frac{\tan x}{\sin x}$ **g)** $\frac{\tan x}{x}$ **h)** $\frac{\tan 2x}{\sin x}$ **i)** $\frac{\tan 2x - \sin 3x}{\sin 4x}$

Es geht hier bloß darum, die Ausdrücke so umzuformen, dass Muster von $\frac{\sin(\text{irgendwas})}{\text{irgendwas}}$ entstehn.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}} = \frac{1}{1} = 1$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x} = \lim\limits_{2x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x} = 1$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x} = \frac{2}{3}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x} = \frac{2}{3}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2x}{\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3x} = \frac{2}{3}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 2x}{2x}}{\frac{\sin 3x}{3x}} = \frac{2}{3}\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1} = \frac{2}{3}$

f) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1} = 1$

g) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = 1\cdot 1 = 1$

h) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan 2x}{2x}\cdot\frac{2x}{\sin x}\right) = 2\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\tan 2x}{2x}\cdot\frac{x}{\sin x}\right) = 2\cdot 1\cdot 1 = 2$

i) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 2x - \sin 3x}{\sin 4x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\tan 2x}{2x}\cdot 2x - \frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3x}{\frac{\sin 4x}{4x}\cdot 4x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2\frac{\tan 2x}{2x} - 3\frac{\sin 3x}{3x}}{4\frac{\sin 4x}{4x}} = \frac{2-3}{4} = \frac{-1}{4}$

◊2 Gegeben ist ein Funktionsterm f(x). Bestimme f'(x) sowie $D_{f\,max}$ und $D_{f'}$.

a) $x^n\sqrt{x},\ x \geqq 0$ $\quad (x^n\sqrt{x})' = nx^{n-1}\sqrt{x} + x^n\frac{1}{2\sqrt{x}},\ x>0$

b) $x^n\sin x$ $\quad (x^n\sin x)' = nx^{n-1}\sin x + x^n\cos x$

c) $x^n\cos x$ $\quad (x^n\cos x)' = nx^{n-1}\cos x - x^n\sin x$

d) $x^n\tan x,\ x \neq \frac{\pi}{2}(2z+1)$ $\quad (x^n\tan x)' = nx^{n-1}\tan x + x^n(1+(\tan x)^2),$

$x \neq \frac{\pi}{2}(2z+1)$

e) $\sqrt{x}\sin x,\ x \geqq 0$ $\quad (\sqrt{x}\sin x)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\sin x + \sqrt{x}\cos x,\ x>0$

f) $\sqrt{x}\cos x,\ x \geqq 0$ $\quad (\sqrt{x}\cos x)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cos x - \sqrt{x}\sin x,\ x>0$

g) $\sqrt{x}\tan x,\ x \geqq 0 \wedge x \neq \frac{\pi}{2}(2n-1)$; $(\sqrt{x}\tan x)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\tan x + \sqrt{x}(1+(\tan x)^2)$,

$x>0 \wedge x \neq \frac{\pi}{2}(2n-1)$

h) $\sin x \cos x$ $\quad (\sin x \cos x)' = (\cos x)^2 - (\sin x)^2$

i) $\sin x \tan x,\ x \neq \frac{\pi}{2}(2z+1)$

$(\sin x \tan x)' = \cos x \cdot \tan x + \sin x \cdot (1+(\tan x)^2) = (2+(\tan x)^2)\sin x$

j) $\cos x \tan x,\ x \neq \frac{\pi}{2}(2z+1)$

$(\cos x \tan x)' = -\sin x \cdot \tan x + \cos x \cdot (1+(\tan x)^2)$

◊3 Gegeben ist ein Funktionsterm f(x). Bestimme f'(x) sowie $D_{f\,max}$ und $D_{f'}$.

a) $((2x-1)(x^2-2x-1))' = 2(x^2-2x-1)+(2x-1)(2x-2) = 2x(3x-5)$

b) $((1-x)(x^3-3)(x^2+x+1))' =$

$= -1(x^3-3)(x^2+x+1)+(1-x)3x^2(x^2+x+1)+(1-x)(x^3-3)(2x+1)$

$= 6x^2(2-x^3)$

c) $(2x-2x^3)\sqrt{x},\ x \geqq 0$

$((2x-2x^3)\sqrt{x})' = (2-6x^2)\sqrt{x}+(2x-2x^3)\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{x(2-6x^2)+x-x^3}{\sqrt{x}} =$

$= \frac{x(3-7x^2)}{\sqrt{x}} = (3-7x^2)\sqrt{x},\ x>0$

d) $2x(x+2)(x-3)\sqrt{x},\ x \geqq 0$

$(2x(x+2)(x-3)\sqrt{x})' = 2((x^3-x^2-6x)\sqrt{x})' =$

$= 2(3x^2-2x-6)\sqrt{x}+2(x^3-x^2-6x)\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{x(7x^2-5x-18)}{\sqrt{x}}$

$= (7x^2-5x-18)\sqrt{x} = (7x+9)(x-2)\sqrt{x},\ x>0$

◊4 Gegeben ist ein Funktionsterm f(x). Bestimme f'(x) sowie $D_{f\,max}$ und $D_{f'}$.

a) $\frac{x^n}{\sqrt{x}},\ x>0$ $\quad \left(\frac{x^n}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{\sqrt{x}\cdot nx^{n-1} - \frac{x^n}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2x\cdot nx^{n-1}-x^n}{x\cdot 2\sqrt{x}} = \frac{(2n-1)x^{n-1}}{2\sqrt{x}}$

b) $\frac{x^n}{\sin x},\ x \neq z\pi$ $\quad \left(\frac{x^n}{\sin x}\right)' = \frac{nx^{n-1}\sin x - x^n\cdot\cos x}{(\sin x)^2}$

c) $\frac{x^n}{\cos x},\ x \neq \frac{\pi}{2}(2z-1)$ $\quad \left(\frac{x^n}{\cos x}\right)' = \frac{nx^{n-1}\cos x + x^n\cdot\sin x}{(\cos x)^2}$

d) $\frac{x^n}{\tan x},\ x \neq \frac{\pi}{2}\cdot z$ $\quad \left(\frac{x^n}{\tan x}\right)' = \frac{nx^{n-1}\tan x - x^n\cdot(1+(\tan x)^2)}{(\tan x)^2}$

e) $\frac{\sqrt{x}}{\sin x},\ x>0 \wedge x \neq n\pi$ $\quad \left(\frac{\sqrt{x}}{\sin x}\right)' = \frac{\frac{\sin x}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}\cos x}{(\sin x)^2} = \frac{\sin x + 2x\cos x}{2\sqrt{x}(\sin x)^2}$

f) $\frac{\sqrt{x}}{\cos x}$, $x>0 \wedge x \neq \frac{\pi}{2}(2n-1)$ $\quad \left(\frac{\sqrt{x}}{\cos x}\right)' = \frac{\frac{\cos x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\sin x}{(\cos x)^2} = \frac{\cos x - 2x\sin x}{2\sqrt{x}(\cos x)^2}$

g) $\frac{\sqrt{x}}{\tan x}$, $x>0 \wedge x \neq \frac{\pi}{2}\cdot n$ $\quad \left(\frac{\sqrt{x}}{\tan x}\right)' = \frac{\frac{\tan x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}(1+(\tan x)^2)}{(\tan x)^2} = \frac{\tan x - 2x(1+(\tan x)^2)}{2\sqrt{x}(\tan x)^2}$

h) $\frac{\sin x}{\tan x}$, $x \neq \frac{\pi}{2}\cdot z$ $\quad \left(\frac{\sin x}{\tan x}\right)' = \left(\frac{\sin x \cdot \cos x}{\sin x}\right)' = (\cos x)' = -\sin x$

i) $\frac{\cos x}{\tan x}$, $x \neq \frac{\pi}{2}\cdot z$ $\quad \left(\frac{\cos x}{\tan x}\right)' = \left(\frac{(\cos x)^2}{\sin x}\right)' = \frac{-2\cos x\cdot(\sin x)^2 - (\cos x)^3}{(\sin x)^2} =$

$$= \frac{-2(\cos x)(1-(\cos x)^2) - (\cos x)^3}{(\sin x)^2} = \frac{-2(\cos x) + (\cos x)^3}{(\sin x)^2} =$$

$$= \frac{(\cos x)((\cos x)^2 - 2)}{(\sin x)^2}$$

anderer Weg: $\left(\frac{\cos x}{\tan x}\right)' = \frac{-\sin x\cdot\tan x - \cos x\cdot\frac{1}{(\cos x)^2}}{(\tan x)^2} = \frac{-\sin x\cdot\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\cos x - 1}{(\frac{\sin x}{\cos x})^2\cos x} =$

$$= \frac{-(\sin x)^2 - 1}{\sin x\cdot\tan x}$$

◊5 Gegeben ist ein Funktionsterm f(x). Bestimme f'(x) sowie $D_{f\,max}$ und $D_{f'}$.

a) $\frac{1-x}{3+x^2}$ $\quad \left(\frac{1-x}{3+x^2}\right)' = \frac{(3+x^2)(-1)-(1-x)2x}{(3+x^2)^2} = \frac{x^2-2x-3}{(3+x^2)^2} = \frac{(x+1)(x-3)}{(3+x^2)^2}$

b) $\frac{x^2-5}{3-x}$, $x \neq 3$ $\quad \left(\frac{x^2-5}{3-x}\right)' = \frac{(3-x)(2x)-(x^2-5)(-1)}{(3-x)^2} = \frac{-(x^2-6x+5)}{(3-x)^2} = -\frac{(x-1)(x-5)}{(3-x)^2}$

c) $\frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+1} = \frac{x^2+2x+2}{(x+1)^2}$, $x \neq -1$

$$\left(\frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+1}\right)' = \frac{(x^2+2x+1)(2x+2)-(x^2+2x+2)(2x+2)}{(x+1)^4} = \frac{-2}{(x+1)^3}$$

d) $\frac{(x-2)(x^2-8x+12)}{x^2}$, $x \neq 0$

$$\left(\frac{(x-2)(x^2-8x+12)}{x^2}\right)' = \frac{x^2(1(x^2-8x+12)+(x-2)(2x-8))-(x-2)(x^2-8x+12)2x}{x^4}$$

$$= \frac{x^2((x-2)(x-6)+(x-2)(2x-8))-(x-2)(x-2)(x-6)2x}{x^4}$$

$$= \frac{x(x-6+2x-8)-(x-2)(x-6)2}{x^4}(x-2)x = \frac{3x^2-14x-(2x^2-16x+24)}{x^3}(x-2) =$$

$$= \frac{x^2+2x-24}{x^3}(x-2) = \frac{(x+6)(x-2)(x-4)}{x^3},\ x \neq 0$$

e) $\frac{x+5}{(x+2)(1-3x)}$, $x \neq -2 \wedge x \neq \frac{1}{3}$

$$\left(\frac{x+5}{(x+2)(1-3x)}\right)' = \frac{(x+2)(1-3x)-(x+5)((1-3x)-3(x+2))}{((x+2)(1-3x))^2} =$$

$$= \frac{(2-5x-3x^2)-(x+5)(-5-6x)}{((x+2)(1-3x))^2} = \frac{2-5x-3x^2-(-25-35x-6x^2)}{((x+2)(1-3x))^2} =$$

$$= \frac{27+30x+3x^2}{((x+2)(1-3x))^2} = \frac{3(x^2+10x+9)}{((x+2)(1-3x))^2} = \frac{3(x+9)(x+1)}{((x+2)(1-3x))^2}$$

f) $\frac{2x^2-6x}{3\sqrt{x}}$, $x>0$

$$\left(\frac{2x^2-6x}{3\sqrt{x}}\right)' = \frac{1}{3}\cdot\frac{2(2x-3)\sqrt{x}-2(x^2-3x)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{1}{3}\cdot\frac{2(2x-3)x-(x^2-3x)}{x\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{2(2x-3)-(x-3)}{\sqrt{x}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{4x-6-x+3}{\sqrt{x}} = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$$

g) $\frac{\sqrt{x}-1}{x}$, $x>0$

$$\left(\frac{\sqrt{x}-1}{x}\right)' = \frac{x\frac{1}{2\sqrt{x}}-\sqrt{x}+1}{x^2} = \frac{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}-2(\sqrt{x}-1)}{2x^2} = \frac{\sqrt{x}-2\sqrt{x}+2}{2x^2} = \frac{2-\sqrt{x}}{2x^2}$$

h) $\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right)' = \frac{-1}{2\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x}+1)^2}, \; x>0$$

andrer Weg:

$$\left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\right)' = \frac{(x-1)\frac{1}{2\sqrt{x}}-(\sqrt{x}-1)}{(x-1)^2} = \frac{x-1-2\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x}-1)}{2\sqrt{x}\cdot(x-1)^2} = \frac{-x+2\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}\cdot(x-1)^2} =$$

$$= \frac{-(x-2\sqrt{x}+1)}{2\sqrt{x}\cdot(x-1)^2} = \frac{-(\sqrt{x}-1)^2}{2\sqrt{x}\cdot((\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1))^2} = \frac{-1}{2\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x}+1)^2}$$

6

gegeben	gesucht: Schachtelterm f(x) und $D_{f\,max}$					
	a)	**b)**	**c)**	**d)**	**e)**	**f)**
$p(x) = x^n$	p(p(x))	p(w(x))	p(b(x))	p(s(x))	p(c(x))	p(t(x))
$w(x) = \sqrt{x}$	w(p(x))	w(w(x))	w(b(x))	w(s(x))	w(c(x))	w(t(x))
$b(x) = \lvert x \rvert$	b(p(x))	b(w(x))	b(b(x))	b(s(x))	b(c(x))	b(t(x))
$s(x) = \sin x$	s(p(x))	s(w(x))	s(b(x))	s(s(x))	s(c(x))	s(t(x))
$c(x) = \cos x$	c(p(x))	c(w(x))	c(b(x))	c(s(x))	c(c(x))	c(t(x))
$t(x) = \tan x$	t(p(x))	t(w(x))	t(b(x))	t(s(x))	t(c(x))	t(t(x))

7 Leite die Schachtelterme in **6** ab und bestimme $D_{f'}$.

Lösungen von Aufgabe **6** und **7**:
Motto: Kettenregel nur dann, wenns anders nicht geht oder zu schwierig ist.

a) $f(x) = p(p(x)) = (x^n)^n = x^{n^2}$ $\qquad f'(x) = n^2x^{n^2-1}$

$f(x) = w(p(x)) = \sqrt{x^n}$; $\qquad f'(x) = \frac{n}{2\sqrt{x^n}} \cdot x^{n-1} = \frac{n}{2x}\sqrt{x^n}$

n ungerade: $x \geqq 0$ $\qquad$ n gerade: $x \neq 0$, sonst $x > 0$

$f(x) = b(p(x)) = |x^n|$

n gerade: $f(x) = x^n$ $\qquad f'(x) = nx^{n-1}$

n ungerade: $f(x) = |x^n|$ $\qquad f'(x) = \operatorname{sgn}|x^n| \cdot nx^{n-1}$, $x \neq 0$

$f(x) = s(p(x)) = \sin(x^n)$ $\qquad f'(x) = \cos(x^n) \cdot nx^{n-1}$

$f(x) = c(p(x)) = \cos(x^n)$ $\qquad f'(x) = -\sin(x^n) \cdot nx^{n-1}$

$f(x) = t(p(x)) = \tan(x^n)$, $x \neq \frac{\pi}{2}(2z+1)$ $\qquad f'(x) = \frac{nx^{n-1}}{(\cos x^n)^2}$

b) $f(x) = p(w(x)) = (\sqrt{x})^n$, $x \geqq 0$ $\qquad f'(x) = \frac{n(\sqrt{x})^{n-1}}{2\sqrt{x}} = \frac{n}{2}\frac{\sqrt{x}}{x}$, $x > 0$

$f(x) = w(w(x)) = \sqrt{\sqrt{x}}$, $x \geqq 0$ $\qquad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\sqrt{x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{4\sqrt{x\sqrt{x}}}$, $x > 0$

$f(x) = b(w(x)) = |\sqrt{x}| = \sqrt{x}$, $x \geqq 0$ $\qquad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$

$f(x) = s(w(x)) = \sin\sqrt{x}$, $x \geqq 0$ $\qquad f'(x) = \cos\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$

$f(x) = c(w(x)) = \cos\sqrt{x}$, $x \geqq 0$ $\qquad f'(x) = -\sin\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$

$f(x) = t(w(x)) = \tan\sqrt{x}$, $x \neq \frac{\pi}{2}(2n-1)$; $\qquad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}(\cos\sqrt{x})^2}$, $x > 0 \land x \neq \frac{\pi}{2}(2n-1)$

c) $f(x) = p(b(x)) = |x|^n$
n gerade: $f(x) = x^n f'(x) = nx^{n-1}$
n ungerade: $f(x) = |x|^n$ $\qquad f'(x) = n|x|^{n-1} \cdot \operatorname{sgn} x$, $x \neq 0$

$f(x) = w(b(x)) = \sqrt{|x|}$ $\qquad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{|x|}} \cdot \operatorname{sgn} x$, $x \neq 0$

$f(x) = b(b(x)) = ||x|| = |x|$ $\qquad f'(x) = \operatorname{sgn} x$, $x \neq 0$
$f(x) = s(b(x)) = \sin|x|$ $\qquad f'(x) = \cos|x| \cdot \operatorname{sgn} x$, $x \neq 0$
$f(x) = c(b(x)) = \cos|x|$ $\qquad f'(x) = -\sin|x| \cdot \operatorname{sgn} x$, $x \neq 0$

$f(x) = t(b(x)) = \tan|x|$, $x \neq \frac{\pi}{2}(2z-1)$ $\qquad f'(x) = \frac{\operatorname{sgn} x}{(\cos|x|)^2}$, $x > 0 \land x \neq \frac{\pi}{2}(2z-1)$

d) $f(x) = p(s(x)) = (\sin x)^n$ $\qquad f'(x) = n(\sin x)^{n-1} \cdot \cos x$
$f(x) = w(s(x)) = \sqrt{\sin x}$, $2(n-1)\pi \leqq x \leqq (2n-1)\pi$

$f'(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$, $2(n-1)\pi < x < (2n-1)\pi$

$f(x) = b(s(x)) = |\sin x|$ $\qquad$ $f'(x) = \operatorname{sgn}(\sin x)\cdot\cos x,\ x \neq z\pi$

$f(x) = s(s(x)) = \sin(\sin x)$ $\qquad$ $f'(x) = \cos(\sin x)\cdot\cos x$

$f(x) = c(s(x)) = \cos(\sin x)$ $\qquad$ $f'(x) = -\sin(\sin x)\cdot\cos x$

$f(x) = t(s(x)) = \tan(\sin x)$, $\sin x \neq \frac{\pi}{2}(2z-1)$

$f'(x) = \frac{\cos x}{(\cos(\sin x))^2}$, $\sin x \neq \frac{\pi}{2}(2z-1)$

e) $f(x) = p(c(x)) = (\cos x)^n$ $\qquad$ $f'(x) = -n(\cos x)^{n-1}\cdot\sin x$

$f(x) = w(c(x)) = \sqrt{\cos x}$, $\frac{\pi}{2}(2z-1) \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}(2z+1)$

$f'(x) = \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$, $\frac{\pi}{2}(2z-1) < x < \frac{\pi}{2}(2z+1)$

$f(x) = b(c(x)) = |\cos x|$ $\qquad$ $f'(x) = -\operatorname{sgn}(\cos x)\cdot\sin x,\ x \neq \frac{\pi}{2}(2z-1)$

$f(x) = s(c(x)) = \sin(\cos x)$ $\qquad$ $f'(x) = -\cos(\cos x)\cdot\sin x$

$f(x) = c(c(x)) = \cos(\cos x)$ $\qquad$ $f'(x) = \sin(\cos x)\cdot\sin x$

$f(x) = t(c(x)) = \tan(\cos x)$, $\cos x \neq \frac{\pi}{2}(2z-1)$

$f'(x) = \frac{-\sin x}{(\cos(\cos x))^2}$, $\cos x \neq \frac{\pi}{2}(2z-1)$

f) $f(x) = p(t(x)) = (\tan x)^n,\ x \neq \frac{\pi}{2}(2z-1)$ $\qquad$ $f'(x) = \frac{n(\tan x)^{n-1}}{(\cos x)^2},\ x \neq \frac{\pi}{2}(2z-1)$

$f(x) = w(t(x)) = \sqrt{\tan x}$, $2(n-1)\pi \leqq x < x \neq \frac{\pi}{2}(2n-1)$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\tan x}(\cos x)^2}$, $2(n-1)\pi < x < x \neq \frac{\pi}{2}(2n-1)$

$f(x) = b(t(x)) = |\tan x|$, $x \neq \frac{\pi}{2}(2z-1)$;

$f'(x) = \frac{\operatorname{sgn}(\tan x)}{(\cos x)^2}$, $x \neq z\pi \wedge x \neq \frac{\pi}{2}(2z-1)$

$f(x) = s(t(x)) = \sin(\tan x),\ x \neq \frac{\pi}{2}(2z-1)$ $\qquad$ $f'(x) = \frac{\cos(\tan x)}{(\cos x)^2},\ x \neq \frac{\pi}{2}(2z-1)$

$f(x) = c(t(x)) = \cos(\tan x),\ x \neq \frac{\pi}{2}(2z-1)$ $\qquad$ $f'(x) = \frac{-\sin(\tan x)}{(\cos x)^2},\ x \neq \frac{\pi}{2}(2z-1)$

$f(x) = t(t(x)) = \tan(\tan x)$, $\tan x \neq \frac{\pi}{2}(2z-1)$;

$f'(x) = \frac{1}{(\cos(\tan x))^2(\cos x)^2}$, $x \neq \frac{\pi}{2}(2z-1) \wedge \tan x \neq \frac{\pi}{2}(2z-1)$

8 2. Ableitungen der Grundfunktionen:

$p(x) = x^n$	$p'(x) = nx^{n-1}$	$p''(x) = n(n-1)x^{n-2}$
$w(x) = \sqrt{x}$	$w'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$w''(x) = \frac{-1}{4x\sqrt{x}}$
$b(x) = \|x\|$	$b'(x) = \operatorname{sgn} x,\ x \neq 0$	$b''(x) = 0,\ x \neq 0$
$s(x) = \sin x$	$s'(x) = \cos x$	$s''(x) = -\sin x$

$c(x) = \cos x \qquad c'(x) = -\sin x \qquad c''(x) = -\cos x$

$t(x) = \tan x \qquad t'(x) = \frac{1}{(\cos x)^2} \qquad t''(x) = \frac{2\sin x}{(\cos x)^3}$

9 **a)** $[(f(x))^n]' = n(f(x))^{n-1}f'(x)$ **b)** $[\sqrt{f(x)}]' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

c) $(\sin(f(x)))' = \cos(f(x)) \cdot f'(x)$

10 **a)** $[f(2x)]' = f'(2x) \cdot 2$ **b)** $[f(x+2)]' = f'(x+2)$

c) $[f(x^n)]' = f'(x^n) \cdot nx^{n-1}$ **d)** $[f(\sqrt{x})]' = f'(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$

e) $[f(|x|)]' = f'(|x|) \cdot \operatorname{sgn} x$ **f)** $[f(\cos x)]' = f'(\cos x) \cdot (-\sin x)$

•11 **a)** $[f(x+f(1))]' = f'(x+f(1))$ **b)** $[f(x+f(x))]' = f'(x+f(x)) \cdot (1+f'(x))$

c) $[f(x \cdot f(x))]' = f'(x \cdot f(x)) \cdot (f(x)+xf'(x))$ **d)** $[f(f(x))]' = f'(f(x)) \cdot f'(x)$

e) $[f(x^2)]' = f'(x^2) \cdot 2x$ **f)** $[(f(x))^2]' = 2f(x) \cdot f'(x)$

12 Welche Symmetrie zum Koordinatensystem hat $G_{f'}$, falls

a) $f(x) = f(-x)$ $\quad f'(x) = f'(-x) \cdot (-1) = -f'(-x)$, also Symmetrie zu O

b) $f(x) = -f(-x)$ $\quad f'(x) = -f'(-x) \cdot (-1) = f'(-x)$, also Symmetrie zu x=0

:13 Bei einer Verkettung sei die Kurve der inneren Funktion
a) symmetrisch zur y-Achse **b)** symmetrisch zum Ursprung.

Untersuche, welche Symmetrie-Eigenschaften die äußere Funktion haben muss, wenn die Kurve der verketteten Funktion symmetrisch zum Koordinatensystem sein soll.
Term der äußeren Funktion a(x), Term der inneren Funktion i(x),
Schachtelterm: $v(x) = a(i(x))$

a) Symmetrie zur y-Achse: $i(-x) = i(x)$
$v(-x) = a(i(-x)) = a(i(x)) = v(x)$
die äußere Funktion kann ganz beliebig sein,
die Verkettungskurve ist immer symmetrisch zur y-Achse.

b) Symmetrie zum Ursprung: $i(-x) = -i(x)$
$v(-x) = a(i(-x)) = a(-i(x))$
jetzt geht die Symmetrie-Eigenschaft von a über auf v:
hat G_a keine Symmetrie, dann hat auch G_v keine Symmetrie
ist G_a symmetrisch zum Ursprung, dann ist auch G_v, symmetr. zu O
ist G_a symmetrisch zur y-Achse, dann ist auch G_v, symmetr. zu x=0.

•14 **a)** $[(\sin(3x^2+2x))^3]' = 3(\sin(3x^2+2x))^2 \cdot \cos(3x^2+2x) \cdot (6x+2)$

b) $[\sqrt{\cos(\sqrt{x})}]' = \frac{-\sin(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{\cos(\sqrt{x})}} = \frac{-\sin(\sqrt{x})}{4\sqrt{x\cos(\sqrt{x})}}$

c) $[\sqrt{\sqrt{\sqrt{x^4+3}}}]' = \frac{1}{2\sqrt{\sqrt{\sqrt{x^4+3}}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\sqrt{x^4+3}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^4+3}} \cdot 4x^3$

•15 $f(x) = x^{10} \qquad g(x) = x^2 - x \qquad h(x) = \cos x$

$v(x) = f(g(h(x))) = ((\cos x)^2 - \cos x)^{10}$

$v'(x) = 10((\cos x)^2 - \cos x)^9(2\cos x \cdot (-\sin x) + \sin x)$

$v'(x) = 10((\cos x)^2 - \cos x)^9(1-2\cos x)\sin x$

$v(x) = f(h(g(x))) = (\cos(x^2 - x))^{10}$

$v'(x) = 10(-\sin(x^2 - x) \cdot (2x-1))^9$

$v(x) = g(f(h(x))) = ((\cos x)^{10})^2 - (\cos x)^{10} = (\cos x)^{20} - (\cos x)^{10}$

$v'(x) = 20(\cos x)^{19}(-\sin x) - 10(\cos x)^9(-\sin x)$

$v'(x) = 10((\cos x)^9 - 2(\cos x)^{19})\sin x$

$v(x) = g(h(f(x))) = (\cos(x^{10}))^2 - \cos(x^{10})$

$v'(x) = 2(-\sin((x^{10}) \cdot 10x^9))^9 + \sin(x^{10}) \cdot 10x^9$

$v(x) = h(g(f(x))) = \cos((x^{10})^2 - x^{10}) = \cos(x^{20} - x^{10})$

$v'(x) = -\sin(x^{20} - x^{10}) \cdot (20x^{19} - 10x^9) = -10x^9(2x^{10}-1)\sin(x^{20} - x^{10})$

$v(x) = h(f(g(x))) = \cos((x^2 - x)^{10})$

$v'(x) = -\sin((x^2-x)^{10}) \cdot 10(x^2-x)^9 \cdot (2x-1)$

$v'(x) = -10x^9(x-1)^9(2x-1)\sin((x^2-x)^{10})$

:16 $f(x) = \sqrt{x} \qquad g(x) = x^2 + 1 \qquad h(x) = \tan x$

$v(x) = f(g(h(x))) = \sqrt{(\tan x)^2 + 1} = \sqrt{\frac{1}{(\cos x)^2}} = \frac{1}{|\cos x|},\ x \neq \frac{\pi}{2}(2z-1)$

$v'(x) = \frac{\operatorname{sgn}(\cos x) \cdot \sin x}{(\cos x)^2} = \frac{\frac{\cos x}{|\cos x|} \cdot \sin x}{(\cos x)^2} = \frac{\tan x}{|\cos x|},\ x \neq \frac{\pi}{2}(2z-1)$

$v(x) = f(h(g(x))) = \sqrt{\tan(x^2+1)},\ z\pi \leqq x^2+1 < \frac{\pi}{2}(2z+1)$

$\sqrt{z\pi - 1} \leqq |x| < \sqrt{\frac{\pi}{2}(2z+1) - 1}$

$v'(x) = \frac{x}{\sqrt{\tan(x^2+1)} \cdot (\cos(x^2+1))^2},\ \sqrt{z\pi - 1} < |x| < \sqrt{\frac{\pi}{2}(2z+1) - 1}$

$v(x) = g(f(h(x))) = (\sqrt{\tan x})^2 + 1 = \tan x + 1,\ (n-1)\pi \leqq x < \frac{\pi}{2}(2n-1)$

$v'(x) = \frac{1}{(\cos x)^2},\ (n-1)\pi < x < \frac{\pi}{2}(2n-1)$

$v(x) = g(h(f(x))) = (\tan\sqrt{x})^2 + 1,\ x \geqq 0 \wedge x \neq (\frac{\pi}{2}(2n-1))^2$

$v'(x) = \frac{\tan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\cos\sqrt{x})^2},\ x > 0 \wedge x \neq (\frac{\pi}{2}(2n-1))^2$

$v(x) = h(g(f(x))) = \tan((\sqrt{x})^2 + 1) = \tan(x+1),\ x \geqq 0 \wedge x \neq \frac{\pi}{2}(2n-1) - 1$

$v'(x) = \frac{1}{(\cos(x+1))^2},\ x \geqq 0 \wedge x \neq \frac{\pi}{2}(2n-1) - 1$

$v(x) = h(f(g(x))) = \tan\sqrt{x^2+1},\ \sqrt{x^2+1} \neq \frac{\pi}{2}(2n-1),\ |x| \neq \sqrt{(\frac{\pi}{2}(2n-1))^2 - 1}$

$$v'(x) = \frac{x}{(\cos\sqrt{x^2+1})^2\sqrt{x^2+1}}, \; |x| \neq \sqrt{(\tfrac{\pi}{2}(2n-1))^2-1}$$

•17 Bestimme die ersten 3 Ableitungen und gib dann die 100. Ableitung an.

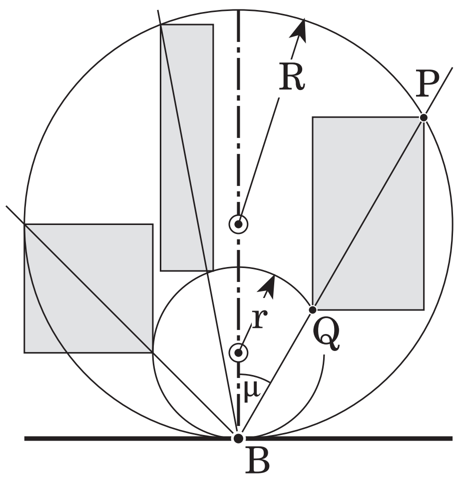
a) $f(x) = \frac{1}{x-1}$ $f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$ $f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$ $f'''(x) = \frac{-6}{(x-1)^4}$

$f^{(n)}(x) = \frac{n!(-1)^n}{(x-1)^{n+1}}$ $f^{(100)}(x) = \frac{100!}{(x-1)^{101}}$

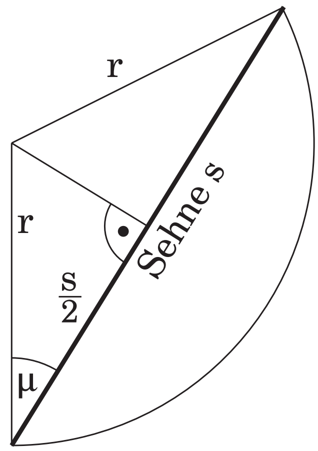
b) $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ $f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^3}$ $f''(x) = \frac{6}{(x-1)^4}$ $f'''(x) = \frac{-24}{(x-1)^5}$

$f^{(n)}(x) = \frac{(n+1)!(-1)^n}{(x-1)^{n+2}}$ $f^{(100)}(x) = \frac{101!}{(x-1)^{102}}$

:18



Durch den Berührpunkt B zweier Kreise mit den Radien r und R gehen Geraden. Die Punkte P und Q, in denen eine Gerade beide Kreise schneidet sind Gegenecken eines Rechtecks; 2 Seiten eines solchen Rechtecks sind parallel zur gemeinsamen Tangente der Kreise. Bestimme den Flächeninhalt des größten Rechtecks. Wie groß ist dann der Winkel μ ?



Sehnen mit μ und Radien ausdrücken $\frac{s}{2} = r \cdot \cos\mu$

kurze Sehne $s = 2r\cos\mu$ lange Sehne $S = 2R\cos\mu$

Rechteck-Diagonale $d = S - r = 2(R-r)\cos\mu$

waagrechte Rechteckseite $w = d\sin\mu$

senkrechte Rechteckseite $v = d\cos\mu$

Rechteckfläche

$F(\mu) = wv = d^2\sin\mu\cos\mu = 4(R-r)^2(\cos\mu)^2\sin\mu\cos\mu$

$F(\mu) = 4(R-r)^2(\cos\mu)^3\sin\mu$

Grenzfälle $F(0°) = F(90°) = 0$, absolute Minima

also ist abs. Maximum zu erwarten für $0° < \mu < 90°$

$F'(\mu) = 4(R-r)^2(3(\cos\mu)^2(-\sin\mu)\sin\mu + (\cos\mu)^3\cos\mu)$

$F'(\mu) = 4(R-r)^2((\cos\mu)^4 - 3(\cos\mu)^2(\sin\mu)^2)$

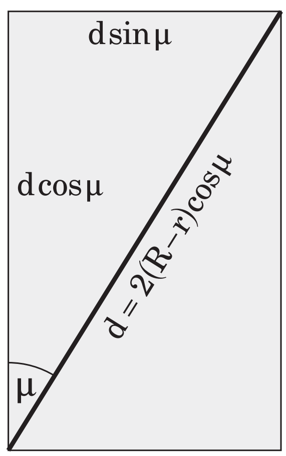
$F'(\mu) = 0 \Rightarrow (\cos\mu)^4 - 3(\cos\mu)^2(\sin\mu)^2 = 0$

$(\cos\mu)^2((\cos\mu)^2 - 3(\sin\mu)^2) = 0$

wegen $(\cos\mu)^2 \neq 0 \Rightarrow (\cos\mu)^2 = 3(\sin\mu)^2 \;\; | :(\cos\mu)^2$

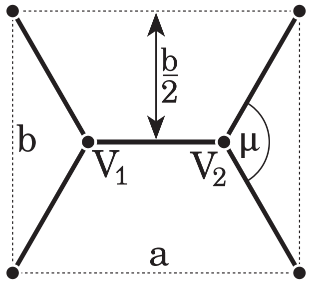
$(\tan\mu)^2 = \frac{1}{3} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\mu = 30°}$

$F(30°) = \frac{3}{4}\sqrt{3}(R-r)^2$



•19 Die 4 Ecken eines Rechtecks mit den Seiten a und b sollen über eine möglichst kurze Rohrleitung miteinander verbunden werden.

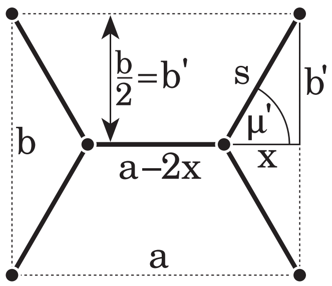
Kürzeste Leitung



a) Berechne die Länge dieser Leitung und den Winkel μ in einem Verzweigungspunkt V.

b) Zeige: Eine solche Leitung ist kürzer als eine Verbindung längs den Rechteckseiten oder längs den Rechteck-Diagonalen.

c) Bei welchem Rechteck (Seitenverhältnis=?) fallen die Verzweigungspunkte zusammen?



a) Abkürzungen erleichtern den Verkehr:
$a' = a/2, \quad b' = b/2, \quad \mu' = \mu/2,$
Armlänge $s = \sqrt{x^2+b'^2}$
Länge der Leitung $l(x) = 4s + a - 2x$
$l(x) = 4\sqrt{x^2+b'^2} + a - 2x$
Grenzfälle: $l(0) = 4b' + a = 2b + a$
$l(a') = 4\sqrt{a'^2+b'^2}$
$l(a') = 2\sqrt{(2a)^2+(2b')^2} = 2\sqrt{a^2+b^2}$ (doppelte Diagonale)
$l'(x) = 4\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+b'^2}} - 2 = 0 \;\Rightarrow 2x = \sqrt{x^2+b'^2} \;\Rightarrow 3x^2 = b'^2 \;\Rightarrow x = \frac{1}{3}\sqrt{3}\,b'$
$l_{min} = l(\frac{1}{3}\sqrt{3}\,b') = 4\sqrt{\frac{1}{3}b'^2+b'^2} + a - \frac{2}{3}\sqrt{3}b' = \frac{8}{3}\sqrt{3}b' + a - \frac{2}{3}\sqrt{3}b' = a + b\sqrt{3}$
$\tan\mu' = \frac{b'}{x} = \sqrt{3} \;\Rightarrow \mu' = 60°$, $\boldsymbol{\mu = 2\mu' = 120°}$

b) Rechteckumfang $- l_{min} = 2a + 2b - a - b\sqrt{3} = a + b(2-\sqrt{3}) > 0$,
also ist die Leitung kürzer als der Rechteckumfang.
Annahme: Diagonalenlänge $> l_{min}$
$2\sqrt{a^2+b^2} > a + b\sqrt{3}$ | quadrieren
$4(a^2+b^2) > a^2 + 2ab\sqrt{3} + 3b^2 \;\Rightarrow 3a^2 - 2\sqrt{3}ab + b^2 > 0$
$\Rightarrow (\sqrt{3}a - b)^2 > 0$, also stimmt die Annahme

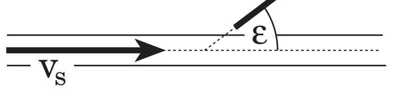
c) Zusammenfallen $V_1 = V_2$, wenn $a = 2x = \frac{2}{3}\sqrt{3}\,b' = \frac{1}{3}\sqrt{3}\,b$
Seitenverhältnis (lang:kurz) $\;\boldsymbol{b:a = \sqrt{3}}$

•20 Auf einer Straße nähert sich jemand dem Ort P.
Auf der Straße kommt er voran mit der Geschwindigkeit v_s,
im Gebiet von P mit der Geschwindigkeit v_p ($<v_s$).

In welchem Winkel ε muss er von der Straße in Richtung P abbiegen, wenn er möglichst bald in P ankommen will?

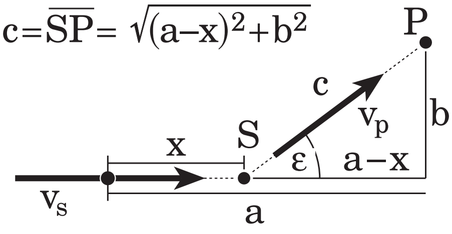
$\tan\varepsilon = ?$

$v_s > v_p$



Fahrzeit $t(x) = t_x + t_c = \frac{x}{v_s} + \frac{c}{v_p} = \frac{x}{v_s} + \frac{\sqrt{(a-x)^2+b^2}}{v_p}$

$$t'(x) = \frac{1}{v_s} + \frac{-(a-x)}{v_p\sqrt{(a-x)^2+b^2}} = 0$$



$$v_p\sqrt{(a-x)^2+b^2} = v_s(a-x) \quad || \text{ quadrieren}$$

$$v_p^2(a-x)^2 + v_p^2 b^2 = v_s^2(a-x)^2$$

$$v_p^2 b^2 = (v_s^2 - v_p^2)(a-x)^2$$

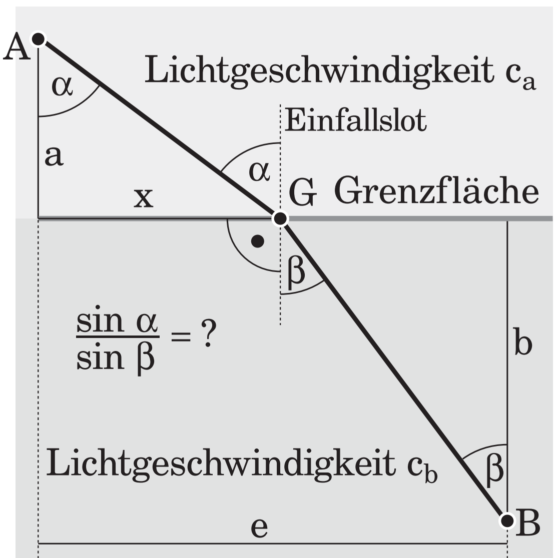
$$\frac{b^2}{(a-x)^2} = \frac{v_s^2 - v_p^2}{v_p^2} \qquad \tan\varepsilon = \frac{b}{a-x} = \sqrt{v_s^2/v_p^2 - 1}$$

•21 Fermat-Prinzip

Licht nimmt seinen Weg immer so, dass es ihn in der kürzesten Zeit zurücklegt.

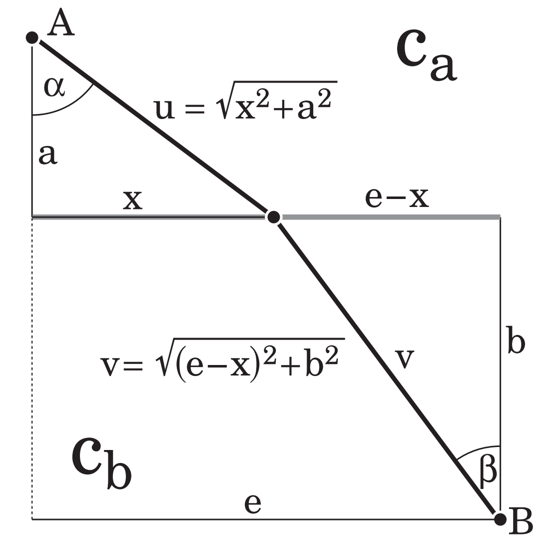
(Pierre de FERMAT, französischer Mathematiker, 1601 bis 1665)

Zwischen den Punkten A und B soll eine Lichtverbindung hergestellt werden:
A liegt in einem Stoff, in dem die Lichtgeschwindigkeit c_a ist,
B in einem Stoff mit der Lichtgeschwindigkeit c_b . G ist ein Punkt der Fläche, in der die beiden Stoffe aneinandergrenzen. Der Lichtstrahl geht durch G.



Von A nach B braucht das Licht eine Zeit, die von x abhängt: $t(x) = t_u + t_v$

$$t(x) = \frac{u}{c_a} + \frac{v}{c_b} = \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{c_a} + \frac{\sqrt{(e-x)^2+b^2}}{c_b}$$



$$t'(x) = \frac{x}{c_a\sqrt{x^2+a^2}} + \frac{-(e-x)}{c_b\sqrt{(e-x)^2+b^2}} = 0$$

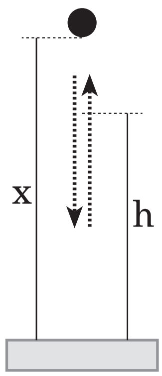
$$x c_b\sqrt{(e-x)^2+b^2} = (e-x)c_a\sqrt{x^2+a^2}$$

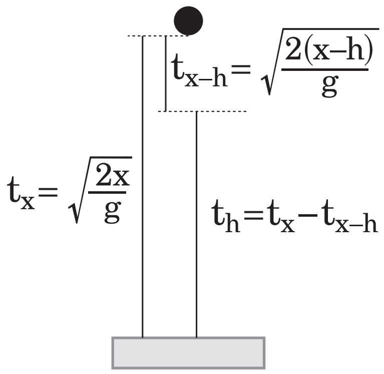
$$x c_b v = (e-x)c_a u \quad ||: uv$$

$$c_b\frac{x}{u} = c_a\frac{e-x}{v} \Rightarrow c_b\sin\alpha = c_a\sin\beta$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c_a}{c_b}$$

•22 Eine ruhende Kugel fällt aus der Höhe x und prallt am Boden elastisch nach oben ab.
Aus welcher Höhe x muss die Kugel fallen, wenn sie in möglichst kurzer Zeit eine Steighöhe h (<x) erreichen soll?





Um die Steighöhe h zu passieren, braucht die Kugel eine Zeit, die von x abhängt:

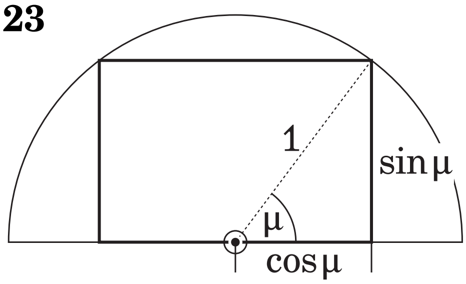
$z(x) = t_x + t_h = t_x + t_x - t_{x-h} = 2t_x - t_{x-h}$

$z(x) = 2\sqrt{\frac{2x}{g}} - \sqrt{\frac{2(x-h)}{g}}$

$z'(x) = 2\frac{1}{\sqrt{2x/g}} - \frac{1}{\sqrt{2(x-h)/g}} = 0 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{2x}} = \frac{1}{\sqrt{2(x-h)}}$

$\mathbf{x = \frac{4}{3}h}$

23



Einem Halbkreis mit Radius 1 ist ein Rechteck einbeschrieben.
Für welchen Winkel μ hat das Rechteck

a) maximalen Flächeninhalt

b) extremen Umfang (Maximum, Minimum?)

a) Flächeninhalt $F(\mu) = 2\sin\mu\cos\mu = \sin 2\mu$
Grenzfälle: $F(0°) = F(90°) = 0$, absolute Minima bei $\mu = 0°$ oder $\mu = 90°$
$F'(\mu) = (\cos 2\mu)\cdot 2 = 0 \Rightarrow 2\mu = 90°$, $\mathbf{\mu = 45°}$
maximaler Flächeninhalt $F(45°) = 1$.

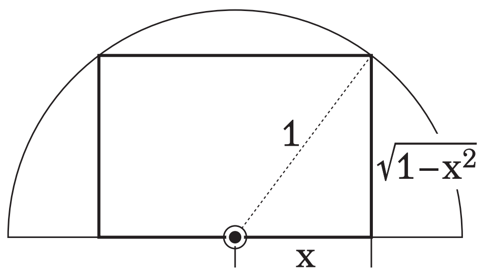
Für Wurzelliebhaber: $\cos\mu = x$, $\sin\mu = \sqrt{1-x^2}$

$F(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$;

$F'(x) = 2\sqrt{1-x^2} + 2x\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = 0$

$\sqrt{1-x^2} = \frac{x^2}{2\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow 1 - x^2 = x^2$

$\mathbf{x = \frac{1}{2}\sqrt{2}}$



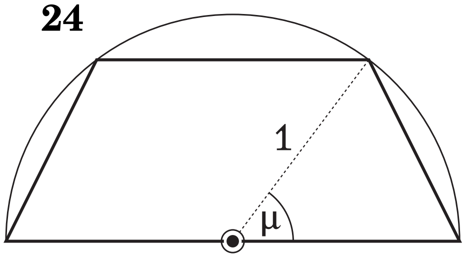
b) Umfang $u(\mu) = 2\sin\mu + 4\cos\mu$
Grenzfälle: $u(0°) = 4$, $u(90°) = 2$
$u'(\mu) = 2\cos\mu - 4\sin\mu = 0 \Rightarrow \tan\mu = 0{,}5 \Rightarrow \mu \approx 26{,}6°$
$u(26{,}6°) \approx 4{,}47$ ist absolutes Maximum des Umfangs.

Als Wurzelbehandlung: $u(x) = 2x + 4\sqrt{1-x^2}$

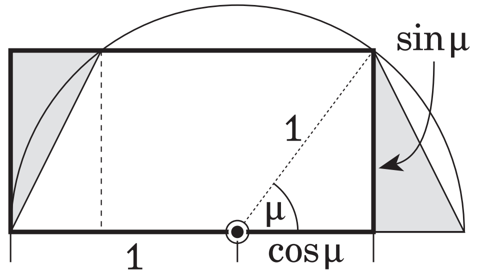
$u'(x) = 2 + 4\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = 0 \Rightarrow \sqrt{1-x^2} = 2x \Rightarrow x = \frac{1}{5}\sqrt{5}$

$u(\frac{1}{5}\sqrt{5}) = 2x + 4\cdot 2x = 10x = 2\sqrt{5}$

24



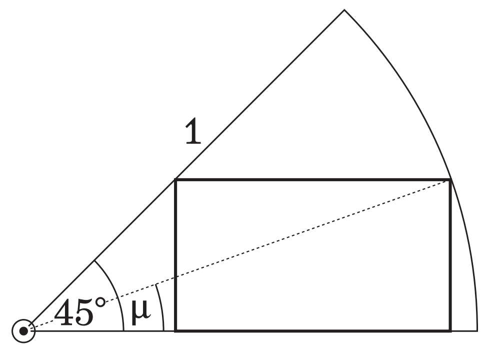
Einem Halbkreis mit Radius 1 ist ein gleichschenkliges Trapez einbeschrieben.
Für welchen Winkel μ hat das Trapez maximalen Flächeninhalt?



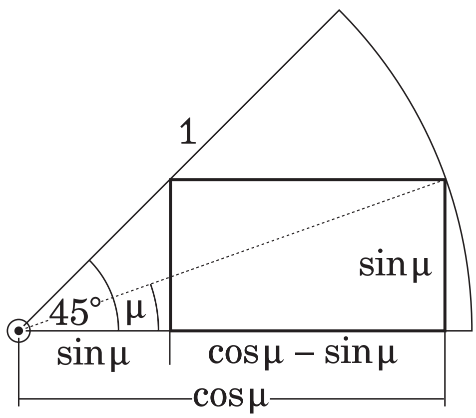
Das Trapez ist achsensymmetrisch, deshalb hat es denselben Flächeninhalt wie das dick umrandeteRechteck (die grauen Dreiecke sind kongruent).
Rechteckfläche $F(\mu) = (1+\cos\mu)\sin\mu$
Grenzfälle: $F(0°) = 0$, $F(90°) = 1$
$F(\mu) = \sin\mu + \cos\mu\sin\mu$
$F'(\mu) = \cos\mu - \sin\mu\sin\mu + \cos\mu\cos\mu = 0$; auf cos umsteigen: $(\sin)^2 = 1-(\cos)^2$
$\cos\mu + (\cos\mu)^2 - 1 + (\cos\mu)^2 = 0$
$2(\cos\mu)^2 + \cos\mu - 1 = 0$, Diskriminante $D = 1+8 = 9$
$\cos\mu = \frac{-1\pm 3}{4} \Rightarrow \cos\mu = -1$ oder $\cos\mu = \frac{1}{2} \Rightarrow \mu = 180°$ oder $\mu = 60°$
$F(180°) = 0$ ist FlächenMinimum, also ist $\mathbf{F(60°) = \frac{3}{4}\sqrt{3}}$ FlächenMaximum

Im Wurzelwerk: $\cos\mu = x$, $\sin\mu = \sqrt{1-x^2}$
$F(x) = (1+x)\sqrt{1-x^2}$
$F'(x) = \sqrt{1-x^2} + (1+x)\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = 0 \Rightarrow \sqrt{1-x^2} = \frac{(1+x)x}{\sqrt{1-x^2}}$
$\Rightarrow 1-x^2 = x+x^2 \Rightarrow 2x^2+x-1 = 0$, Diskriminante $D = 1+8 = 9$
$x = \frac{-1\pm 3}{4} \Rightarrow x = -1$ oder $x = \frac{1}{2}$ sonst weiter wie oben.

25 Einem Kreissektor mit Radius 1, Mittelpunktwinkel 45°, ist ein Rechteck einbeschrieben.
Für welchen Winkel μ hat das Rechteck maximalen Flächeninhalt?



Flächeninhalt $F(\mu) = (\cos\mu - \sin\mu)\sin\mu$
$= \cos\mu\sin\mu - (\sin\mu)^2$



Grenzfälle: $F(0°) = F(45°) = 0$, abs. Minima
$F'(\mu) = -\sin\mu\sin\mu + \cos\mu\cos\mu - 2\sin\mu\cos\mu = 0$
$(\cos\mu)^2 - 2\sin\mu\cos\mu - (\sin\mu)^2 = 0 \;|\; :(\cos\mu)^2$
$1 - 2\tan\mu - (\tan\mu)^2 = 0$
$(\tan\mu)^2 + 2\tan\mu - 1 = 0$, Diskr. $D = 4+4 = 4\cdot 2$
$\tan\mu = \frac{-2\pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$
der negative tan-Wert hat nichts zu sagen,

$\tan\mu = \sqrt{2} - 1 \;\Rightarrow\; \mu = \frac{45°}{2}$; $F(22{,}5°) \approx 0{,}207$ ist FlächenMaximum.

$(\cos\mu)^2 - 2\sin\mu\cos\mu - (\sin\mu)^2 = 0$ eleganter nach μ aufgelöst
$((\cos\mu)^2 - (\sin\mu)^2) - 2\sin\mu\cos\mu = 0 \;\Rightarrow\; \cos 2\mu - \sin 2\mu = 0$
$\sin 2\mu = \cos 2\mu \;\Rightarrow\; \tan 2\mu = 1 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\mu = 22{,}5°}$

Im Wurzelgeflecht: $\cos\mu = x$, $\sin\mu = \sqrt{1-x^2}$
$F(x) = (x - \sqrt{1-x^2})\sqrt{1-x^2} = x\sqrt{1-x^2} - (1-x^2) = x\sqrt{1-x^2} + x^2 - 1$
$F'(x) = \sqrt{1-x^2} + x\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} + 2x = 0 \;\Rightarrow\; 1 - x^2 - x^2 + 2x\sqrt{1-x^2} = 0$
$2x\sqrt{1-x^2} = 2x^2 - 1$ (•) || quadrieren $\Rightarrow\; 4x^2(1-x^2) = 4x^4 - 4x^2 + 1$
$8x^4 - 8x^2 + 1 = 0$, Diskriminante $D = 64 - 32 = 32 = 16\cdot 2$
$x^2 = \frac{8 \pm 4\sqrt{2}}{16} = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{4}$ lösen beide Ausdrücke die Gleichung (•) ?
soll man das vorführen, zur Abschreckung ?

26 Ein gerader Kreiszylinder habe das Volumen V. Bei welchem Grundkreisradius r und Höhe h ist seine Oberfläche minimal, wenn

a) beide Deckel zur Oberfläche zählen

$F = 2r^2\pi + 2r\pi h$, $V = r^2\pi h \;\Rightarrow\; h = \frac{V}{r^2\pi}$

$F(r) = 2r^2\pi + 2r\pi\frac{V}{r^2\pi} = 2(r^2\pi + \frac{V}{r})$; $F'(r) = 2(2r\pi - \frac{V}{r^2})$, $F''(r) = 4(\pi + \frac{V}{r^3})$

$F'(r) = 0 \;\Rightarrow\; 2r^3\pi = V$, $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$; $F''(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}) = 4(\pi + 2\pi) > 0$

also ist die Oberfläche für $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ minimal.

b) nur ein Deckel zur Oberfläche zählt

$F = r^2\pi + 2r\pi h$, $V = r^2\pi h \;\Rightarrow\; h = \frac{V}{r^2\pi}$

$F(r) = r^2\pi + 2r\pi\frac{V}{r^2\pi} = r^2\pi + \frac{2V}{r}$; $F'(r) = 2(r\pi - \frac{V}{r^2})$, $F''(r) = 2(\pi + 2\frac{V}{r^3})$

$F'(r) = 0 \;\Rightarrow\; r^3\pi = V$, $r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$; $F''(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}) = 2(\pi + 2\pi) > 0$

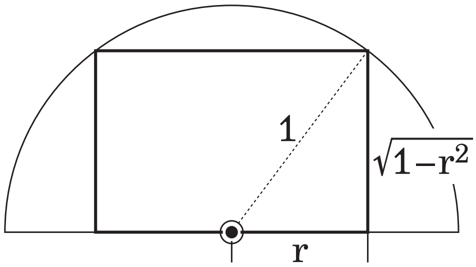
also ist die Oberfläche für $r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$ minimal.

c) kein Deckel zur Oberfläche zählt

$F = 2r\pi h$, $V = r^2\pi h \;\Rightarrow\; h = \frac{V}{r^2\pi}$

$F(r) = 2r\pi\frac{V}{r^2\pi} = 2\frac{V}{r}$; die Oberfläche hat kein Flächenextremum,
denn sie ist um so kleiner, je größer der Radius ist.

27 Einer Halbkugel mit Radius 1 ist ein gerader Kreiszylinder einbeschrieben. (Dieselbe Anordnung entsteht auch, wenn die Figur in Aufgabe **22** um ihre Symmetrieachse rotiert.)
Bei welchem Zylinderradius ist das Zylindervolumen möglichst groß?

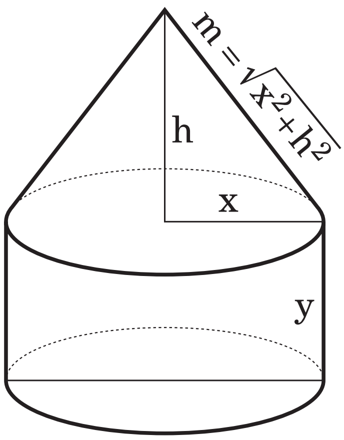


Zylindervolumen $V(r) = r^2\pi h = r^2\pi\sqrt{1-r^2}$
Grenzfälle: $V(0) = V(1) = 0$, absolute Minima, also absolutes Maximum für $0<r<1$

$$V'(r) = \pi\left(2r\sqrt{1-r^2} + r^2\frac{-r}{\sqrt{1-r^2}}\right) = r\pi\left(2\sqrt{1-r^2} - \frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}}\right)$$

$$V'(r) = 0 \Rightarrow 2(1-r^2) = r^2 \Rightarrow r = \sqrt{\tfrac{2}{3}},\ V_{max} = \frac{2\sqrt{3}}{9}\pi$$

•28 Eine Ölkanne soll die Form eines Zylinders erhalten, dem ein Kegel von gleichem Grundkreis-Durchmesser aufgesetzt ist. Die Höhe dieses Kegels soll $\frac{2}{3}$ des gemeinsamen Grundkreis-Durchmessers betragen. Die Ölkanne habe den Rauminhalt $V = 6\pi$.
Wie sind die Abmessungen der Kanne (Grundkreisradius x, Zylinderhöhe y und Kegelhöhe h) zu wählen, wenn man einen möglichst kleinen Materialverbrauch erreichen will?
Wie groß ist in diesem Fall die Oberfläche S der Ölkanne?
(Aus der Reifeprüfung 1957)



Kegelhöhe $h = \frac{2}{3}\cdot 2x = \frac{4}{3}x$

Kegelvolumen $V_K = \frac{1}{3}x^2\pi h = \frac{1}{3}x^2\pi\cdot\frac{4}{3}x = \frac{4}{9}x^3\pi$

Zylindervolumen $V_Z = x^2\pi y$

Kannevolumen $V = V_K + V_Z = \frac{4}{9}x^3\pi + x^2\pi y = 6\pi$

$$\Rightarrow y = \frac{2}{9}\cdot\frac{27-2x^3}{x^2}$$

Kegelmantelfläche
$S_K = x\pi m = x\pi\sqrt{x^2+h^2} = x\pi\sqrt{x^2+\frac{16}{9}x^2} = \frac{5}{3}x^2\pi$

$$\text{Zylinderfläche } S_Z = x^2\pi + 2x\pi y = x^2\pi + 2x\pi\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{27-2x^3}{x^2}$$

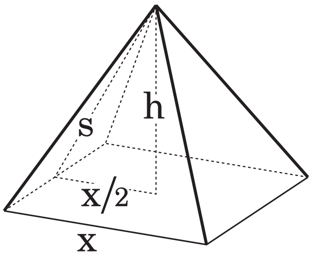
$$= x^2\pi + \frac{4}{9}\pi\frac{27-2x^3}{x} = \frac{1}{9}\pi\left(9x^2 + \frac{108}{x} - 8x^2\right) = \frac{1}{9}\pi\left(x^2 + \frac{108}{x}\right)$$

$$\text{Kannefläche } S = S_K + S_Z = \frac{5}{3}x^2\pi + \frac{1}{9}\pi\left(x^2+\frac{108}{x}\right) = \frac{1}{9}\pi\left(15x^2 + x^2 + \frac{108}{x}\right)$$

$$S(x) = \frac{1}{9}\pi\left(16x^2 + \frac{108}{x}\right) = \frac{4}{9}\pi\left(4x^2 + \frac{27}{x}\right)$$

$$S'(x) = \frac{4}{9}\pi\left(8x + \frac{-27}{x^2}\right) = 0 \Rightarrow \mathbf{x = 1{,}5} \Rightarrow \mathbf{h = 2} \Rightarrow \mathbf{y = 2} \Rightarrow \mathbf{S = 12\pi}$$

•29 Aus einem quadratischen Karton von 10 cm Seitenlänge werden vier kongruente gleichschenklige Dreiecke, deren Grundseiten die Quadratseiten sind, so herausgeschnitten, dass das Netz einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche übrig bleibt. (Aus der Reifeprüfung 1957)

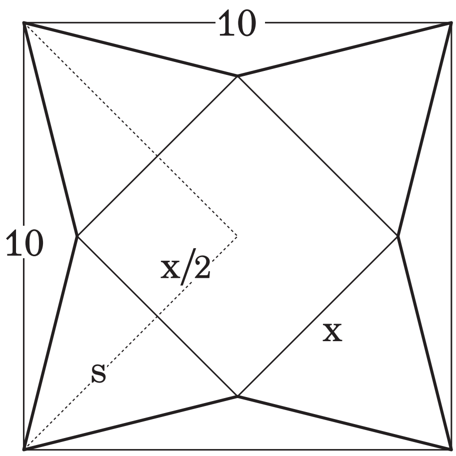


a) Wie lang ist die Grundkante der Pyramide zu wählen, damit das Volumen der Pyramide ein Maximum wird?

Pyramidevolumen $V(x) = \frac{1}{3}x^2h$

Pyramidehöhe $h^2 = s^2 - (x/2)^2$

Seitenhalbierende $s = 5\sqrt{2} - x/2$



$$\Rightarrow h^2 = (5\sqrt{2} - x/2)^2 - (x/2)^2$$
$$= (5\sqrt{2} - x/2 - x/2)(5\sqrt{2} - x/2 + x/2)$$
$$= 5\sqrt{2}(5\sqrt{2} - x) = 50 - 5\sqrt{2}x$$
$$\Rightarrow V(x) = \tfrac{1}{3}x^2 \cdot \sqrt{50 - 5\sqrt{2}x} = \tfrac{1}{3}\sqrt{5} \cdot \sqrt{10x^4 - \sqrt{2}x^5}$$
$$V'(x) = \tfrac{1}{3}\sqrt{5} \cdot \frac{40x^3 - 5\sqrt{2}x^4}{2\sqrt{10x^4 - \sqrt{2}x^5}} = 0$$
$$\Rightarrow 40x^3 - 5\sqrt{2}x^4 = 5x^3(8 - \sqrt{2}x) = 0$$
$$\Rightarrow x = \frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$$

b) Berechne das Volumen und die Oberfläche der Pyramide für diesen Fall.

Volumen $V(4\sqrt{2}) = \frac{1}{3} \cdot 32\sqrt{50 - 40} = \mathbf{\frac{32}{3}\sqrt{10}}$

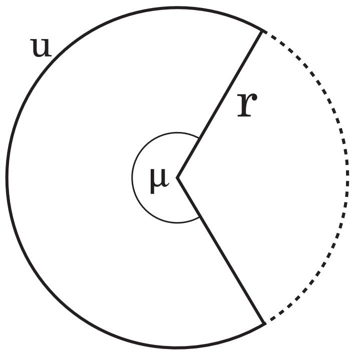
Oberfläche = Grundfläche + 4·Seitenfläche

$F(x) = x^2 + 4 \cdot \frac{1}{2}xs = x^2 + 2x(5\sqrt{2} - x/2) = x(x + 10\sqrt{2} - x) = 10\sqrt{2}x$

$\mathbf{F(4\sqrt{2}) = 80}$

c) Wieviel Prozent der Kartonfläche müssen weggeschnitten werden?
Abfall = 100 – 80 = 20, das sind 20% der Kartonfläche.

:30



Aus einem Kreis mit Radius r soll ein Sektor mit Mittelpunktwinkel μ so geschnitten werden, dass er sich zu einem Kegel biegen lässt, der möglichst großes Volumen hat.
Berechne den Winkel μ sowie vom Trichter: Radius R, Höhe h, Volumen V und Öffnungswinkel σ.

Umfang $u = \frac{2r\pi}{360^\circ}\mu = \frac{r\pi}{180^\circ}\mu$

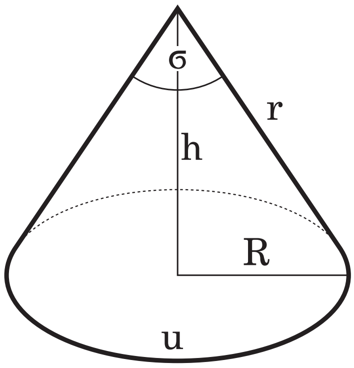
Bogenmaß erleichtert den Verkehr: $u = r\mu$

u ist auch der Umfang des Kegel-Grundkreises mit Radius R: $u = 2R\pi$

$2R\pi = r\mu \Rightarrow R = \frac{r}{2\pi}\mu$;

Höhe des Kegels: $h^2 = r^2 - R^2$

$h^2 = r^2 - (\frac{r}{2\pi})^2\mu^2 = (\frac{r}{2\pi})^2(4\pi^2 - \mu^2)$



Kegelvol.: $V(\mu) = \frac{1}{3}R^2\pi h = \frac{1}{3}(\frac{r}{2\pi})^2\mu^2 \cdot \pi \cdot \frac{r}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - \mu^2} = \frac{1}{3}(\frac{r}{2\pi})^3\pi\sqrt{4\pi^2\mu^2 - \mu^4}$

Grenzfälle: $V(0) = V(2\pi) = 0$

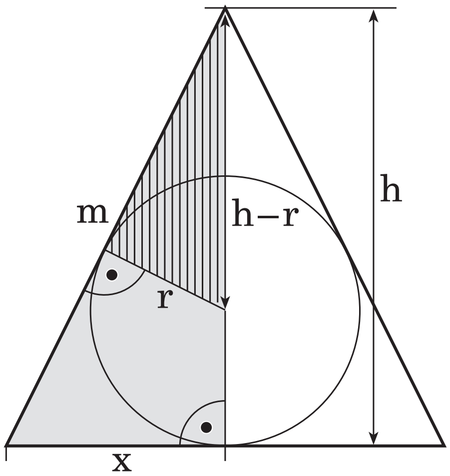
$$V'(\mu) = \frac{1}{3}(\frac{r}{2\pi})^3\pi \cdot \frac{8\pi^2\mu - 4\mu^3}{2\sqrt{4\pi^2\mu^2 - \mu^4}} = 0 \Rightarrow 2\pi^2\mu - \mu^3 = \mu(2\pi^2 - \mu^2) = 0$$

$\Rightarrow \boldsymbol{\mu = \pi\sqrt{2} = 180^\circ\sqrt{2} \approx 254{,}6^\circ}$ $\qquad R = \frac{r}{2\pi}\mu = \frac{r}{2}\sqrt{2}$

$h^2 = r^2 - R^2 = r^2 - \frac{1}{2}r^2 = \frac{1}{2}r^2 \Rightarrow h = R = \frac{r}{2}\sqrt{2}$

wegen h=R ist der halbe Öffnungswinkel gleich 45°, also $\boldsymbol{\sigma = 90^\circ}$.

:31 Einer Kugel mit Radius r soll ein gerader Kreiskegel mit möglichst kleinem Volumen V_{min} umbeschrieben sein. Berechne $V_{min}:V_{Kugel}$.



Kegelvolumen $V = \frac{1}{3}x^2\pi h$

die Kegelhöhe h muss abhängig sein von x und r, die nötige Beziehung findet man mit der Ähnlichkeit:

ähnlich sind das graue und schraffierte Dreieck,

also gilt: $\frac{h-r}{r} = \frac{m}{x} \Rightarrow x(h-r) = mr$

$m = \sqrt{x^2 + h^2}$ eingesetzt: $x(h-r) = r\sqrt{x^2 + h^2}$

$x^2(h-r)^2 = r^2(x^2 + h^2)$

$x^2h^2 - 2hrx^2 + x^2r^2 = r^2x^2 + r^2h^2$

$x^2h^2 - 2hrx^2 - r^2h^2 = 0 \;||\; :h(\neq 0)$

$x^2h - 2rx^2 - r^2h = 0 \quad \Rightarrow h(x^2 - r^2) = 2rx^2$

$\Rightarrow h = \frac{2rx^2}{x^2 - r^2}$ (endlich!)

$V(x) = \frac{1}{3}x^2\pi h = \frac{1}{3}x^2\pi \cdot \frac{2rx^2}{x^2 - r^2} = \frac{2}{3}r\pi \cdot \frac{x^4}{x^2 - r^2}$

$V'(x) = \frac{2}{3}r\pi \cdot \frac{4x^3(x^2 - r^2) - x^4 \cdot 2x}{(x^2 - r^2)^2} = 0$

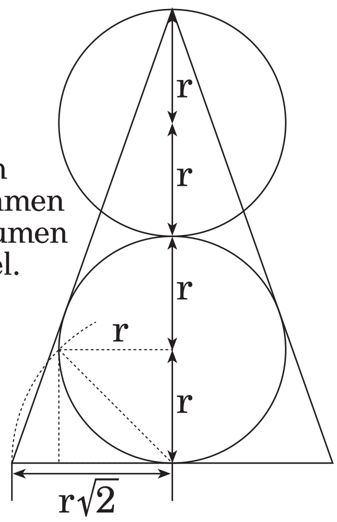
$\Rightarrow 2x^3(2x^2 - 2r^2 - x^2) = 0$

$\Rightarrow x = r\sqrt{2} \Rightarrow h = 4r$

$V_{min} = V(r\sqrt{2}) = \frac{1}{3}x^2\pi h = \frac{1}{3} \cdot 2r^2\pi \cdot 4r = \frac{8}{3}r^3\pi = 2V_{Kugel}$

$V_{min}:V_{Kugel} = 2$

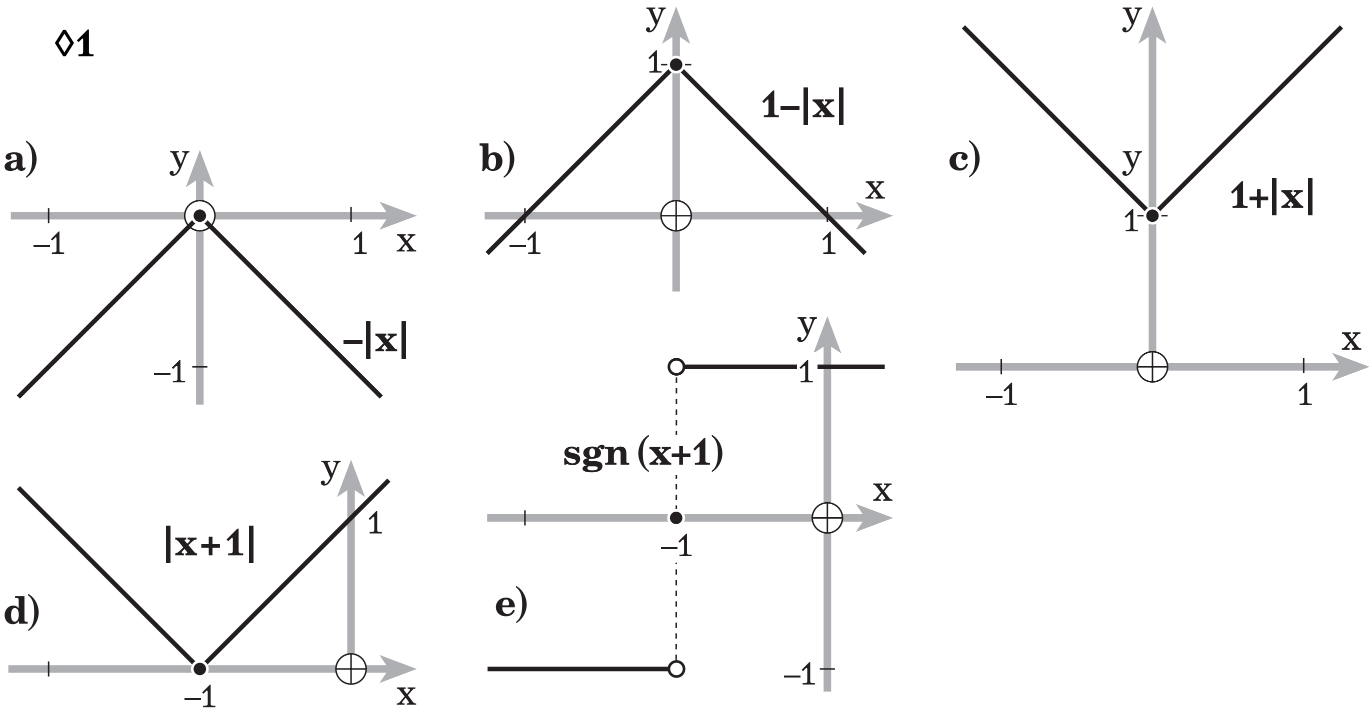
Beide Kugeln haben zusammen dasselbe Volumen wie der Kegel.



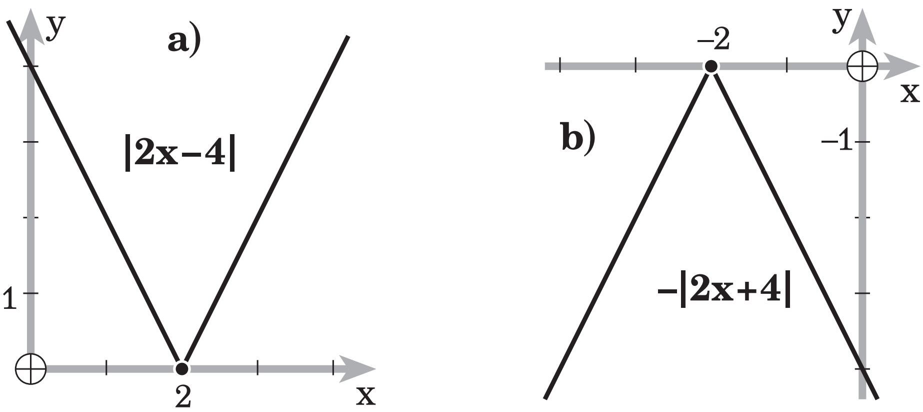
VII. Stetigkeit und Grenzwert

1. Betrag und abschnittweise definierte Funktion

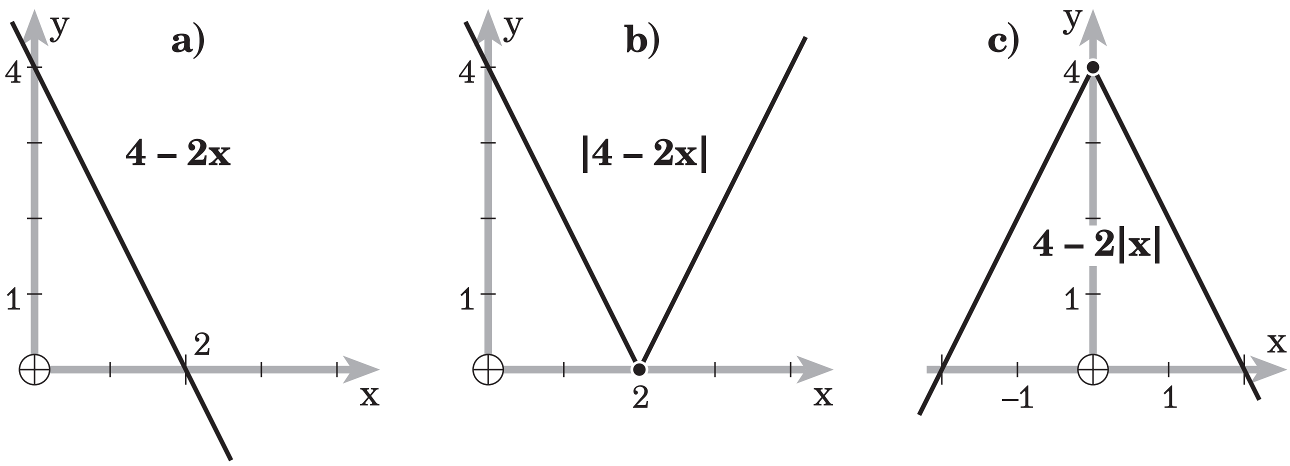
◊1

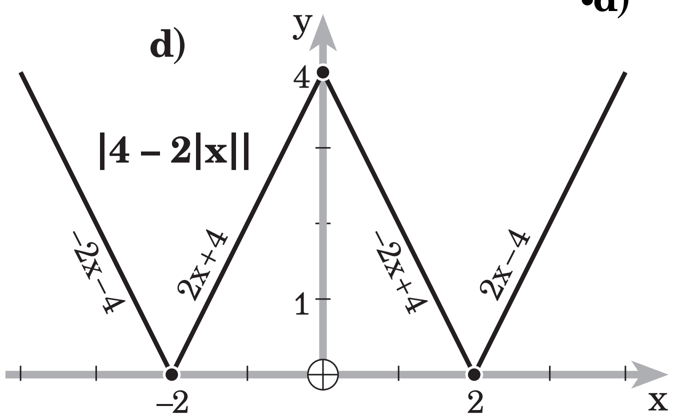


◊2



◊3





•d) $f(x) = |4-2|x|| = 2||x|-2|$

Nahtstelle 0

$x \geqq 0: f(x) = 2|x-2|$

Nahtstelle 2

$x \geqq 2: \; f(x) = 2(x-2) = 2x-4$

$0 \leqq x < 2: \; f(x) = -2(x-2) = -2x+4$

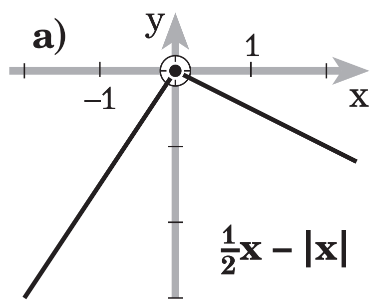
$x < 0: f(x) = 2|-x-2| = 2|x+2|$

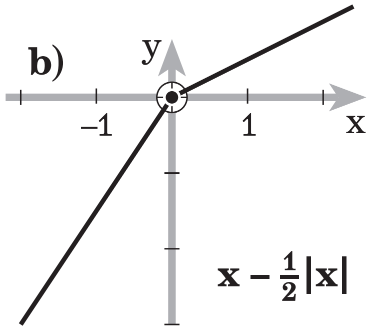
Nahtstelle –2

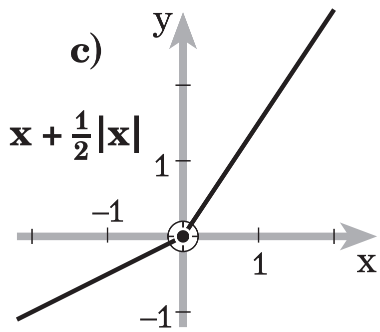
$-2 \leqq x < 0: \; f(x) = 2(x+2) = 2x+4$

$x < -2: \; f(x) = -2(x+2) = -2x-4$

4







•5 a) $f(x) = |x+1| + |x-1|$

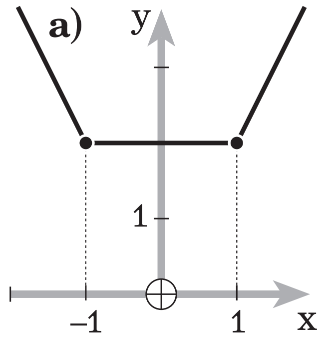
Nahtstellen –1 und 1

2 Nahtstellen, 3 Abschnitte

$x \leqq -1: \quad f(x) = -(x+1) - (x-1) = -2x$

$-1 < x \leqq 1: \; f(x) = (x+1) - (x-1) = 2$

$1 < x < \infty: \; f(x) = (x+1) + (x-1) = 2x$



b) $f(x) = |x+1| - |x-1|$

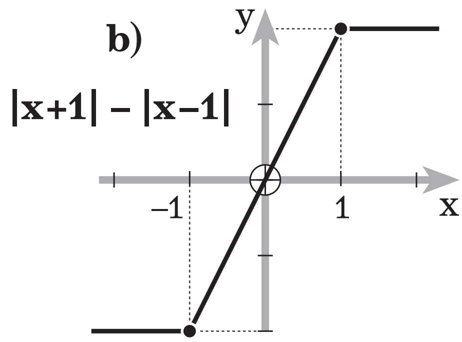
Nahtstellen –1 und 1

2 Nahtstellen, 3 Abschnitte

$x \leqq -1: \quad f(x) = -(x+1) + (x-1) = -2$

$-1 < x \leqq 1: \; f(x) = (x+1) + (x-1) = 2x$

$1 < x < \infty: \; f(x) = (x+1) - (x-1) = 2$



c) $f(x) = |x| - |x-1| + |x-2|$

Nahtstellen 0, 1 und 2

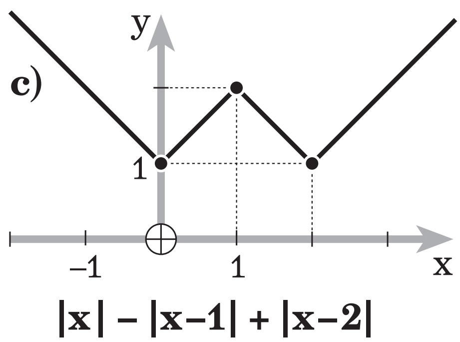
3 Nahtstellen, 4 Abschnitte

$x \leqq 0: \quad f(x) = -x + (x-1) - (x-2) = -x+1$

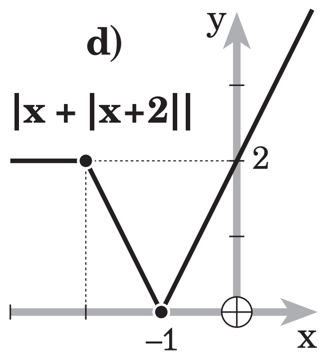
$0 < x \leqq 1: \; f(x) = x + (x-1) - (x-2) = x+1$

$1 < x \leqq 2: \; f(x) = x - (x-1) - (x-2) = -x+3$

$2 < x < \infty: \; f(x) = x - (x-1) + (x-2) = x-1$

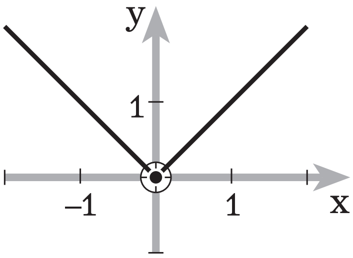


d) $f(x) = |x + |x+2||$
Nahtstelle −2
$x \leqq -2$: $f(x) = |x - (x+2)| = |-2| = 2$
$-2 < x$: $f(x) = |x + (x+2)| = |2x+2| = 2|x+1|$
Nahtstelle −1
$-2 < x \leqq -1$: $f(x) = -2(x+1) = -2x-2$
$-1 < x < \infty$: $f(x) = 2(x+1) = 2x+2$

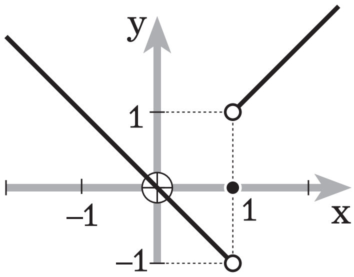


6

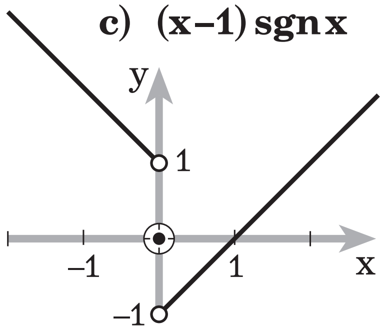
a) $x \operatorname{sgn} x = |x|$



b) $x \operatorname{sgn}(x-1)$

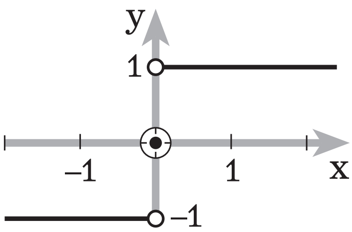


c) $(x-1) \operatorname{sgn} x$

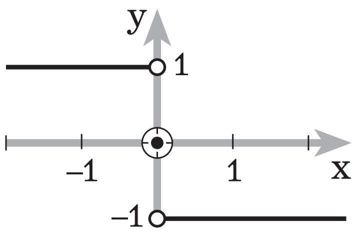


7

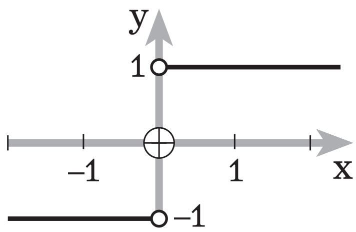
a) $\operatorname{sgn} x$



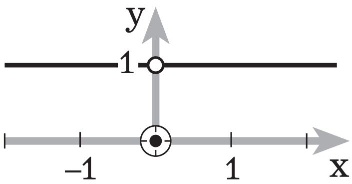
b) $\operatorname{sgn}(-x)$



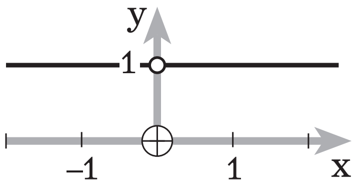
c) d) $\operatorname{sgn}\frac{1}{x} = \frac{1}{\operatorname{sgn} x}$



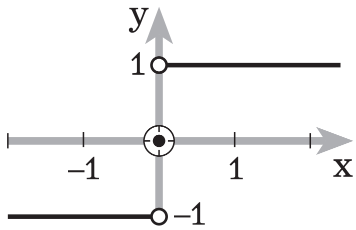
e) f) h) $\operatorname{sgn}(x^2) = (\operatorname{sgn} x)^2$
$= (\operatorname{sgn} x)^{2000}$



g) $\left(\frac{1}{\operatorname{sgn} x}\right)^2$



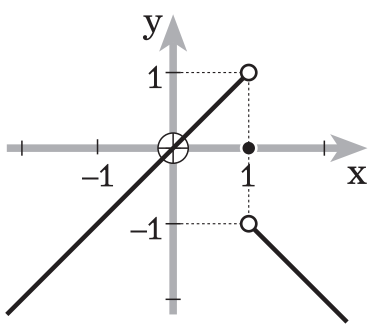
i) $(\operatorname{sgn} x)^{2001} = \operatorname{sgn} x$



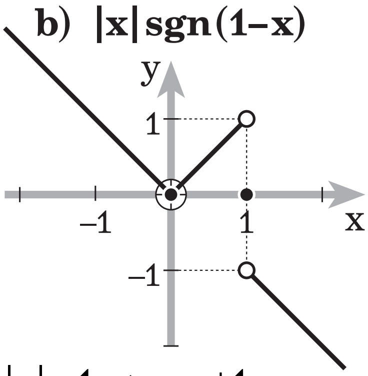
8

a) $f(x) = x \operatorname{sgn}(1-x)$
Nahtstelle: $1-x=0 \Rightarrow x=1$
$x>1$: $f(x) = x \cdot (-1) = -x$
$x=1$: $f(x) = x \cdot 0 = 0$
$x<1$: $f(x) = x \cdot (+1) = x$

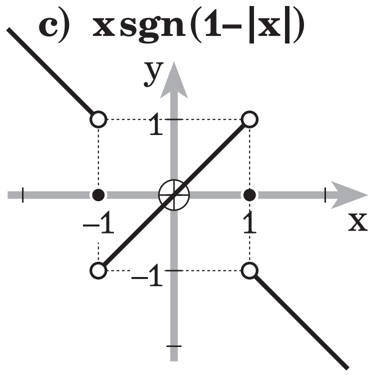
a) $x \operatorname{sgn}(1-x)$



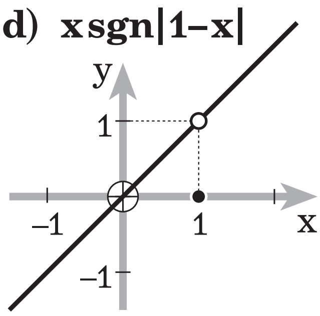
b) $f(x) = |x|\operatorname{sgn}(1-x)$
Nahtstellen 0 und 1
$x \leqq 0$: $f(x) = -x$
$0<x<1$: $f(x) = x$
$x=1$: $f(x) = 0$
$1<x$: $f(x) = -x$



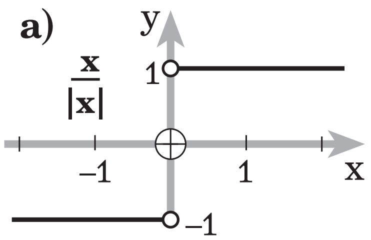
c) $f(x) = x\operatorname{sgn}(1-|x|)$
Nahtstellen: $x = 0$ oder $|x| = 1 \Rightarrow x = \pm 1$
$x<-1$: $\Rightarrow 1-|x|<0$: $f(x) = x\cdot(-1) = -x$
$x=-1$: $f(x) = x\cdot 0 = 0$
$-1<x\leqq 0$: $\Rightarrow 1-|x|>0$: $f(x) = x\cdot 1 = x$
$0<x<1$: $\Rightarrow 1-|x|>0$: $f(x) = x\cdot 1 = x$
$x=1$: $f(x) = x\cdot 0 = 0$
$1<x$: $\Rightarrow 1-|x|<0$: $f(x) = x\cdot(-1) = -x$

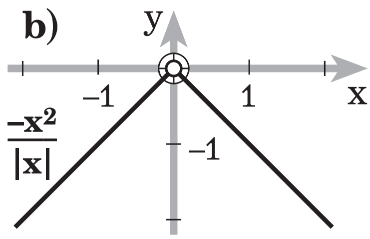


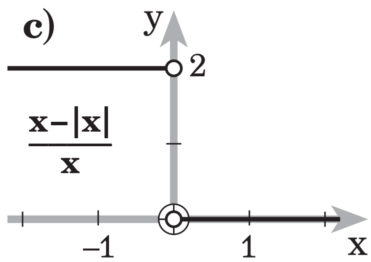
d) $f(x) = x\operatorname{sgn}|1-x|$
Nahtstelle 1
$x>1$: $f(x) = x\cdot(+1) = x$
$x=1$: $f(x) = x\cdot 0 = 0$
$x<1$: $f(x) = x\cdot(+1) = x$

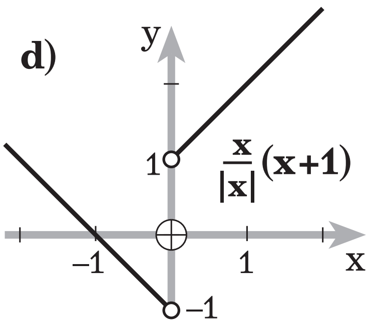


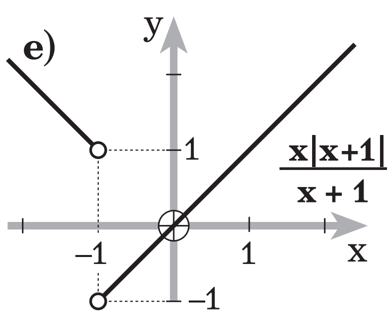
9



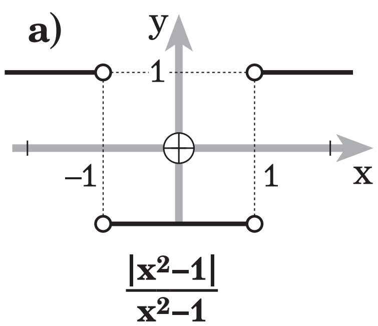


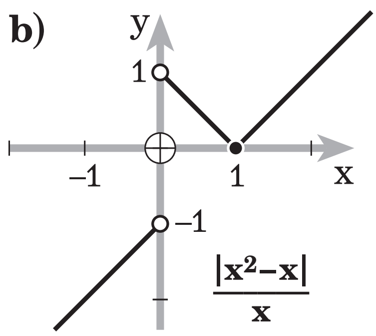


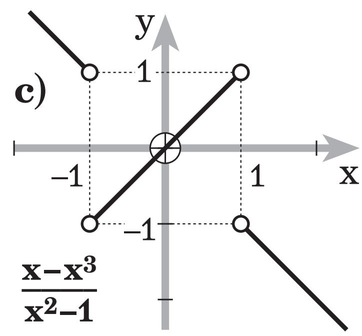


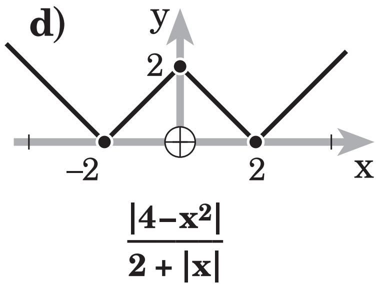


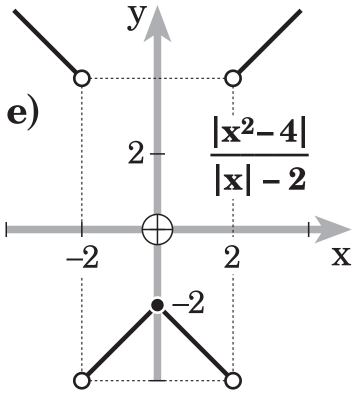
•10

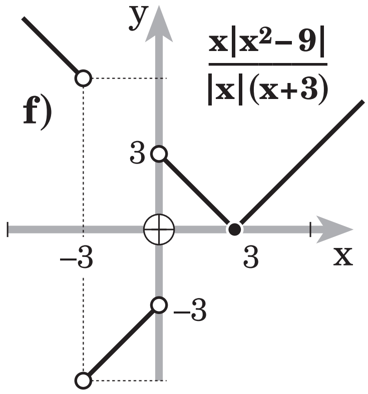




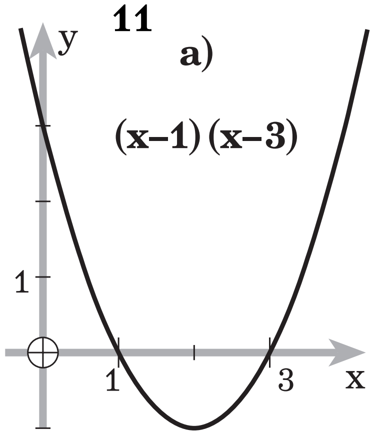


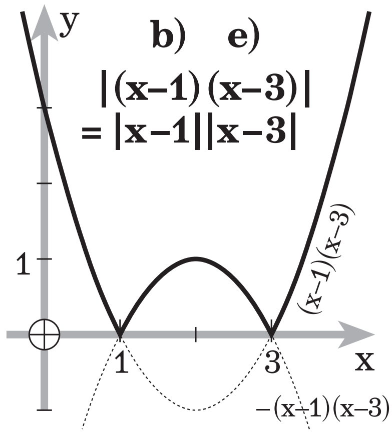

d)
$\frac{|4-x^2|}{2+|x|}$

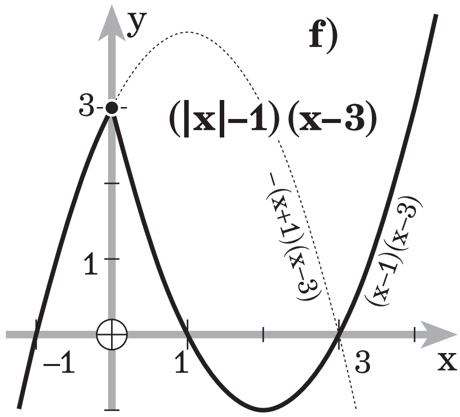

e)
$\frac{|x^2-4|}{|x|-2}$

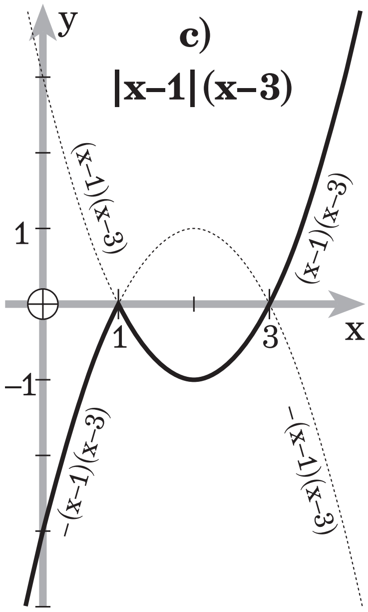

f)
$\frac{x|x^2-9|}{|x|(x+3)}$

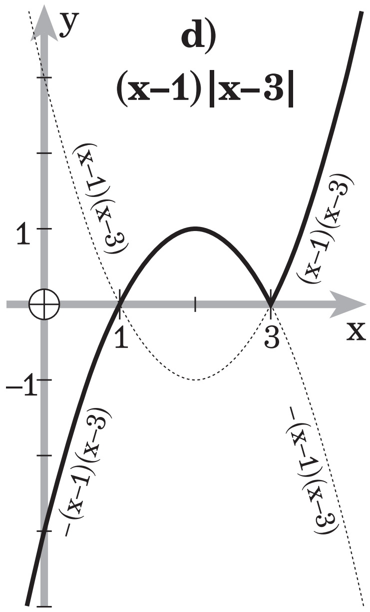
11

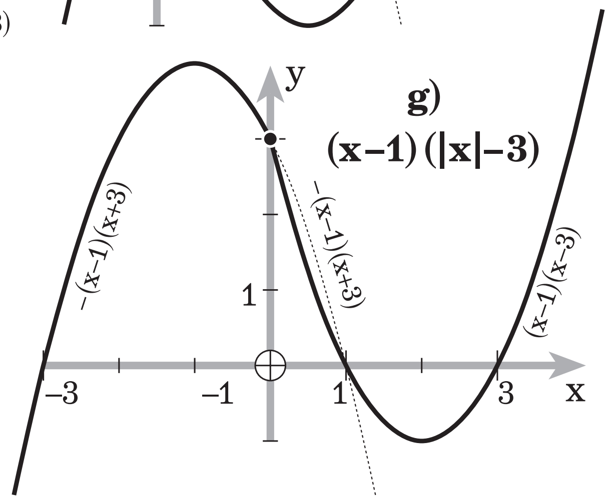

a)
(x–1) (x–3)

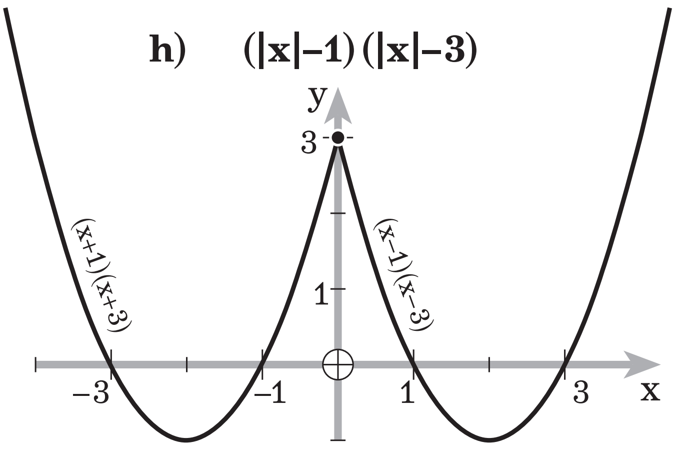

b) e)
|(x–1) (x–3)|
= |x–1||x–3|
(x–1)(x–3)
–(x–1)(x–3)

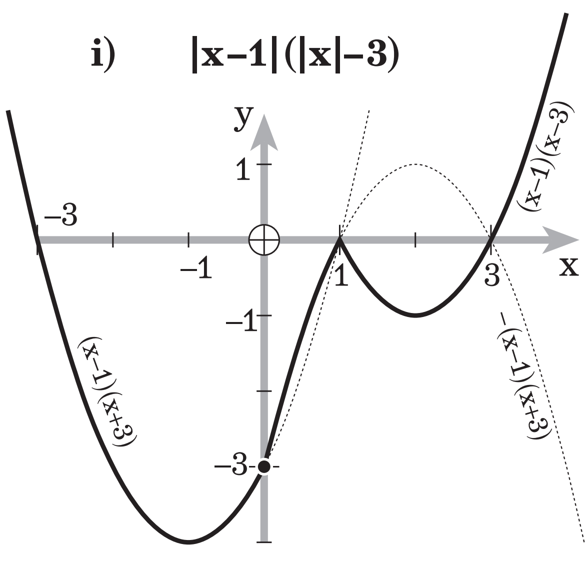

f)
(|x|–1) (x–3)
–(x+1)(x–3)
(x–1)(x–3)

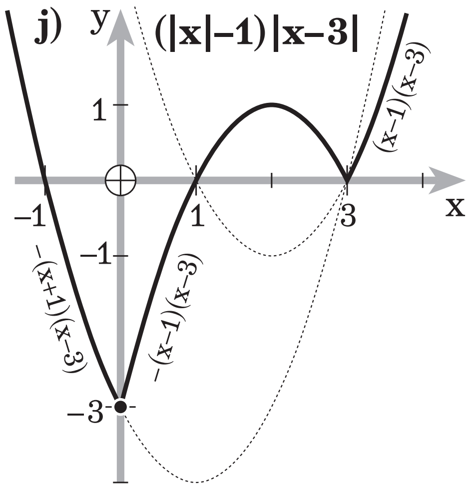

c)
|x–1|(x–3)
(x–1)(x–3)
–(x–1)(x–3)


d)
(x–1)|x–3|
(x–1)(x–3)
–(x–1)(x–3)

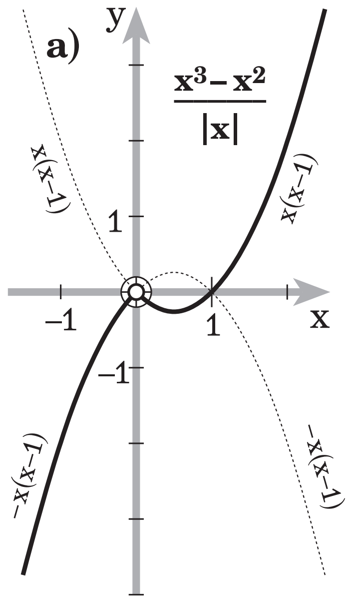

g)
(x–1) (|x|–3)
–(x–1)(x+3)
(x–1)(x–3)

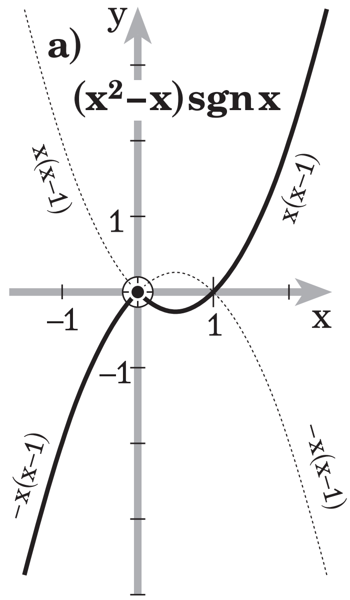

h)
(|x|–1) (|x|–3)
(x+1)(x+3)
(x–1)(x–3)

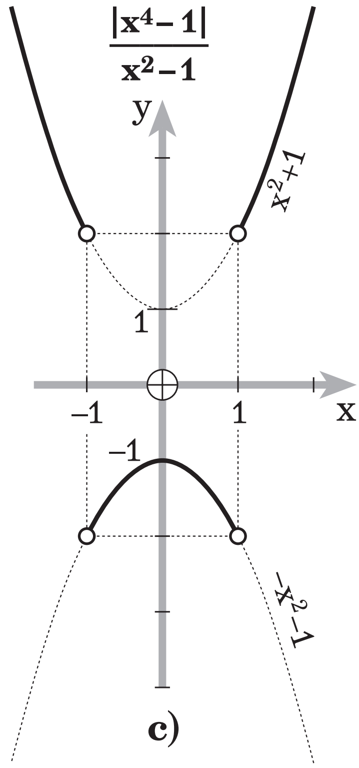

i)
|x–1|(|x|–3)
(x–1)(x–3)
(x–1)(x+3)
–(x–1)(x+3)

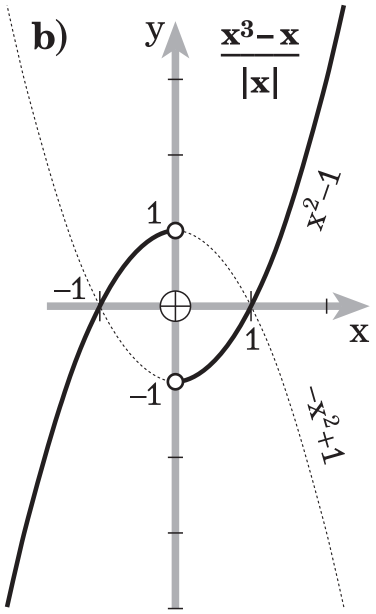

j)
$(|x|-1)\,|x-3|$
y
x
1
−1
−3
−1
1
3
$(x-1)(x-3)$
$-(x-1)(x-3)$
$-(x+1)(x-3)$

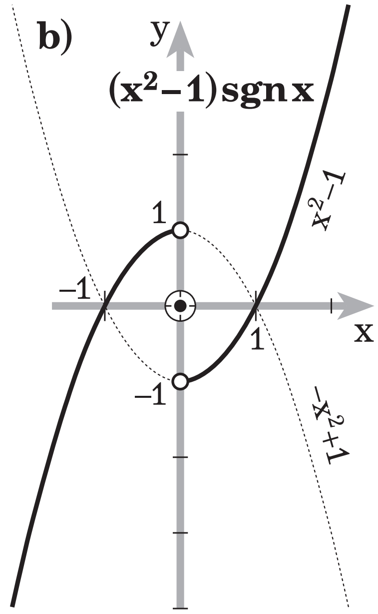
12

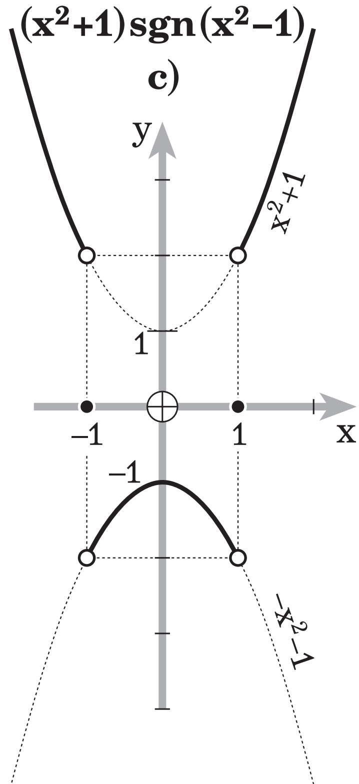

a)
$\frac{x^3-x^2}{|x|}$
y
x
1
−1
−1
1
$x(x-1)$
$x(x-1)$
$-x(x-1)$
$-x(x-1)$


a)
$(x^2-x)\,\mathrm{sgn}\,x$
y
x
1
−1
−1
1
$x(x-1)$
$x(x-1)$
$-x(x-1)$
$-x(x-1)$

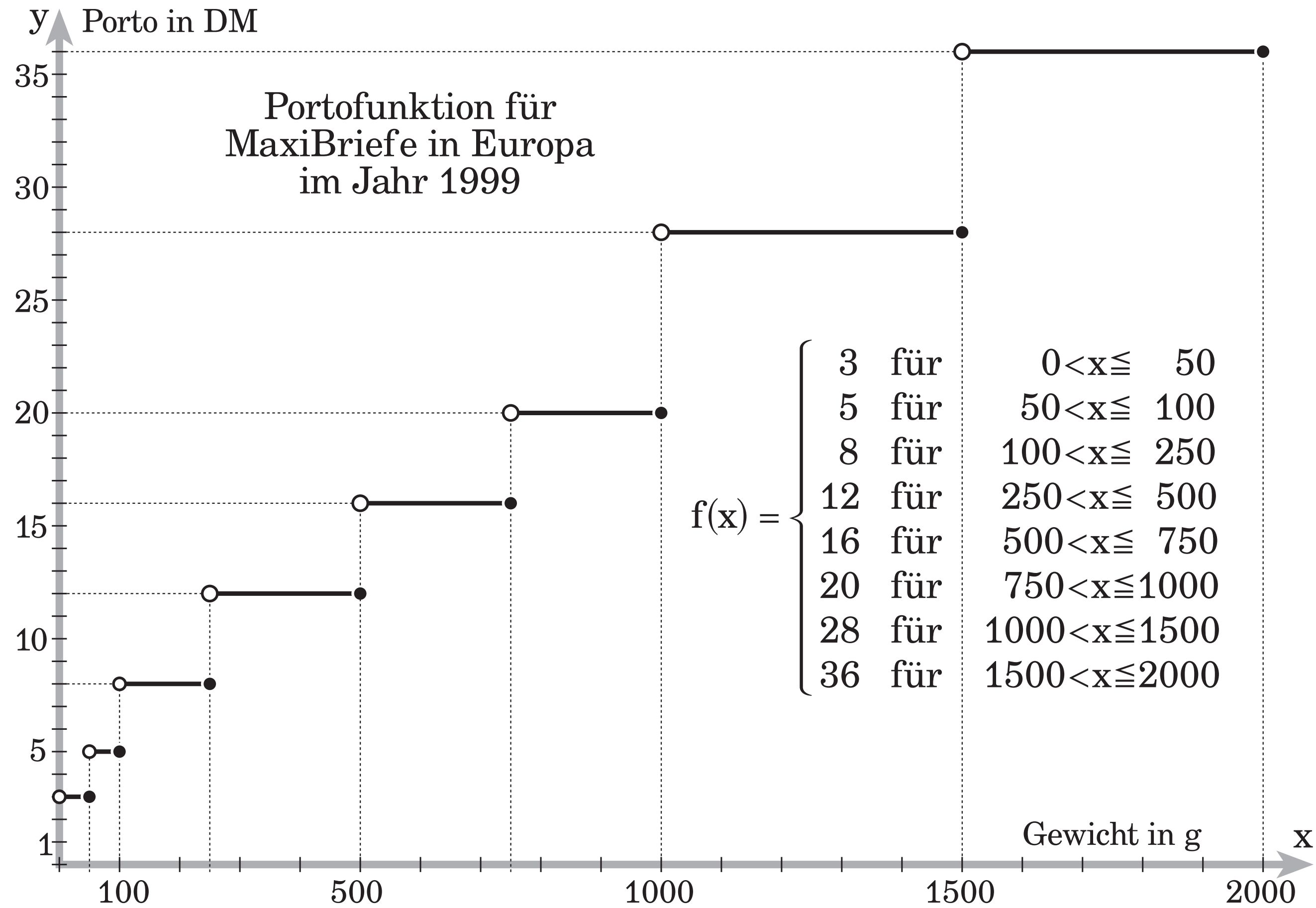

$\frac{|x^4-1|}{x^2-1}$
y
x
1
−1
−1
1
x^2+1
$-x^2-1$
c)


b)
$\frac{x^3-x}{|x|}$
y
x
1
−1
−1
1
x^2-1
$-x^2+1$


b)
$(x^2-1)\,\mathrm{sgn}\,x$
y
x
1
−1
−1
1
x^2-1
$-x^2+1$


$(x^2+1)\,\mathrm{sgn}(x^2-1)$
c)
y
x
1
−1
−1
1
x^2+1
$-x^2-1$

13



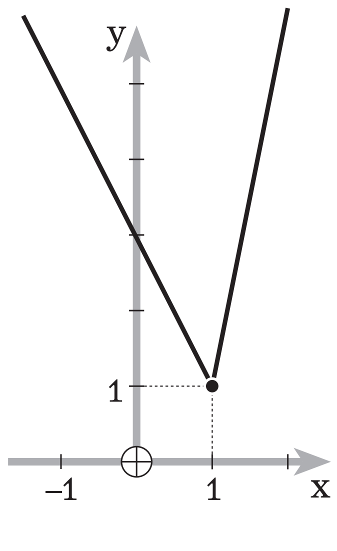
2. Unstetigkeit und Grenzwert bei Polynomen

◊1 a) $f(x) = \begin{cases} 3-2x & \text{für } x \leqq 1 \\ 5x-4 & \text{für } x > 1 \end{cases}$

$f(1) = 1$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} (5x-4) = 1 = f(1)$

also ist f in 1 stetig

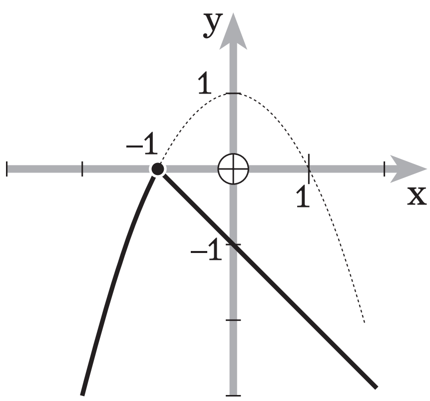


b) $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & \text{für } x < -1 \\ -x-1 & \text{für } x \geqq -1 \end{cases}$

$f(-1) = 0$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} (-x-1) = 0 = f(-1)$

also ist f in –1 stetig

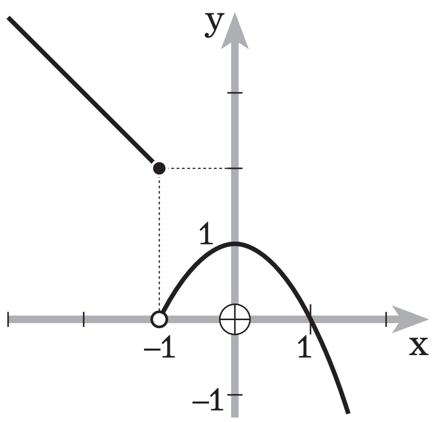


c) $f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{für } x \leqq -1 \\ 1-x^2 & \text{für } x > -1 \end{cases}$

$f(-1) = 2$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} (1-x^2) = 0 \neq f(-1)$

also ist f in –1 unstetig.

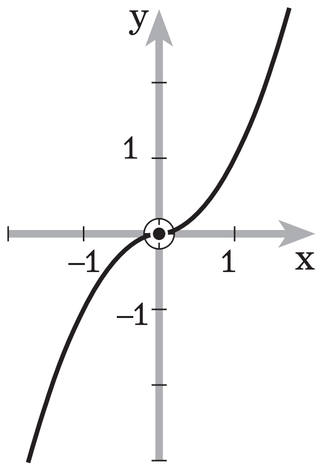


d) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{für } x < 0 \\ x^2 & \text{für } x \geqq 0 \end{cases}$

$f(0) = 0$

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} (x^2) = 0 = f(0)$

also ist f in 0 stetig.

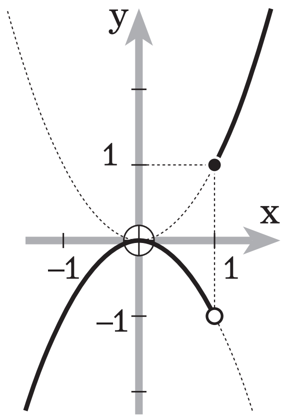


e) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{für } x < 1 \\ x^2 & \text{für } x \geqq 1 \end{cases}$

$f(1) = 1$

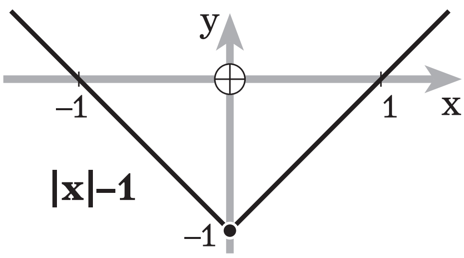
$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} (-x^2) \neq f(1)$

also ist f in 1 unstetig.

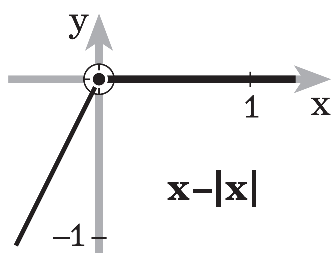


◊2 Stetig sind Funktionen, deren Terme außer Polynomen noch Beträge von Polynomen enthalten. Verdächtig auf Unstetigkeit sind Funktionen, deren Terme gestückelt sind oder sgn(…) enthalten.

a) $f(x) = |x| - 1$, f ist stetig



b) $f(x) = x - |x|$, f ist stetig



c) $f(x) = x^2 \operatorname{sgn}(1-x)$

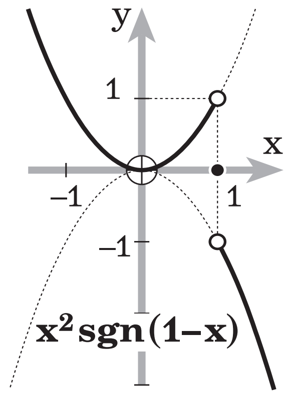
$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x < 1 \\ 0 & \text{für } x = 1 \\ -x^2 & \text{für } x > 1 \end{cases}$

d) $f(x) = (1-x) \operatorname{sgn}(x^2)$

$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{für } x < 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ 1-x & \text{für } x > 0 \end{cases}$

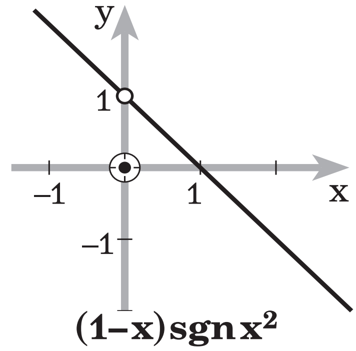
$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} (x^2) = 1 \neq f(1)$

also ist f in 1 unstetig



$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} (1-x) = 1 \neq f(0)$

also ist f in 0 unstetig

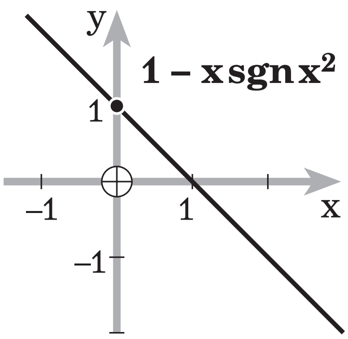


e) $f(x) = 1 - x \cdot \operatorname{sgn}(x^2)$

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{für } x<0 \\ 1 & \text{für } x=0 \\ 1-x & \text{für } x>0 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} (1-x) = 1 = f(0)$

also ist f stetig in 0

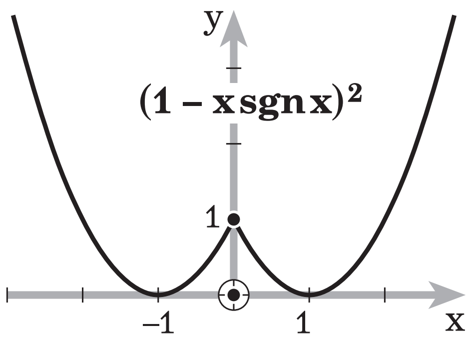


f) $f(x) = (1 - x \cdot \operatorname{sgn}(x))^2$

$$f(x) = \begin{cases} (1+x)^2 & \text{für } x<0 \\ 1 & \text{für } x=0 \\ (1-x)^2 & \text{für } x>0 \end{cases}$$

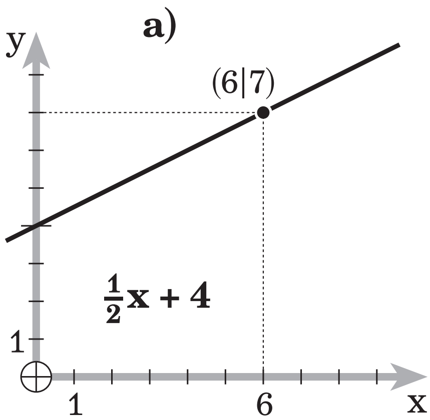
$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} (1+x)^2 = 1 = f(0)$

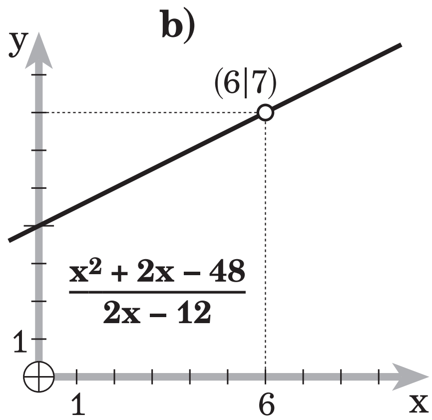
also ist f stetig in 0



•3 Untersuche, ob f in 6 stetig ist, und gib – falls möglich – die stetige Fortsetzung $\tilde{f}$ an. Zeichne G_f.

a) $f(x) = \frac{1}{2}x + 4$, f ist stetig in 6.





b) $f(x) = \frac{x^2+2x-48}{2x-12} = \frac{(x+8)(x-6)}{2(x-6)}$

6 ist Definitionslücke

$f(x) = \frac{1}{2}x+4$ für $x \neq 6$ $\qquad\qquad \tilde{f}(x) = \frac{1}{2}x+4$

c) $f(x) = \frac{x^2+2|x-6|-36}{2x-12}$

6 ist Definitionslücke

$x<6$:

$$f(x) = \frac{x^2-2(x-6)-36}{2x-12} = \frac{x^2-2x-24}{2(x-6)} = \frac{(x+4)(x-6)}{2(x-6)} = \frac{1}{2}x+2$$

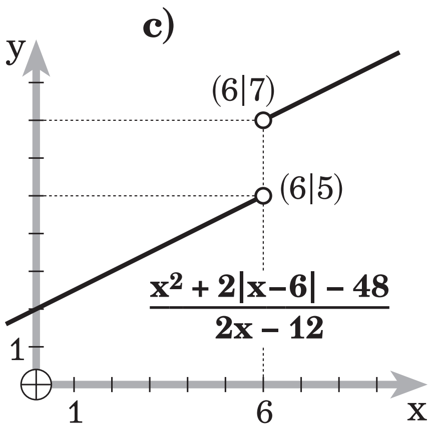
$$\lim_{x \overset{<}{\to} 6} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 6}\left(\frac{1}{2}x+2\right) = 5$$

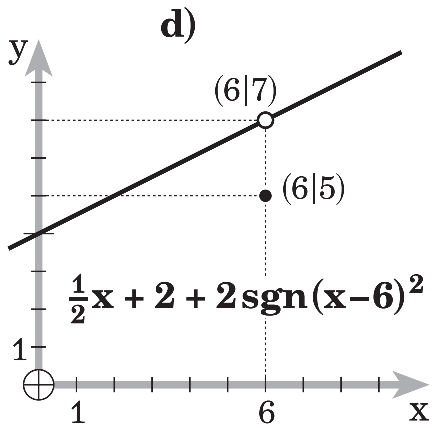
$x>6$:

$$f(x) = \frac{x^2+2(x-6)-36}{2x-12} = \frac{x^2+2x-48}{2(x-6)} = \frac{(x+8)(x-6)}{2(x-6)} = \frac{1}{2}x+4$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 6} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 6}\left(\frac{1}{2}x+4\right) = 7$$

die einseitigen Grenzwerte von f(x) in 6 sind verschieden, also ist f in 6 nicht stetig ergänzbar.





d) $f(x) = \frac{1}{2}x + 2 + 2\,\mathrm{sgn}(x-6)^2$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x+4 & \text{für } x<6 \\ 5 & \text{für } x=6 \\ \frac{1}{2}x+4 & \text{für } x>6 \end{cases}$$

schließt man den Funktionswert $f(6) = 5$ aus,
so lässt sich das Loch(6|7) stopfen, f ist stetig ergänzbar: $\tilde{f}(x) = \frac{1}{2}x+4$

e) $f(x) = \frac{1}{2}x + 1 + \mathrm{sgn}(x-6) + 2\,\mathrm{sgn}(x-6)^2$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x+2 & \text{für } x<6 \\ 4 & \text{für } x=6 \\ \frac{1}{2}x+4 & \text{für } x>6 \end{cases}$$

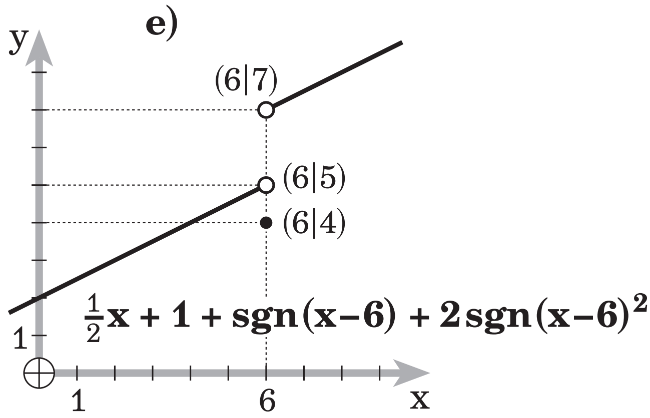
schließt man den Funktionswert $f(6) = 4$ aus, so bleibt kein stopfbares Loch übrig, weil die einseitigen Grenzwerte ungleich sind:

$\lim\limits_{x \nearrow 6} f(x) = \lim\limits_{x \nearrow 6}(\frac{1}{2}x + 2) = 5$

$\lim\limits_{x \searrow 6} f(x) = \lim\limits_{x \searrow 6}(\frac{1}{2}x + 4) = 7$

f ist nicht stetig ergänzbar

e)



•4 Bestimme k so, dass f an der Nahtstelle stetig ist.

a) $f_k(x) = \begin{cases} 1-x^2 & \text{für } x < 1 \\ kx-2 & \text{für } x \geqq 1 \end{cases}$

$f_k(1) = k - 2$

$\lim\limits_{x \nearrow 1} f_k(x) = \lim\limits_{x \nearrow 1}(1-x^2) = 0$

Bedingung für Stetigkeit:

$f_k(1) = \lim\limits_{x \nearrow 1} f_k(x)$

also $k - 2 = 0 \Rightarrow k = 2$

b) $f_k(x) = \begin{cases} 1-x & \text{für } x < 0 \\ k^2-x^2 & \text{für } x \geqq 0 \end{cases}$

$f_k(0) = k^2$

$\lim\limits_{x \nearrow 0} f_k(x) = \lim\limits_{x \nearrow 0}(1-x) = 1$

Bedingung für Stetigkeit:

$f_k(0) = \lim\limits_{x \nearrow 0} f_k(x)$

also $k^2 = 1 \Rightarrow k = \pm 1$

c) $f_k(x) = (x+1)\,\mathrm{sgn}(x-k) = \begin{cases} -x-1 & \text{für } x < k \\ 0 & \text{für } x = k \\ x+1 & \text{für } x > k \end{cases}$

$\lim\limits_{x \nearrow k} f_k(x) = \lim\limits_{x \nearrow k}(-x-1) = -k-1$ $\lim\limits_{x \searrow k} f_k(x) = \lim\limits_{x \searrow k}(x+1) = k+1$

Bedingung: $-k - 1 = k + 1$ fi $k = -1$

Kontrolle: $f_{-1}(x) = (x+1)\,\mathrm{sgn}(x+1) = |x + 1|$, f_{-1} ist stetig.

5 Wenn der Grenzwert in a existiert,
dann existieren in a auch die einseitigen Grenzwerte.

a) $f(x) = \frac{x}{x} = 1$, für $x \neq 0$; $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$

b) $f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} -1 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$; $\lim\limits_{x \nearrow 0} f(x) = -1 = -\lim\limits_{x \searrow 0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ existiert nicht

c) $f(x) = -\frac{x^2}{|x|} = -\frac{|x|\,|x|}{|x|} = -|x|$, für $x \neq 0$; $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

d) $f(x) = \frac{x-2}{2-x} = -1$, für $x \neq 2$; $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = -1$

e) $f(x) = \frac{x-|x|}{x} = \begin{cases} 2 & \text{für } x < 0 \\ 0 & \text{für } x > 0 \end{cases}$; $\lim\limits_{x \nearrow 0} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x \searrow 0} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ existiert nicht.

f) $f(x) = \frac{x - \text{sgn}(x)}{\text{sgn}(x)} = \begin{cases} -x-1 & \text{für } x<0 \\ x-1 & \text{für } x>0 \end{cases}$; $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} f(x) = -1$

g) $f(x) = \frac{|x^2-1|}{|x|-1} = \frac{|x-1||x+1|}{|x|-1}$

Nahtstellen: –1, 0, 1; Definitionslücken: –1, 1

$x<-1$: $f(x) = \frac{-(x-1)(-(x+1))}{-x-1} = -x+1$, $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} -1} f(x) = 2$

$-1<x\leqq 0$: $f(x) = \frac{-(x-1)(x+1)}{-x-1} = x-1$, $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} -1} f(x) = -2$

$\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ existiert nicht

$0<x<1$: $f(x) = \frac{-(x-1)(x+1)}{x-1} = -x-1$, $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 1} f(x) = -2$

$x>1$: $f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$, $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 1} f(x) = 2$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ existiert nicht

•6

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2+x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}(1+x) = 1$

b) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-x-2}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{(x+1)(x-2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}(x+1) = 3$

c) $\lim\limits_{x\to -4} \frac{16+x^2+8x}{-x-4} = \lim\limits_{x\to -4} \frac{x^2+8x+16}{-(x+4)} = \lim\limits_{x\to -4} \frac{(x+4)^2}{-(x+4)} = \lim\limits_{x\to -4}(-(x+4)) = 0$

d) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{8x-x^2-12}{2x-4} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{-(x^2-8x+12)}{2(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{-(x-2)(x-6)}{2(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2}(-\frac{1}{2}x+3) = 2$

e) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{4x^3-24x^2+36x}{3x^2-9x} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{4x(x^2-6x+9)}{3x(x-3)} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{4x(x-3)^2}{3x(x-3)} = \lim\limits_{x\to 3}(\frac{4}{3}x-4) = 0$

7

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3-x^2-4x+4}{x^2-3x+2} = \frac{4}{2} = 2$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-x^2-4x+4}{x^2-3x+2} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2(x-1)-4(x-1)}{(x-2)(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x\to 1}(x+2) = 3$

c) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-x^2-4x+4}{x^2-3x+2} = \lim\limits_{x\to 2}(x+2) = 4$

3. Stetigkeit und Grenzwert

•1 Zeige: f ist stetig in a.
Gib zu den ε-Werten 0,1 und 0,001 eine passende δ-Umgebung von a an.

a) $f(x) = -x, \quad a = 1$

δ-Umgebung von 1: $|x-1| < \delta$

$|f(x) - f(a)| = |-x - (-1)| = |-x + 1| = |x - 1| < \delta$

Zu jedem $\varepsilon>0$ gibt es ein $\delta = \varepsilon$ so,
dass gilt: $|f(x) - f(1)| < \varepsilon \ (=\delta)$. Also ist f stetig in 1.

$\varepsilon=0{,}1$: $\quad U_\delta(1) = U_{0,1}(1) =]1-0{,}1;1+0{,}1[=]0{,}9;1{,}1[$

$\varepsilon=0{,}001$: $\quad U_\delta(1) = U_{0,001}(1) =]1-0{,}001;1+0{,}001[=]0{,}999;1{,}001[$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x + 3, \quad a = 2$

δ-Umgebung von 2: $|x-2| < \delta$

$|f(x) - f(a)| = \left|(\frac{1}{2}x + 3) - (\frac{1}{2} \cdot 2 + 3)\right| = \left|\frac{1}{2}x - 1\right| = \frac{1}{2}|x-2| < \frac{1}{2}\delta$

Zu jedem $\varepsilon>0$ gibt es ein $\delta = 2\varepsilon$ so,
dass gilt: $|f(x) - f(2)| < \varepsilon \ (=\frac{1}{2}\delta)$. Also ist f stetig in 2.

$\varepsilon=0{,}1$: $\quad U_\delta(2) = U_{0,2}(2) =]2-0{,}2;2+0{,}2[=]1{,}8;2{,}2[$

$\varepsilon=0{,}001$: $\quad U_\delta(2) = U_{0,002}(2) =]2-0{,}002;2+0{,}002[=]1{,}998;2{,}002[$

c) $f(x) = mx + t, \quad a = 1$

δ-Umgebung von 1: $|x-1| < \delta$

$|f(x) - f(a)| = |mx+t - (m\cdot1+t)| = |mx - m| = |m||x-1| < m\delta$

Zu jedem $\varepsilon>0$ gibt es ein $\delta = \varepsilon/|m|$ so,
dass gilt: $|f(x) - f(1)| < \varepsilon \ (=|m|\delta)$. Also ist f stetig in 1.

$\varepsilon=0{,}1$: $\quad U_\delta(1) = U_{0,1/|m|}(1) =]1-0{,}1/|m|;1+0{,}1/|m|[$

$\varepsilon=0{,}001$: $\quad U_\delta(1) = U_{0,001/|m|}(1) =]1-0{,}001/|m|;1+0{,}001/|m|[$

d) $f(x) = \frac{1}{x}, \quad a = 3$

δ-Umgebung von 3: $|x-3| < \delta \Rightarrow 3 - \delta < x < 3 + \delta$

$|f(x) - f(3)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{3-x}{3x}\right| < \frac{\delta}{3|x|} < \frac{\delta}{3\cdot(3-\delta)} < \varepsilon$

$\Rightarrow \delta < 9\varepsilon - 3\delta\varepsilon$

$\Rightarrow \delta < \frac{9\varepsilon}{1+3\varepsilon}$

$\varepsilon = 0{,}1 \Rightarrow \delta < \frac{9}{13} \quad (\approx 0{,}7)$

$U_\delta(3) =]\frac{30}{13};\frac{48}{13}[\quad (\approx]2{,}3;3{,}7[)$

$\varepsilon = 0{,}001 \Rightarrow \delta < \frac{9}{1003} \quad (\approx 0{,}009)$

$U_\delta(3) =]\frac{3000}{1003};\frac{3018}{1003}[\quad (\approx]2{,}991;3{,}009[)$

2 **a)** $\lim\limits_{x \lesssim 1} \sqrt{1-x^2} = 0$

b) $\lim\limits_{x \gtrsim 0} \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \gtrsim 0} \frac{\sqrt{x}\sqrt{x}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \gtrsim 0}(\sqrt{x}-1) = -1$

c) $\lim\limits_{x \to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = \lim\limits_{x \to 4} \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}-2} = \lim\limits_{x \to 4}(\sqrt{x}+2) = 4$

d) $\lim\limits_{x \gtrsim 2} \frac{x^2-4}{\sqrt{x-2}} = \lim\limits_{x \gtrsim 2} \frac{(x-2)(x+2)}{\sqrt{x-2}} = \lim\limits_{x \gtrsim 2} \frac{\sqrt{x-2}\sqrt{x-2}(x+2)}{\sqrt{x-2}} = \lim\limits_{x \gtrsim 2} \sqrt{x-2}(x+2) = 0$

•3 $f(x) - b = \frac{1-x}{x+2} + 1 = \frac{3}{x+2}$

a) Gib einen Wert r so an, dass für x>r gilt: $|f(x) - b| < \frac{1}{100}$

$\left|\frac{3}{x+2}\right| < \frac{1}{100} \Rightarrow \frac{1}{|x+2|} < \frac{1}{300} \Rightarrow |x+2| > 300$

für x>0 gilt x+2 > 300 ⇒ x>298, also r=298

b) Zeige: Zu jedem ε>0 gibt es einen Wert r so, dass für alle x>r gilt: $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Welcher Grenzwert ist damit nachgewiesen ?

$\left|\frac{3}{x+2}\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{|x+2|} < \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow |x+2| > \frac{3}{\varepsilon}$

für x>–2 gilt $x+2 > \frac{3}{\varepsilon} \Rightarrow x > \frac{3}{\varepsilon} - 2$, also $r = \frac{3}{\varepsilon} - 2$

Damit ist nachgewiesen: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -1$

c) Zeige: Zu jedem ε>0 gibt es einen Wert s so, dass für alle x<s gilt: $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Welcher Grenzwert ist damit nachgewiesen ?

für x<–2 gilt $x+2 < \frac{3}{\varepsilon} \Rightarrow x < \frac{3}{\varepsilon} - 2$, also $s = \frac{3}{\varepsilon} - 2$

Damit ist nachgewiesen: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$

4 Stetig sind

k mit k(x)=c, i mit i(x)=x, w mit $w(x)=\sqrt{x}$ und s mit s(x)=sin x.

a) $f(x) = \frac{x-1}{2x^2}$

Der Zähler z ist als Differenz stetiger Funktionen z = i – k stetig;
der Nenner n ist als Produkt stetiger Funktionen n = k·i·i stetig,
Der Quotient z/n ist deshalb auch stetig.

b) $f(x) = \sqrt{1-(\sin x)^2}$

s ist stetig, also auch s^2, also auch $d = i - s^2$, und damit $f = w \circ d$

c) $f(x) = |x| = \sqrt{x^2}$; f ist stetig wegen $f = w \circ (i \cdot i)$

d) $f(x) = \left|\frac{1-x}{\cos x}\right| = \frac{|z(x)|}{|n(x)|}$

$|z|=|k-i|$ ist stetig, ebenso $|n|= w\circ(1-s^2)$, also auch $f=|z|/|n|$

5 **a)** $f(x) = x^3 - x^2 - 1$, $I = [0;2]$

$f(0) = -1$, $f(2) = 3$; f hat in I mindestens eine Nullstelle, denn:
f ist definiert und stetig auf I und hat an den Rändern Werte verschiedenen Vorzeichens.

b) $f(x) = \frac{1}{2}x - \sin x$, $I = [1;2]$

$f(1) = 0{,}5 - \sin 1 < 0$, $f(2) = 2 - \sin 2 > 0$; Begründung wie in **a)**

c) $f(x) = x - \tan x$, $I = [4;4{,}5]$

$f(4) \approx 2{,}84$, $f(4{,}5) \approx -0{,}64$; Begründung wie in **a)**

6 Zeige: f mit $f(x) = \frac{1}{x-2}$ hat in $[a;b] = [1;3]$ keine Nullstelle,
obwohl $f(a)<0$ und $f(b)>0$ ist.
Warum widerspricht das nicht dem Nullstellensatz?

f hat im Intervall in 2 eine Definitionslücke.

•7 Zeige: f hat in I genau 1 Nullstelle. (Nullstellensatz, Monotonie!)

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$, $I_1 = [0;1]$, $I_2 = [3;5]$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3)$

I_1: $f(0) = -2$, $f(1) = 2$

f hat in I_1 mindestens eine Nullstelle (Begründung wie in **5 a)**).

f hat in I_1 genau eine Nullstelle, wenn f in I_1 monoton ist.

f' wechselt das Vorzeichen in 1 und 3, also nicht in $[0;1]$,

deshalb ist f in $[0;1]$ monoton (steigend).

I_2: $f(3) = -2$, $f(5) = 18$

f hat in I_2 mindestens eine Nullstelle (Begründung wie in **5 a)**).

f hat in I_2 genau eine Nullstelle, wenn f in I_2 monoton ist.

f' wechselt das Vorzeichen in 1 und 3, also nicht in $[3;5]$,

deshalb ist f in $[3;5]$ monoton (steigend).

b) $f(x) = x^5 + 2x^3 + x - 5$, $I_1 = [1;2]$, $I_2 = [1;\frac{11}{10}]$

$f'(x) = 5x^4 + 6x^2 + 1 \geqq 1$, f steigt streng monoton

I_1: $f(0) = -5$, $f(2) = 45$; Begründung wie in **a)**

I_2: $f(1) = -1$, $f(1{,}1) > 0$; Begründung wie in **a)**

•8 Bestimme ein Intervall der Länge 1 mit ganzzahligen Grenzen, in dem f mindestens einmal den Wert y annimmt.

a) $f(x) = x^3 - x - 1, \quad y = f(a) = 10$

$f(0) = -1;\ f(1) = -1;\ f(2) = 5;\ f(3) = 23;$ wegen $5<10<23$ ist $2<a<3$

b) $f(x) = x^4 - 3x^2 - x, \quad y = f(a) = -1$

$f(0) = 0;\ f(1) = -3;\ f(2) = 2;$ wegen $-3<-1<2$ ist $1<a<2$

Wegen $-3 < -1 < 0$ ist auch $0 < a < 1$ Lösung.

9

a) $f(x) = \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{(x-1)(x+1)}{|x|-1} = \begin{cases} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1, x \geqq 0 \\ \frac{(x-1)(x+1)}{-x-1} = 1-x, x<0 \end{cases}$ und $x \neq \pm 1$

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2-1}} = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0}(1-x) = 1 \qquad \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2-1}} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0}(x+1) = 1$

f ist stetig in a=0, ±1 sind Definitionslücken.

b) $f(x) = \sin\frac{|x+1|}{x+1} = \begin{cases} \sin\frac{x+1}{x+1} = \sin 1, x>-1 \\ \sin\frac{-x-1}{x+1} = \sin(-1), x<-1 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -1} \sin\frac{|x+1|}{x+1} = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} -1}(\sin(-1)) = \sin(-1)$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} \sin\frac{|x+1|}{x+1} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1}(\sin 1) = \sin 1$

f ist nicht stetig in a=–1, –1 ist Definitionslücke.

c) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}+1 & \text{für } 0 \leqq x < 4 \\ 19 - x^2 & \text{für } 4 \leqq x \end{cases}$

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 4} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 4}(\sqrt{x}+1) = 3 = f(4) = 3;$ f ist stetig in a=4.

10 $f(x) = \frac{\sqrt{|x|}-x^2}{\sqrt{|x|}}\operatorname{sgn}x = \frac{\sqrt{|x|}\sqrt{|x|}-\sqrt{|x|}x^2}{\sqrt{|x|}\sqrt{|x|}}\operatorname{sgn}x = \frac{|x|-(\sqrt{|x|}|x||x|)}{|x|}\operatorname{sgn}x$

$f(x) = (1-|x|\sqrt{|x|})\operatorname{sgn}x = \begin{cases} -1-x\sqrt{-x} & x<0 \\ 1-x\sqrt{x} & x>0 \end{cases}$

a) $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0}\left(\frac{\sqrt{|x|}-x^2}{\sqrt{|x|}}\operatorname{sgn}x\right) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0}(-1-x\sqrt{-x}) = -1$

b) $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0}\left(\frac{\sqrt{|x|}-x^2}{\sqrt{|x|}}\operatorname{sgn}x\right) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0}(1-x\sqrt{x}) = 1$

11 **a)** $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \leqq 1 \\ \sin\frac{\pi}{2x} & \text{für } x>1 \end{cases}, \quad f(1) = 1 = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1}(\sin\frac{\pi}{2x}) = \sin\frac{\pi}{2}$, also stetig in 1

b) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } x \leqq 0{,}5 \\ 4\sin\frac{x}{2} & \text{für } x > 0{,}5 \end{cases}$, $f(0{,}5) = 1 \neq \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0{,}5}(4\sin\frac{x}{2}) = 4\sin\frac{1}{4}$,

also ist f unstetig in 0,5.

•12 $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } x \leqq a \\ 4\sin\frac{x}{2} & \text{für } x > a \end{cases}$ $\quad f(a) = 2a \quad \lim\limits_{x \overset{>}{\to} a}(4\sin\frac{x}{2}) = 4\sin\frac{a}{2}$

Bedingung für Stetigkeit in a: $2a = 4\sin\frac{a}{2}$, also r $a - 2\sin\frac{a}{2} = 0$.

Einzige (triviale) Lösung: $a = 0$

Neue Aufgabe (ab 2. Auflage)

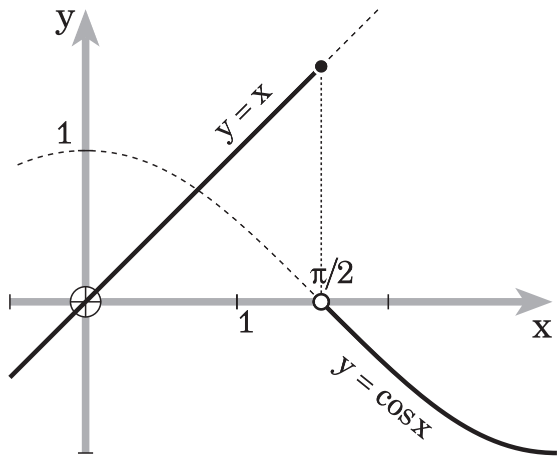
$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \leqq a \\ \cos x & \text{für } x > a \end{cases}$

a) Zeichne G_f für $a = \frac{1}{2}\pi$ und zeige, dass f unstetig ist.

b) Zeige: Es gibt einen a-Wert so, dass f stetig ist.
Bestimme mit dem Taschenrechner ein Intervall der Länge 0,1, in dem dieser a-Wert liegt.

Lösung

a) $f(\frac{1}{2}\pi) = \frac{1}{2}\pi \neq 0 = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} \pi/2} f(x)$



b) Bedingung für Stetigkeit: $f(a) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} a} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} a} f(x)$

Deutung: Schnitt von cos-Kurve und Gerade mit $y = x$: $\cos a = a$

$d(a) = \cos a - a$ Taschenrechner $a_1 = 0{,}73$ $d(0{,}73) = 0{,}015\ldots$

Taschenrechner $a_2 = 0{,}74$ $d(0{,}74) = -0{,}0015\ldots$

aus dem Nullstellensatz folgt wegen der Stetigkeit von d:
Es gibt mindestens einen a-Wert $\in \,]0{,}73; 0{,}74[$ so, dass f stetig ist.

•13

a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2-1}{x^3-4x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1-\frac{1}{x^2}}{x-\frac{4}{x}} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1-0}{x-0} = 0$

b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2-x^3}{x^3-x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\frac{2}{x^3}-1}{1-\frac{1}{x}} = \dfrac{0-1}{1-0} = -1$

c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3+x^2}{4-x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x+1}{\frac{4}{x^2}-1} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x+1}{0-1} = \mp\infty$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x}{\sqrt{x^2-4}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2}{\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}} = \dfrac{2}{1} = 2$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x}{\sqrt{x^2-4}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{-\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}} = \dfrac{2}{-1} = -2$

•14

a) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{2-x^3}{x^3-2x^2} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{2-x^3}{x^2(x-2)} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{2-0}{x^2(0-2)} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{-1}{x^2} = -\infty$

b) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{2-x^3}{x^3-2x^2} = \lim\limits_{x\to2} \dfrac{2-x^3}{x^2(x-2)} = \lim\limits_{x\to2} \dfrac{2-8}{4(x-2)} = \lim\limits_{x\to2} \dfrac{-3/2}{x-2}$

$\lim\limits_{x\gtrsim2} \dfrac{2-x^3}{x^3-2x^2} = »\dfrac{-3/2}{+0}« = -\infty \qquad \lim\limits_{x\lesssim2} \dfrac{2-x^3}{x^3-2x^2} = »\dfrac{-3/2}{-0}« = +\infty$

c) $\lim\limits_{x\to\pm2} \dfrac{2x}{\sqrt{x^2-4}}$, der Term ist nicht definiert für $x^2 \leqq 4$, also für $-2 \leqq x \leqq 2$

Definitionsmenge: $x<-2$ oder $x>2$

$\lim\limits_{x\lesssim-2} \dfrac{2(-2)}{\sqrt{(x-2)(x+2)}} = \lim\limits_{x\lesssim-2} \dfrac{-4}{\sqrt{-4(x+2)}} = \lim\limits_{x\lesssim-2} \dfrac{-2}{\sqrt{-(x+2)}} = »\dfrac{-2}{+0}« = -\infty$

$\lim\limits_{x\gtrsim2} \dfrac{2\cdot2}{\sqrt{(x-2)(x+2)}} = \lim\limits_{x\gtrsim2} \dfrac{4}{\sqrt{(x-2)\cdot4}} = \lim\limits_{x\gtrsim2} \dfrac{2}{\sqrt{x-2}} = »\dfrac{2}{+0}« = +\infty$

VIII. Differenzierbarkeit

1. Differenzierbarkeit bei Polynomen

◊1 Gegeben ist ein Funktionsterm f(x). Bestimme f'(x) sowie $D_{f_{max}}$ und $D_{f'}$.

$$|x|' = \begin{cases} -1 \text{ für } x < 0 \\ +1 \text{ für } x > 0 \end{cases} \quad \text{in geschlossener Darstellung: } |x|' = \frac{|x|}{x}$$

a) $(x^n|x|)' = n\cdot x^{n-1}|x| + x^n\frac{|x|}{x} = n\cdot x^{n-1}|x| + x^{n-1}|x| = x^{n-1}|x|(n+1)$

$D_{f_{max}} = \mathbb{R}$; n=0: $D_{f'} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$, n>0: $D_{f'} = \mathbb{R}$

b) $|x|\sqrt{x} = x\sqrt{x}$ in $D_{f_{max}} = \mathbb{R}_0^+$

$(|x|\sqrt{x})' = (x\sqrt{x})' = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

oder: $(x\sqrt{x})' = (x^{3/2})' = \frac{3}{2}x^{1/2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ $D_{f'} = \mathbb{R}^+$

c) $(|x|\sin x)' = \frac{|x|}{x}\sin x + |x|\cos x$ $D_{f_{max}} = \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \lessgtr 0} f'(x) = 0 = \lim\limits_{x \gtrless 0} f'(x)$ also $D_{f'} = \mathbb{R}$

d) $(|x|\cos x)' = \frac{|x|}{x}\cos x - |x|\sin x$ $D_{f_{max}} = \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \lessgtr 0} f'(x) = -1 \neq \lim\limits_{x \gtrless 0} f'(x) = 1$ also $D_{f'} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

e) $(|x|\tan x)' = \operatorname{sgn}x \cdot \tan x + |x|(1 + (\tan x)^2)$
$= \operatorname{sgn}x\,(\tan x + x + x(\tan x)^2)$

$D_{f_{max}} = \mathbb{R}\setminus\{(2z-1)\frac{\pi}{2}\}$, $z \in \mathbb{Z}$

$\lim\limits_{x \lessgtr 0} f'(x) = 0 = \lim\limits_{x \gtrless 0} f'(x) = 1$ also $D_{f'} = D_{f_{max}}$

2 Gegeben ist ein Funktionsterm f(x). Bestimme f'(x) sowie $D_{f_{max}}$ und $D_{f'}$.

a) $\left(\frac{x^n}{|x|}\right)' = \dfrac{|x|nx^{n-1} - x^n\frac{|x|}{x}}{x^2} = \dfrac{|x|nx^{n-1} - x^{n-1}|x|}{x^2} = |x|nx^{n-3} - |x|x^{n-3}$

$= |x|x^{n-3}(n-1)$

$D_{f_{max}} = D_{f'} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$;

b) $\left(\frac{\sqrt{x}}{|x|}\right)' = \left(\frac{\sqrt{x}}{x}\right)' = (x^{-1/2})'$ in $D_{f_{max}} = \mathbb{R}^+$

$(x^{-1/2})' = -\frac{1}{2}x^{-3/2} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$ $D_{f'} = D_{f_{max}} = \mathbb{R}^+$

c) $\left(\frac{|x|}{\sin x}\right)' = \frac{\sin x \frac{|x|}{x} - |x|\cos x}{(\sin x)^2} = \frac{|x|}{x} \cdot \frac{\sin x - x\cos x}{(\sin x)^2}$

$D_{f_{max}} = D_{f'} = \mathbb{R}\setminus\{z\pi\},\ z \in \mathbb{Z}$

d) $\left(\frac{|x|}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \frac{|x|}{x} - |x|\sin x}{(\cos x)^2} = \frac{|x|}{x} \cdot \frac{\cos x + x\sin x}{(\cos x)^2}$

$D_{f_{max}} = \mathbb{R}\setminus\{(2z-1)\frac{\pi}{2}\},\ z \in \mathbb{Z}$

$\lim\limits_{x \lessdot 0} f'(x) = -1 \neq \lim\limits_{x \gtrdot 0} f'(x) = 1$ also $D_{f'} = D_{f_{max}}\setminus\{0\}$

e) $\left(\frac{|x|}{\tan x}\right)' = \frac{\tan x \frac{|x|}{x} - |x|(1+(\tan x)^2)}{(\tan x)^2} = \frac{|x|}{x} \cdot \frac{\tan x - x - x(\tan x)^2}{(\tan x)^2}$

$D_{f_{max}} = D_{f'} = \mathbb{R}\setminus\{z\pi\},\ z \in \mathbb{Z}$

3 f sei differenzierbar. Leite ab:

a) $(|f(x)|)' = f'(x) \cdot \frac{|f(x)|}{f(x)}$ **b)** $f(|x|) = f'(|x|) \cdot \frac{|x|}{x}$

◊4

a) $f(x) = \begin{cases} 2x-2 & \text{für } x \leqq 2 \\ -x^2+6x-6 & \text{für } x > 2 \end{cases}$

$f(2) = 2 = \lim\limits_{x \gtrdot 2} f(x)$, also ist f stetig in 2

$f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{für } x < 2 \\ -2x+6 & \text{für } x > 2 \end{cases}$, $\lim\limits_{x \lessdot 2} f'(x) = 2 = \lim\limits_{x \gtrdot 2} f'(x)$

also ist f 1mal differenzierbar in 2

$f''(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 2 \\ -2 & \text{für } x > 2 \end{cases}$, $\lim\limits_{x \lessdot 2} f''(x) = 0 \neq \lim\limits_{x \gtrdot 2} f''(x) = -2$

also ist f nicht 2mal differenzierbar in 2.

b) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{für } x \leqq 1 \\ x^2-4x+2 & \text{für } x > 1 \end{cases}$

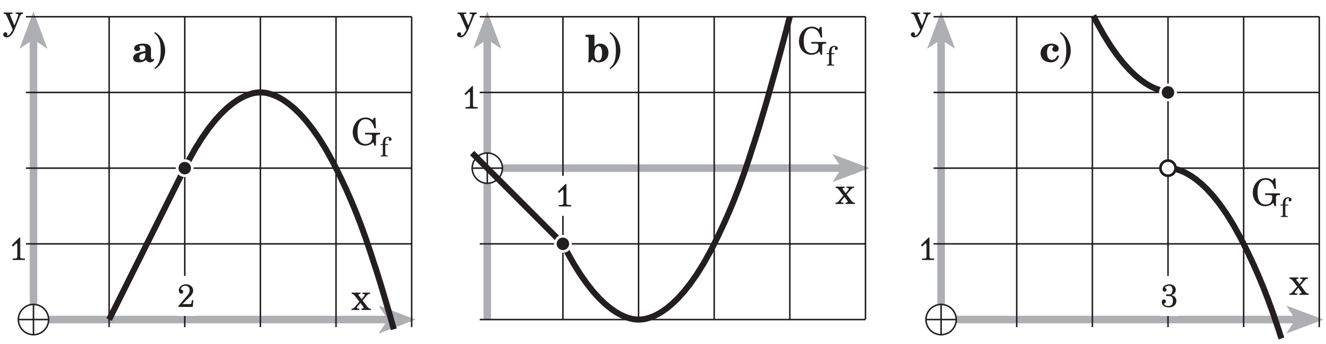
$f(1) = -1 = \lim\limits_{x \gtrdot 1} f(x)$, also ist f stetig in 1.

$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x < 1 \\ 2x-4 & \text{für } x > 1 \end{cases}$, $\lim\limits_{x \lessdot 1} f'(x) = -1 \neq \lim\limits_{x \gtrdot 1} f'(x) = -2$

also ist f nicht differenzierbar in 1.

c) $f(x) = \begin{cases} x^2-6x+12 & \text{für } x \leqq 3 \\ -x^2+6x-7 & \text{für } x > 3 \end{cases}$, $f(3) = 3 \neq \lim\limits_{x \gtrdot 3} f(x) = 2$

also ist f unstetig in 3 und deshalb auch nicht differenzierbar in 3.



d) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x(x^2+3x-2) = \frac{1}{2}(x^3+3x^2-2x) & \text{für } x \leqq 1 \\ -\frac{1}{8}x(3x^2-12x+8) = -\frac{1}{8}(3x^3-12x^2+8x) & \text{für } x > 0 \end{cases}$

$f(0) = 0 = \lim\limits_{x \gtrless 0} f(x)$, also ist f stetig in 0

$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(3x^2+6x-2) & \text{für } x < 0 \\ -\frac{1}{8}(9x^2-24x+8) & \text{für } x > 0 \end{cases}$, $\lim\limits_{x \lessgtr 0} f'(x) = -1 = \lim\limits_{x \gtrless 0} f'(x)$

also ist f 1mal differenzierbar in 0

$f''(x) = \begin{cases} 3x+3 & \text{für } x < 0 \\ -\frac{9}{4}x+3 & \text{für } x > 0 \end{cases}$

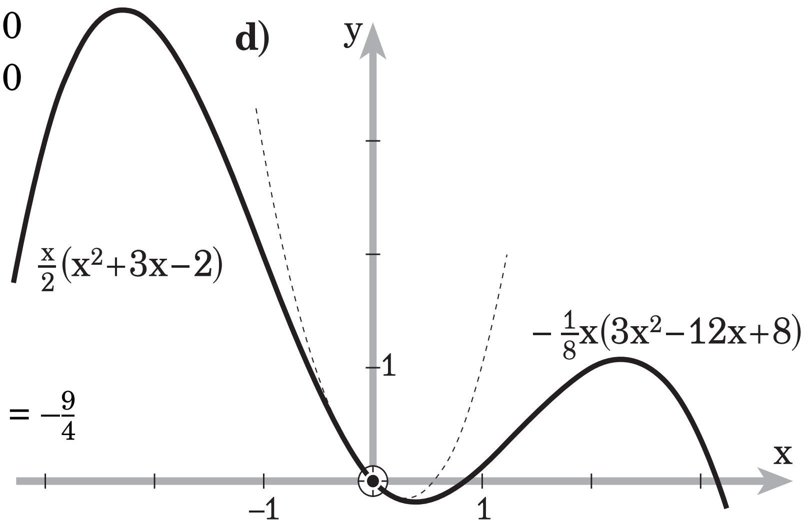
$\lim\limits_{x \lessgtr 0} f''(x) = 3 = \lim\limits_{x \gtrless 0} f''(x)$

also ist f 2mal differenzierbar in 0

$f'''(x) = \begin{cases} 3 & \text{für } x < 0 \\ -\frac{9}{4} & \text{für } x > 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \lessgtr 0} f'''(x) = 3 \neq \lim\limits_{x \gtrless 0} f'''(x) = -\frac{9}{4}$

also ist f nicht 3mal differenzierbar in 0.



◊5 Auf Unstetigkeit verdächtig sind nur Funktionen mit sgn-Termen.

a) $f(x) = x|x| = \begin{cases} -x^2 & \text{für } x \leqq 0 \\ x^2 & \text{für } x > 0 \end{cases}$, f ist stetig in 0

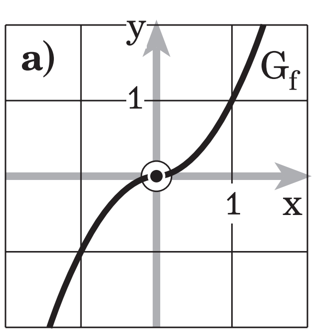
$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{für } x < 0 \\ 2x & \text{für } x > 0 \end{cases}$, $\lim\limits_{x \lessgtr 0} f'(x) = 0 = \lim\limits_{x \gtrless 0} f'(x)$

also ist f 1mal differenzierbar in 0

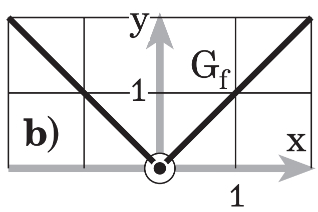
$f''(x) = \begin{cases} -2 & \text{für } x < 0 \\ 2 & \text{für } x > 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \lessgtr 0} f''(x) = -2 \neq \lim\limits_{x \gtrless 0} f''(x) = 0$

also ist f nicht 2mal differenzierbar in 0



b) $f(x) = x \cdot \text{sgn}(x) = \begin{cases} -x & \text{für } x < 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ x & \text{für } x > 0 \end{cases} = |x|$

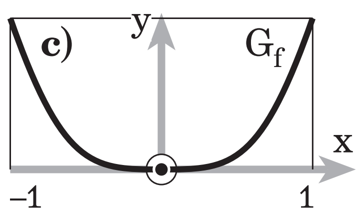


$f(0) = 0 = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$, also ist f stetig in 0

$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x < 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$, $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f'(x) = -1 \neq \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f'(x) = 1$,

also ist f nicht differenzierbar in 0

c) $f(x) = x^2|x| = \begin{cases} -x^3 & \text{für } x \leqq 0 \\ x^3 & \text{für } x > 0 \end{cases}$, f ist stetig in 0



$f'(x) = \begin{cases} -3x^2 & \text{für } x < 0 \\ 3x^2 & \text{für } x > 0 \end{cases}$

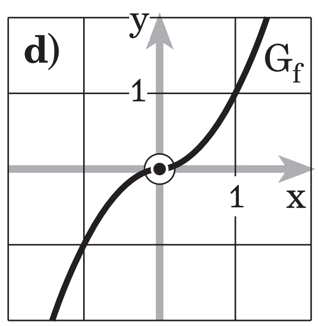
$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f'(x) = 0 = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f'(x)$, also ist f 1mal differenzierbar in 0

$f''(x) = \begin{cases} -6x & \text{für } x < 0 \\ 6x & \text{für } x > 0 \end{cases}$, $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f''(x) = 0 = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f''(x)$

also ist f 2mal differenzierbar in 0
f ist nicht 3-mal differenzierbar in 0, weil $f'''(x<0) = -6$ und $f'''(x>0) = 6$

d) $f(x) = x^2 \cdot \text{sgn}(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{für } x < 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ x^2 & \text{für } x > 0 \end{cases}$, $f(0) = 0 = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$

also ist f stetig in 0

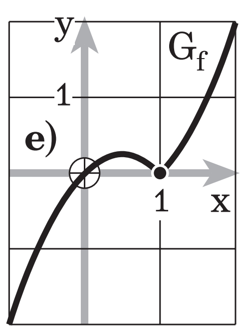


$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{für } x < 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ 2x & \text{für } x > 0 \end{cases}$, $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f'(x) = 0 = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f'(x)$

also ist f 1mal differenzierbar in 0

$f''(x) = \begin{cases} -2 & \text{für } x < 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ 2 & \text{für } x > 0 \end{cases}$, $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f''(x) = -2 \neq \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f''(x) = 2$

also ist f nicht 2mal differenzierbar in 0

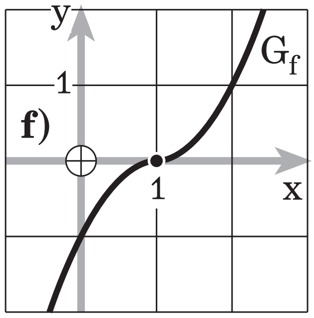


e) $f(x) = x|x-1| = \begin{cases} -x^2 + x & \text{für } x \leqq 1 \\ x^2 - x & \text{für } x > 1 \end{cases}$, f ist stetig in 1

$$f'(x) = \begin{cases} -2x+1 & \text{für } x < 1 \\ 2x-1 & \text{für } x > 1 \end{cases} \qquad \lim_{x \overset{<}{\to} 1} f'(x) = -1 \neq \lim_{x \overset{>}{\to} 1} f'(x) = 1$$

also ist f nicht 1mal differenzierbar in 1.

f) $f(x) = |x-1|(x-1) = \begin{cases} -x^2+2x-1 & \text{für } x \leqq 1 \\ x^2-2x+1 & \text{für } x > 1 \end{cases}$, f ist stetig in 1



$$f'(x) = \begin{cases} -2x+2 & \text{für } x < 1 \\ 2x-2 & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

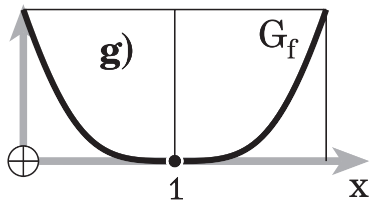
$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} f'(x) = 0 = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} f'(x)$,

also ist f 1mal differenzierbar in 1

$$f''(x) = \begin{cases} -2 & \text{für } x < 1 \\ 2 & \text{für } x > 1 \end{cases}, \quad \lim_{x \overset{<}{\to} 1} f''(x) = -2 \neq \lim_{x \overset{>}{\to} 1} f''(x) = 2$$

also ist f nicht 2mal differenzierbar in 1.

g) $f(x) = |x-1|(x-1)^2 = \begin{cases} -x^3+3x^2-3x+1 & \text{für } x \leqq 1 \\ x^3-3x^2+3x-1 & \text{für } x > 1 \end{cases}$, f ist stetig in 1



$$f'(x) = \begin{cases} -3x^2+6x-3 & \text{für } x < 1 \\ 3x^2-6x+3 & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} f'(x) = 0 = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} f'(x)$

also ist f 1mal differenzierbar in 0

$$f''(x) = \begin{cases} -6x & \text{für } x < 1 \\ 6x & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} f''(x) = 0 = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} f''(x)$, also ist f 2mal differenzierbar in 0.

f ist nicht 3-mal differenzierbar in 1, weil $f'''(x<1) = -6$ und $f'''(x>1) = 6$

h) $f(x) = |x-1|^2(x-1) = (x-1)^2(x-1) = (x-1)^3$

f ist eine Polynomfunktion und deswegen stetig und beliebig oft differenzierbar.

◊6 Auf Unstetigkeit verdächtig sind nur Funktionen mit sgn-Termen.

a) $f_a(x) = |x+1|(x-a) = \begin{cases} -x^2-(1-a)x+a & \text{für } x \leqq -1 \\ x^2+(1-a)x-a & \text{für } x > -1 \end{cases}$, f_a ist stetig in -1

$$f_a'(x) = \begin{cases} -2x-(1-a) & \text{für } x < -1 \\ 2x+(1-a) & \text{für } x > -1 \end{cases}$$

$\lim_{x \overset{<}{\to} -1} f_a'(x) = 2-1+a = a+1$, $\lim_{x \overset{>}{\to} -1} f_a'(x) = -2+1-a = -a-1$

wenn beide Grenzwerte gleich sind,

dann ist f_a 1mal differenzierbar in –1: $a + 1 = -a - 1 \Rightarrow a = -1$
f_{-1} ist 1mal differenzierbar in –1: $f_{-1}'(-1) = 0$

$$f''_{-1}(x) = \begin{cases} -2 & \text{für } x < -1 \\ 2 & \text{für } x > -1 \end{cases}, \quad \lim_{x \nearrow -1} f''_{-1}(x) = -2 \neq \lim_{x \searrow -1} f''_{-1}(x) = 2$$

also ist f_{-1} nicht 2mal differenzierbar in –1.

b) $f_a(x) = (x+1)|x-a| = \begin{cases} -x^2-(1-a)x+a & \text{für } x \leqq a \\ x^2+(1-a)x-a & \text{für } x > a \end{cases}$, f_a ist stetig in a

$$f'_a(x) = \begin{cases} -2x-(1-a) & \text{für } x < a \\ 2x+(1-a) & \text{für } x > a \end{cases}$$

$$\lim_{x \nearrow a} f'_a(x) = -2a-1+a = -a-1, \quad \lim_{x \searrow a} f'_a(x) = 2a+1-a = a+1$$

f_a ist 1mal differenzierbar in a, wenn: $-a - 1 = a + 1 \Rightarrow a = -1$
f_{-1} ist genau 1mal differenzierbar in –1: $f_{-1}'(-1) = 0$.

c) $f_a(x) = (x+1)\cdot\operatorname{sgn}(x-a) = \begin{cases} -x-1 & \text{für } x < a \\ 0 & \text{für } x = a \\ x+1 & \text{für } x > a \end{cases}$

$$\lim_{x \nearrow a} f(x) = -a-1, \quad \lim_{x \searrow a} f(x) = a+1$$

$-a - 1 = a + 1 \Rightarrow a = -1$, die beiden einseitigen Grenzwerte existieren, haben den Wert 0, sind also gleich dem Funktionswert $f_{-1}(-1) = 0$,
f_{-1} ist stetig in –1

$$f_{-1}'(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x < -1 \\ 1 & \text{für } x > -1 \end{cases}, \quad \lim_{x \nearrow -1} f'_{-1}(x) = -1 \neq \lim_{x \searrow -1} f'_{-1}(x) = 1$$

also ist f_{-1} nicht 1mal differenzierbar in –1.

d) $f_a(x) = (x-a)\cdot\operatorname{sgn}(x+1) = \begin{cases} -x+a & \text{für } x < -1 \\ 0 & \text{für } x = -1 \\ x-a & \text{für } x > -1 \end{cases}$

$$\lim_{x \nearrow -1} f(x) = 1+a, \qquad \lim_{x \searrow -1} f(x) = -1-a$$

$1+a = -1-a \Rightarrow a = -1$, die beiden einseitigen Grenzwerte existieren, haben den Wert 0, sind also gleich dem Funktionswert $f_{-1}(-1) = 0$,
f_{-1} ist stetig in –1

$$f_{-1}'(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x < -1 \\ 1 & \text{für } x > -1 \end{cases}, \quad \lim_{x \nearrow -1} f'_{-1}(x) = -1 \neq \lim_{x \searrow -1} f'_{-1}(x) = 1$$

also ist f_{-1} nicht 1mal differenzierbar in –1.

7 a) $f_a(x) = \begin{cases} 4-x^2 & \text{für } x \leqq 1 \\ x^2+ax-1 & \text{für } x > 1 \end{cases}$, $f_a(1) = 4 - 1 = 3$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f_a(x) = a$, Bedingung für Stetigkeit: $a = 3$

f_3 ist stetig in 1: $f_3(1) = 3$, $f_3(x) = \begin{cases} 4-x^2 & \text{für } x \leqq 1 \\ x^2+3x-1 & \text{für } x > 1 \end{cases}$

$f_3'(x) = \begin{cases} -2x & \text{für } x < 1 \\ 2x+3 & \text{für } x > 1 \end{cases}$, $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f_3'(x) = -2 \neq \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f_3'(x) = 5$

also ist f_3 nicht 1mal differenzierbar in 1.

b) $f_a(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \leqq 1 \\ 2x^2+ax+1 & \text{für } x > 1 \end{cases}$, $f_a(1) = 1$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f_a(x) = a+3$, Bedingung für Stetigkeit: $a + 3 = 1 \Rightarrow a = -2$

f_{-2} ist stetig in 1: $f_{-2}(1) = 1$, $f_{-2}(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \leqq 1 \\ 2x^2-2x+1 & \text{für } x > 1 \end{cases}$

$f_{-2}'(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } x < 1 \\ 4x-2 & \text{für } x > 1 \end{cases}$, $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f'_{-2}(x) = 2 = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f'_{-2}(x) = 2$

also ist f_{-2} 1-mal differenzierbar in 1.

c) $f_a(x) = \begin{cases} ax-x^2 & \text{für } x \leqq 2 \\ a(2-x) & \text{für } x > 2 \end{cases}$, $f_a(2) = 2a - 4$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2} f_a(x) = 0$, Bedingung für Stetigkeit: $0 = 2a - 4 \Rightarrow a = 2$

f_2 ist stetig in 2: $f_2(2) = 0$, $f_2(x) = \begin{cases} 2x-x^2 & \text{für } x \leqq 2 \\ 4-2x & \text{für } x > 2 \end{cases}$

$f_2'(x) = \begin{cases} 2-2x & \text{für } x < 2 \\ -2 & \text{für } x > 2 \end{cases}$, $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 2} f_2'(x) = -2 = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2} f_2'(x) = -2$

also ist f_2 1-mal differenzierbar in 2.

d) $f_a(x) = \begin{cases} a-x^2 & \text{für } x \leqq a \\ x^2-4x+3a & \text{für } x > a \end{cases}$, $f_a(a) = a - a^2$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} a} f_a(x) = a^2-4a+3a = a^2-a$, Bedingung für Stetigkeit:

$a^2 - a = a - a^2 \Rightarrow 2a(a - 1) = 0 \Rightarrow a = 0$ oder $a = 1$

f_0 ist stetig in 0: $f_0(0) = 0$, $f_0(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{für } x \leqq 0 \\ x^2-4x & \text{für } x > 0 \end{cases}$

f_1 ist stetig in 1: $f_1(1) = 0$, $f_1(x) = \begin{cases} 1-x^2 & \text{für } x \leqq 1 \\ x^2-4x+3 & \text{für } x > 1 \end{cases}$

$f_0'(x) = \begin{cases} -2x & \text{für } x < 0 \\ 2x-4 & \text{für } x > 0 \end{cases}$, $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f_0'(x) = 0 \neq \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f_0'(x) = -4$

also ist f_0 nicht 1mal differenzierbar in 0

$f_1'(x) = \begin{cases} -2x & \text{für } x < 1 \\ 2x-4 & \text{für } x > 1 \end{cases}$, $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f_1'(x) = -2 = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f_1'(x)$

also ist f_1 1mal differenzierbar in 1

$f_1''(x) = \begin{cases} -2 & \text{für } x < 1 \\ 2 & \text{für } x > 1 \end{cases}$, $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f''_1(x) = -2 \neq \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f''_1(x) = 2$

also ist f_1 nicht 2mal differenzierbar in 1.

•8 Bestimme den Parameter a so, dass f stetig ist, und untersuche, wie oft f an der Nahtstelle differenzierbar ist.

a) $f_a(x) = \begin{cases} ax^2-ax+4-2a & \text{für } x \leqq 1 \\ -2x^2+(5-2a^2)x+a & \text{für } x > 1 \end{cases}$, $f_a(1) = a - a + 4 - 2a = 4 - 2a$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f_a(x) = -2+5-2a^2+a = 3+a-2a^2$, Bedingung für Stetigkeit:

$3 + a - 2a^2 = 4 - 2a \Rightarrow 2a^2 - 3a + 1 = 0 \Rightarrow a = 0{,}5$ oder $a = 1$

$f_{0,5}$ ist stetig in 1: $f_{0,5}(1) = 3$, $f_{0,5}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+3 & \text{für } x \leqq 1 \\ -2x^2+\frac{9}{2}x+\frac{1}{2} & \text{für } x > 1 \end{cases}$

f_1 ist stetig in 1: $f_1(1) = 2$, $f_1(x) = \begin{cases} x^2-x+2 & \text{für } x \leqq 1 \\ -2x^2+3x+1 & \text{für } x > 1 \end{cases}$

$f_{0,5}'(x) = \begin{cases} x-\frac{1}{2} & \text{für } x < 1 \\ -4x+\frac{9}{2} & \text{für } x > 1 \end{cases}$, $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f'_{0,5}(x) = \frac{1}{2} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f'_{0,5}(x)$

also ist $f_{0,5}$ 1mal differenzierbar in 1

$f_1'(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{für } x < 1 \\ 3-4x & \text{für } x > 1 \end{cases}$, $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f'_1(x) = 1 \neq \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f'_1(x) = -1$

also ist f_1 nicht 1mal differenzierbar in 1

$f_{0,5}''(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < 1 \\ -4 & \text{für } x > 1 \end{cases}$, $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f_{0,5}''(x) = 1 \neq \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f_{0,5}''(x) = -4$

also ist $f_{0,5}$ nicht 2mal differenzierbar in 1.

b) $f_a(x) = \begin{cases} ax^2-2ax-20 & \text{für } x \leqq a \\ x^2+16x+a^3 & \text{für } x > a \end{cases}$, $f_a(a) = a^3 - 2a^2 - 20$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} a} f_a(x) = a^2+16a+a^3$, Bedingung für Stetigkeit:

$a^2+16a+a^3 = a^3-2a^2-20 \Rightarrow 3a^2+16a+20 = 0 \Rightarrow a=-2$ oder $a=-\frac{10}{3}$

f_{-2} ist stetig in -2: $f_{-2}(-2) = -36$, $f_{-2}(x) = \begin{cases} -2x^2+4x-20 & \text{für } x \le -2 \\ x^2+16x-8 & \text{für } x > -2 \end{cases}$

$f_{-10/3}$ ist stetig in $-\frac{10}{3}$: $f_{-10/3}(-\frac{10}{3}) = -\frac{2140}{27}$

$$f_{-10/3}(x) = \begin{cases} -\frac{10}{3}x^2+\frac{20}{3}x-20 & \text{für } x \leqq -\frac{10}{3} \\ x^2+16x-\frac{1000}{27} & \text{für } x > -\frac{10}{3} \end{cases}$$

$f_{-2}'(x) = \begin{cases} -4x+4 & \text{für } x<-2 \\ 2x+16 & \text{für } x>-2 \end{cases}$, $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -2} f_{-2}'(x) = 12 = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} -2} f_{-2}'(x)$

also ist f_{-2} 1mal differenzierbar in -2

$$f'_{-10/3}(x) = \begin{cases} -\frac{20}{3}x+\frac{20}{3} & \text{für } x < -\frac{10}{3} \\ 2x+16 & \text{für } x > -\frac{10}{3} \end{cases}$$

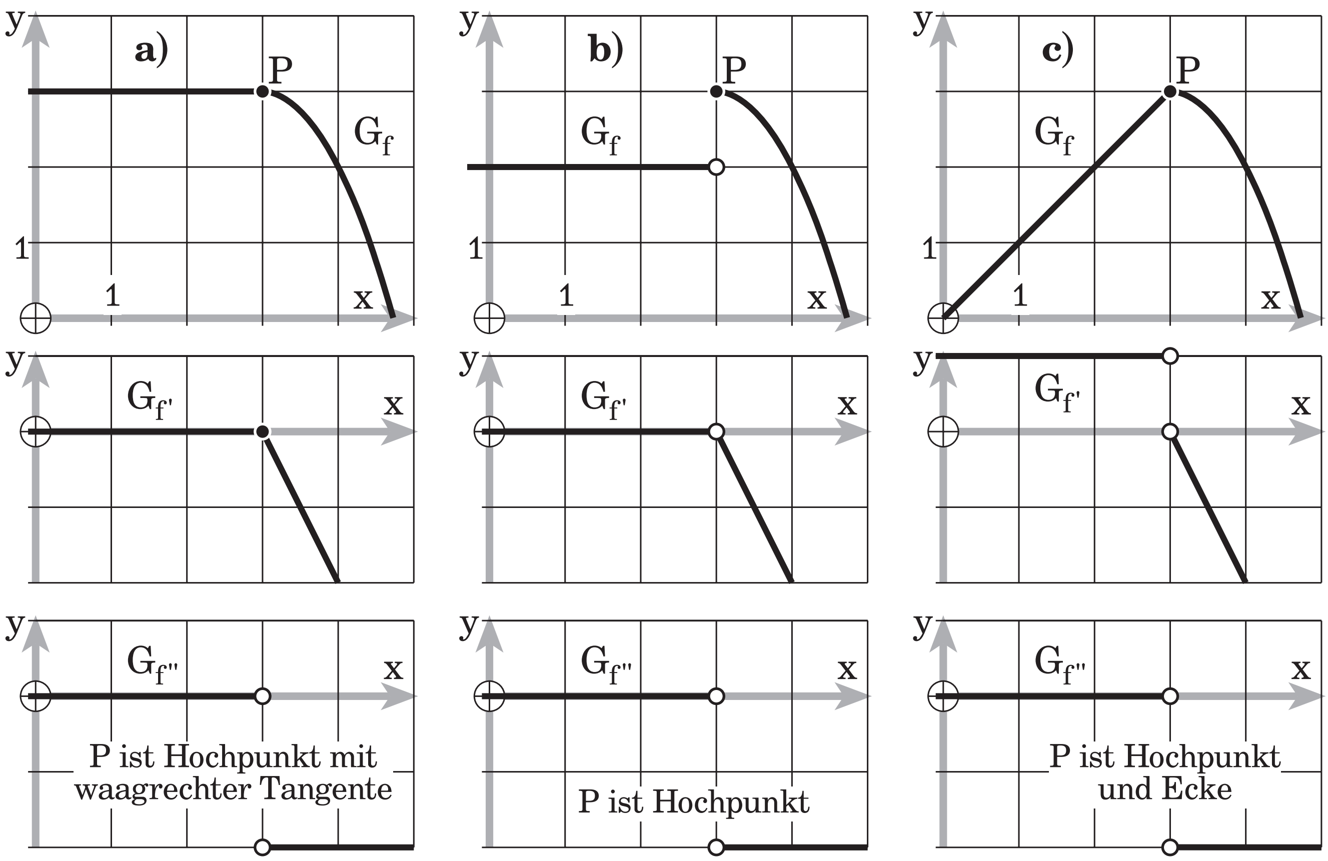
$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -10/3} f_{-10/3}'(x) = \frac{220}{3} \neq \lim\limits_{x \overset{>}{\to} -10/3} f_{-10/3}'(x) = \frac{28}{3}$

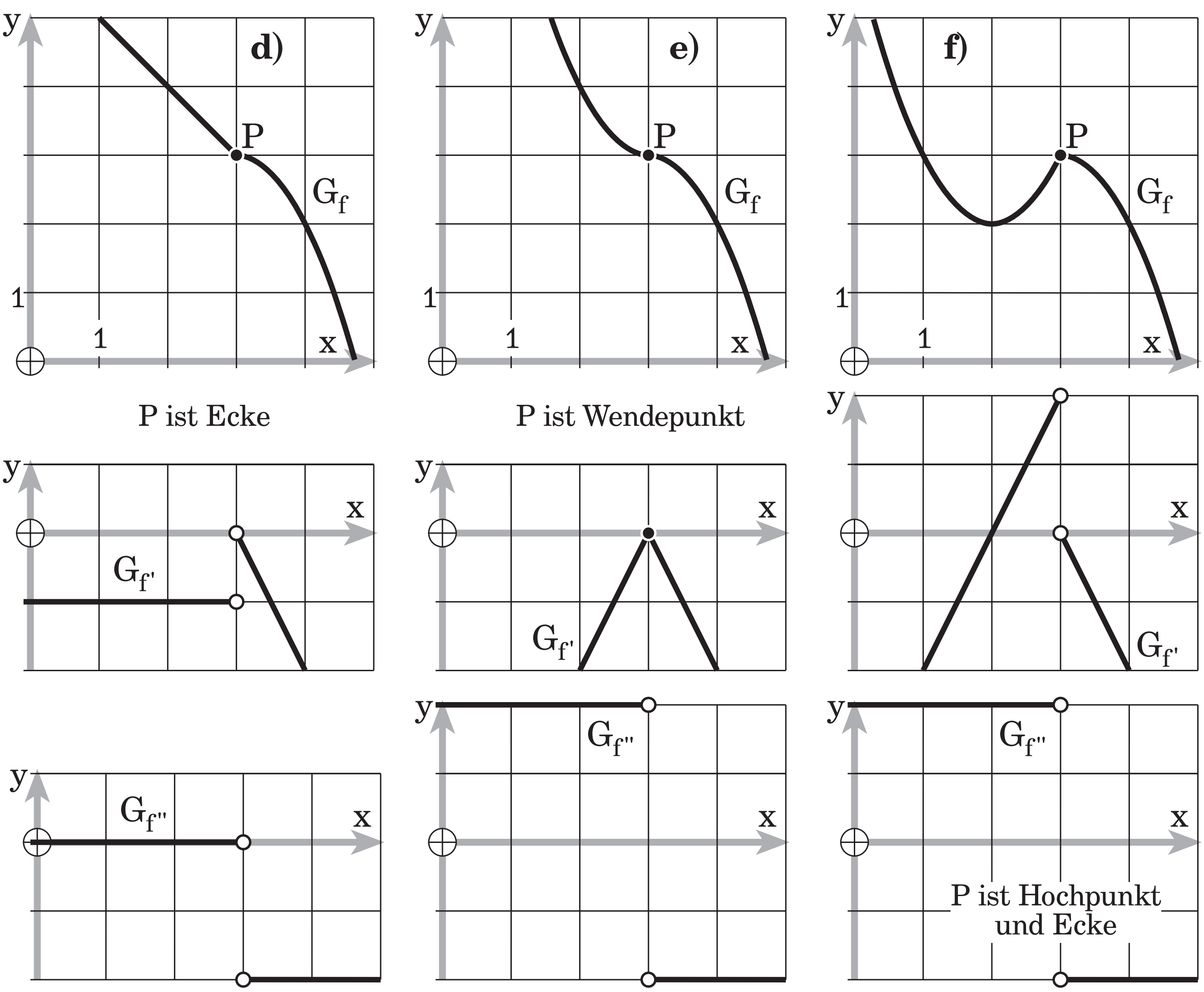
also ist $f_{-10/3}$ nicht 1mal differenzierbar in $-10/3$

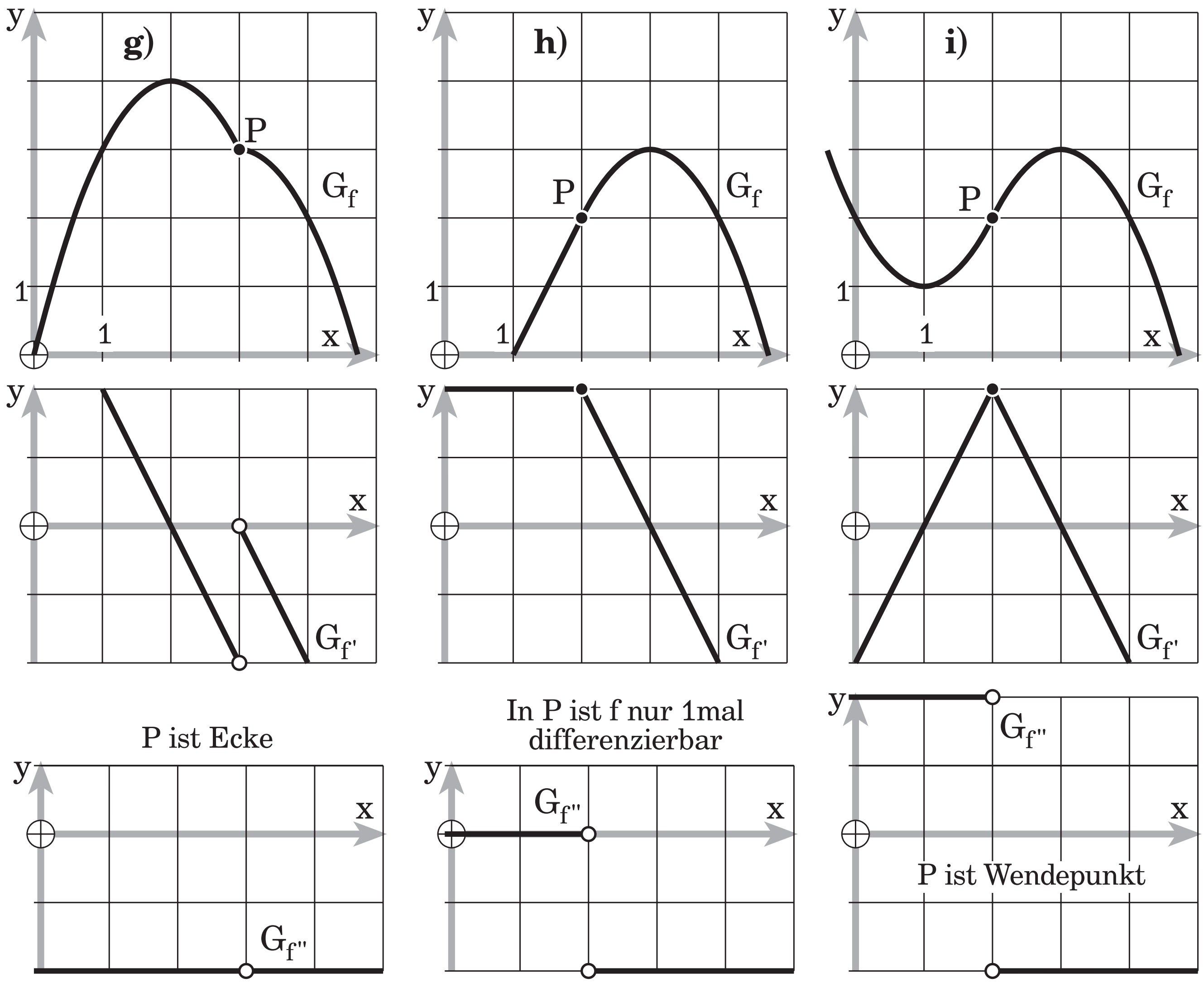
$f_{-2}''(x) = \begin{cases} -4 & \text{für } x<-2 \\ 2 & \text{für } x>-2 \end{cases}$, $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -2} f_{-2}''(x) = -4 \neq \lim\limits_{x \overset{>}{\to} -2} f_{-2}''(x) = 2$

also ist f_{-2} nicht 2mal differenzierbar in -2.

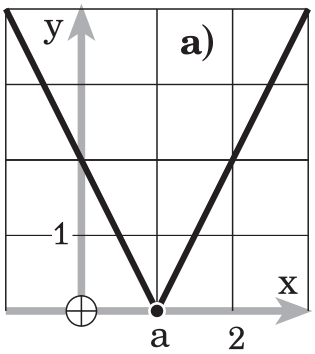
9

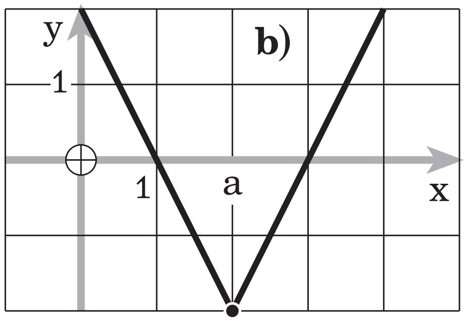


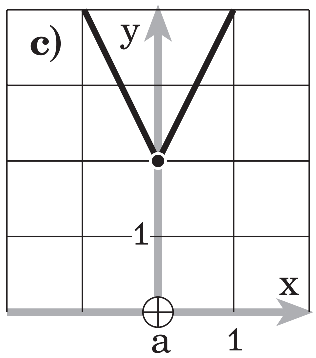

d)
P
G_f
e)
P
G_f
f)
P
G_f
P ist Ecke
P ist Wendepunkt
$G_{f'}$
$G_{f'}$
$G_{f'}$
$G_{f''}$
$G_{f''}$
$G_{f''}$
P ist Hochpunkt und Ecke

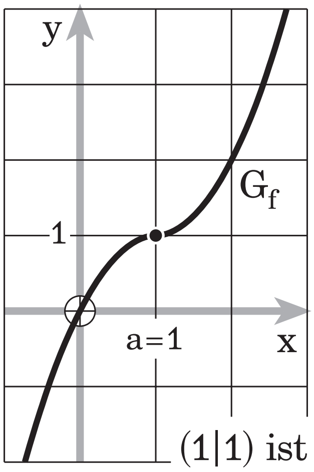

g)
h)
i)
P
G_f
1
x
y
$G_{f'}$
$G_{f''}$
P ist Ecke
In P ist f nur 1mal differenzierbar
P ist Wendepunkt

10

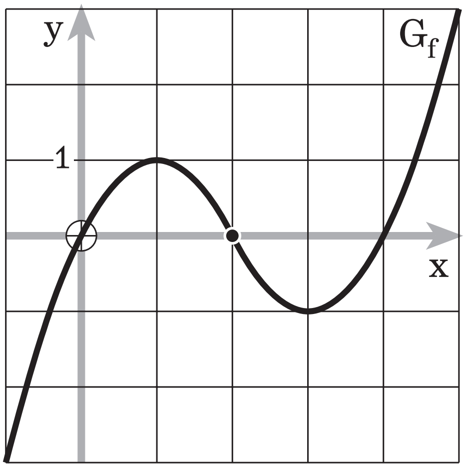




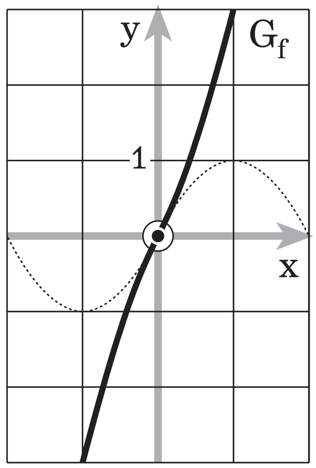




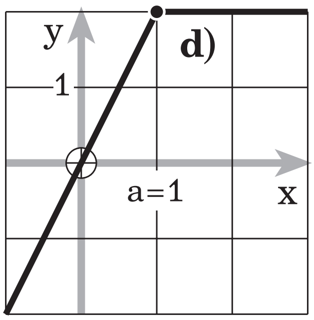
(1|1) ist Terrassenpunkt

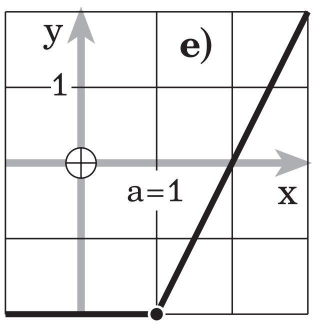


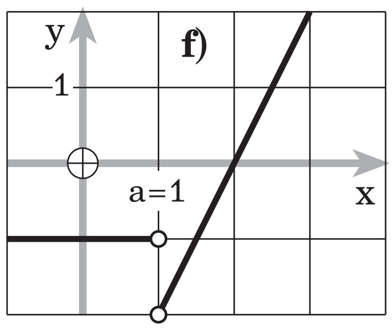
(2|0) ist Wendepunkt

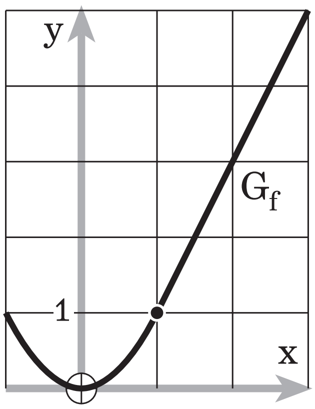


(0|0) ist Wendepunkt

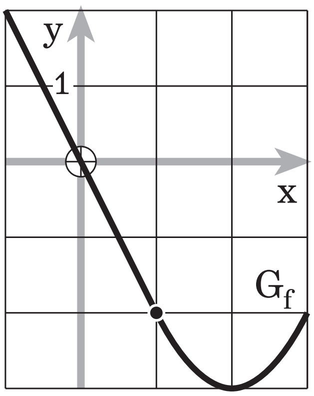




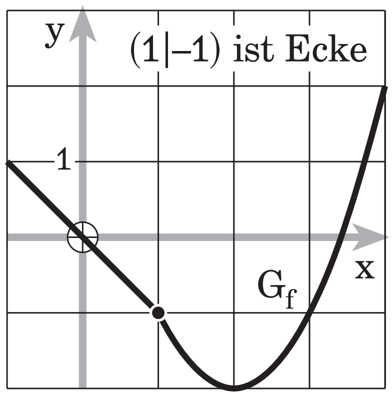




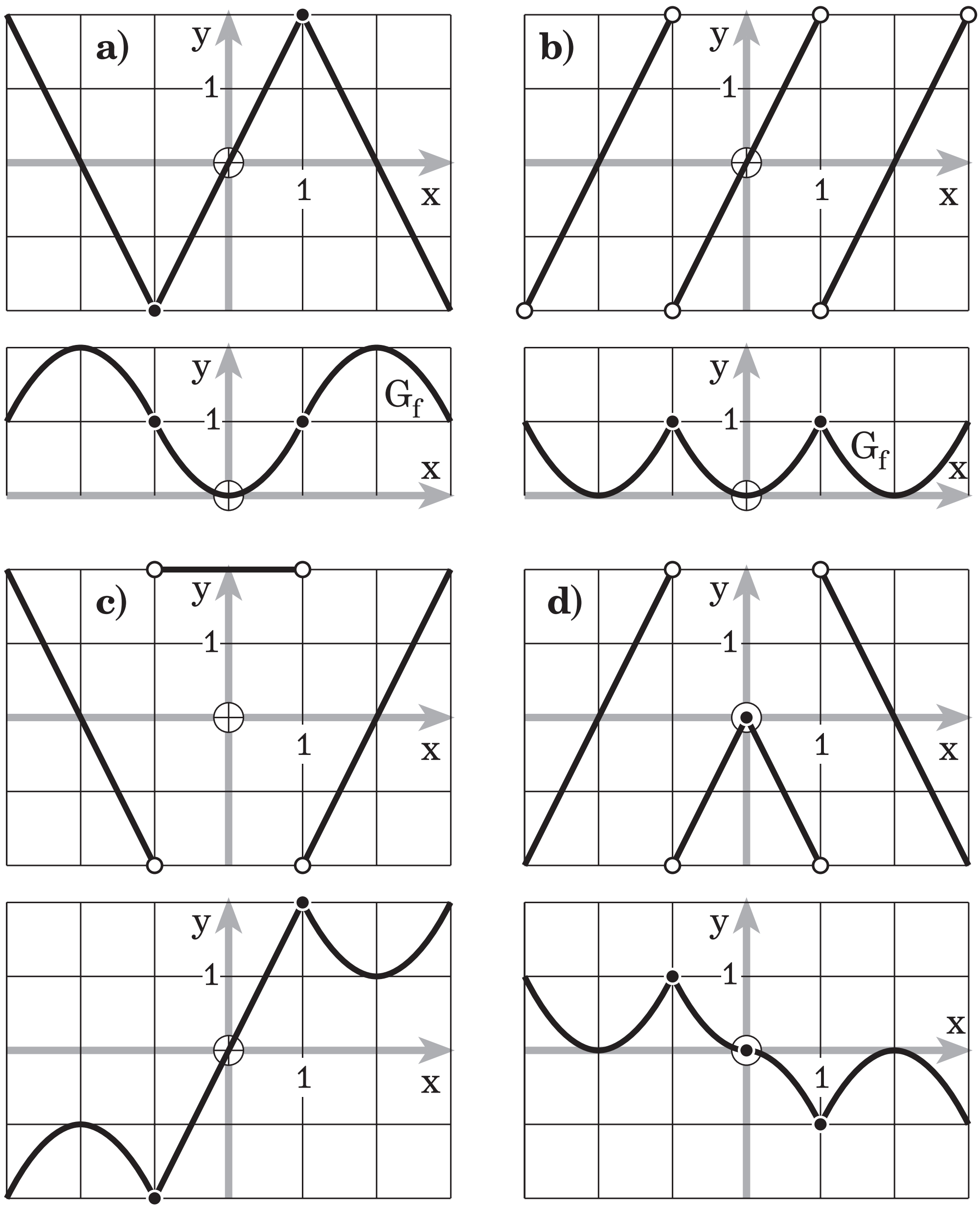
In P ist f nur 1-mal differenzierbar.



In P ist f nur 1-mal differenzierbar.



11



Ist $G_{f'}$ symmetrisch zum Ursprung, dann ist G_f symmetrisch zur y-Achse, ist $G_{f'}$ symmetrisch zur y-Achse, dann ist G_f symmetrisch zum Ursprung.

:12 Kurve-AbleitungsKurve:

K-B	B-G	N-F	F-G	V-H	H-G
U-D	D-L	L-M			
R-A	A-I	I-P	E-C		

2. Differenzierbarkeit

1 Berechne die Ableitung f'(a) mit der Definition $f'(a) = \lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

a) $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $a = 2$

Sek.steigung: $m_s = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{\frac{x}{x+1}-\frac{a}{a+1}}{x-a} = \frac{1}{ax+x+a+1} = \frac{1}{(x+1)(a+1)}$

Tang.steigung: $f'(a) = \lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{1}{(a+1)(a+1)} = \frac{1}{(a+1)^2}$

Tang.steigung in a=2: $f'(2) = \frac{1}{9}$

b) $f(x) = \sqrt{x+1}$, $a = 3$

$m_s = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{a+1}}{x-a} = \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{a+1}}{x-a}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{a+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{a+1}}$

$= \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{a+1}}$

$f'(a) = \lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a+1}} = \frac{1}{2\sqrt{a+1}}$

Tang.steigung in a=3: $f'(3) = \frac{1}{4}$

2 Berechne die Ableitung f'(x) mit der Definition $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

a) $f(x) = \frac{x}{x+1}$

$m_s = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\frac{x+h}{x+h+1}-\frac{x}{x+1}}{h} = \frac{1}{x^2+hx+2x+h+1} = \frac{1}{(x+1)(x+h+1)}$

$f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{1}{(x+1)^2}$

b) $f(x) = \sqrt{x+1}$

$m_s = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sqrt{x+h+1}-\sqrt{x+1}}{h}$

$= \frac{\sqrt{x+h+1}-\sqrt{x+1}}{h}\cdot\frac{\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1}}$

$f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$

•c) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x+1}}$

$m_s = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sqrt{\frac{x+h}{x+h+1}}-\sqrt{\frac{x}{x+1}}}{h}$

$$m_s = \frac{\sqrt{\frac{x+h}{x+h+1}} - \sqrt{\frac{x}{x+1}}}{h} \cdot \frac{\sqrt{\frac{x+h}{x+h+1}} + \sqrt{\frac{x}{x+1}}}{\sqrt{\frac{x+h}{x+h+1}} + \sqrt{\frac{x}{x+1}}} = \frac{\frac{x+h}{x+h+1} - \frac{x}{x+1}}{h\left(\sqrt{\frac{x+h}{x+h+1}} + \sqrt{\frac{x}{x+1}}\right)}$$

$$= \frac{\frac{h}{x^2+hx+2x+h+1}}{h\left(\sqrt{\frac{x+h}{x+h+1}} + \sqrt{\frac{x}{x+1}}\right)} = \frac{1}{(x+1)(x+h+1)\left(\sqrt{\frac{x+h}{x+h+1}} + \sqrt{\frac{x}{x+1}}\right)}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{1}{2(x+1)^2\sqrt{\frac{x}{x+1}}} = \frac{1}{2(x+1)\sqrt{x(x+1)}}$$

3 Zeige: Aus $|f(x)| \leqq x^2$ folgt $f'(0)=0$.

$|f(x)| \leqq x^2 \iff -x^2 \leqq f(x) \leqq x^2 \Rightarrow f(0)=0$

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$$

aus $-x^2 \leqq f(x) \leqq x^2$ folgt $-x \leqq \frac{f(x)}{x} \leqq x \quad \| \quad \lim_{x\to 0} \ldots$

$$\lim_{x\to 0}(-x) \leqq \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} \leqq \lim_{x\to 0} x \quad \Rightarrow \quad 0 \leqq \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} \leqq 0$$

4

a) Zeige: Ist f differenzierbar in x, dann gilt $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)+f(x)-f(x-h)}{2h}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f(x)-f(x-h)}{h}$$

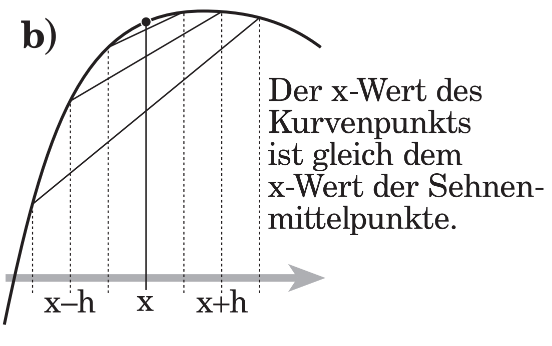
1\. Summand: $\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{1}{2}f'(x)$

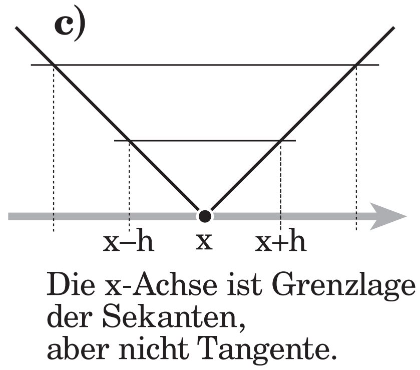
2\. Summand: Substitution $h=-k$

$$\frac{1}{2}\lim_{-k\to 0}\frac{f(x)-f(x+k)}{-k} = \frac{1}{2}\lim_{-k\to 0}\frac{f(x+k)-f(x)}{k} = \frac{1}{2}f'(x)$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} = 1.\,\text{Summand} + 2.\,\text{Summand} = f'(x)$$

b) Deute den Term $\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$





c) Zeige an der Funktion f mit $f(x)=|x|$, dass die Umkehrung dieses Satzes falsch ist.

Umkehrung: wenn $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$, das heißt $f'(x)$ existiert, dann ist f differenzierbar.

$f(x)=|x|$ ist nicht differenzierbar in 0, aber der Grenzwert existiert:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0-h)}{2h} = \lim_{h\to 0}\frac{|h|-|h|}{2h} = 0$$

d) In der Computer-Numerik zieht man $n = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$ dem Term

$m = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ vor, weil n bessere Näherungswerte für $f'(x)$ liefert.

Berechne für $f(x)=x^3$ den genauen Wert $f'(1)$ und die Näherungswerte für h=0,1 mit beiden Termen der Sekantensteigung.

$f'(x) = 3x^2,\ f'(1)=3$

$$m = \frac{f(1+0,1)-f(1)}{0,1} = \frac{1,1^3-1^3}{0,1} = 3,31$$

$$n = \frac{f(1+0,1)-f(1-(0,1))}{2\cdot 0,1} = \frac{1,1^3-(0,9)^3}{0,2} = 3,01$$

:5 a) Zeige: Ist G_f symmetrisch zur y-Achse, so ist $G_{f'}$ symmetrisch zu O.

Bedingung: Symmetrie zur y-Achse $f(x) = f(-x),\ f(x+h) = f(-x-h)$

Umformung $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{f(-x-h)-f(-x)}{-(-h)} = -\frac{f(-x-h)-f(-x)}{-h}\ ||\ \lim\limits_{h\to 0} \dots$

$$f'(x) = -f'(-x)$$

b) Zeige: Ist G_f symmetrisch zu O, so ist $G_{f'}$ symmetrisch zur y-Achse.

Bedingung: Symmetrie zu O $f(x) = -f(-x),\ f(x+h) = -f(-x-h)$

Umformung $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{-f(-x-h)+f(-x)}{h} = \frac{f(-x-h)-f(-x)}{-h}\ ||\ \lim\limits_{h\to 0} \dots$

$$f'(x) = f'(-x)$$