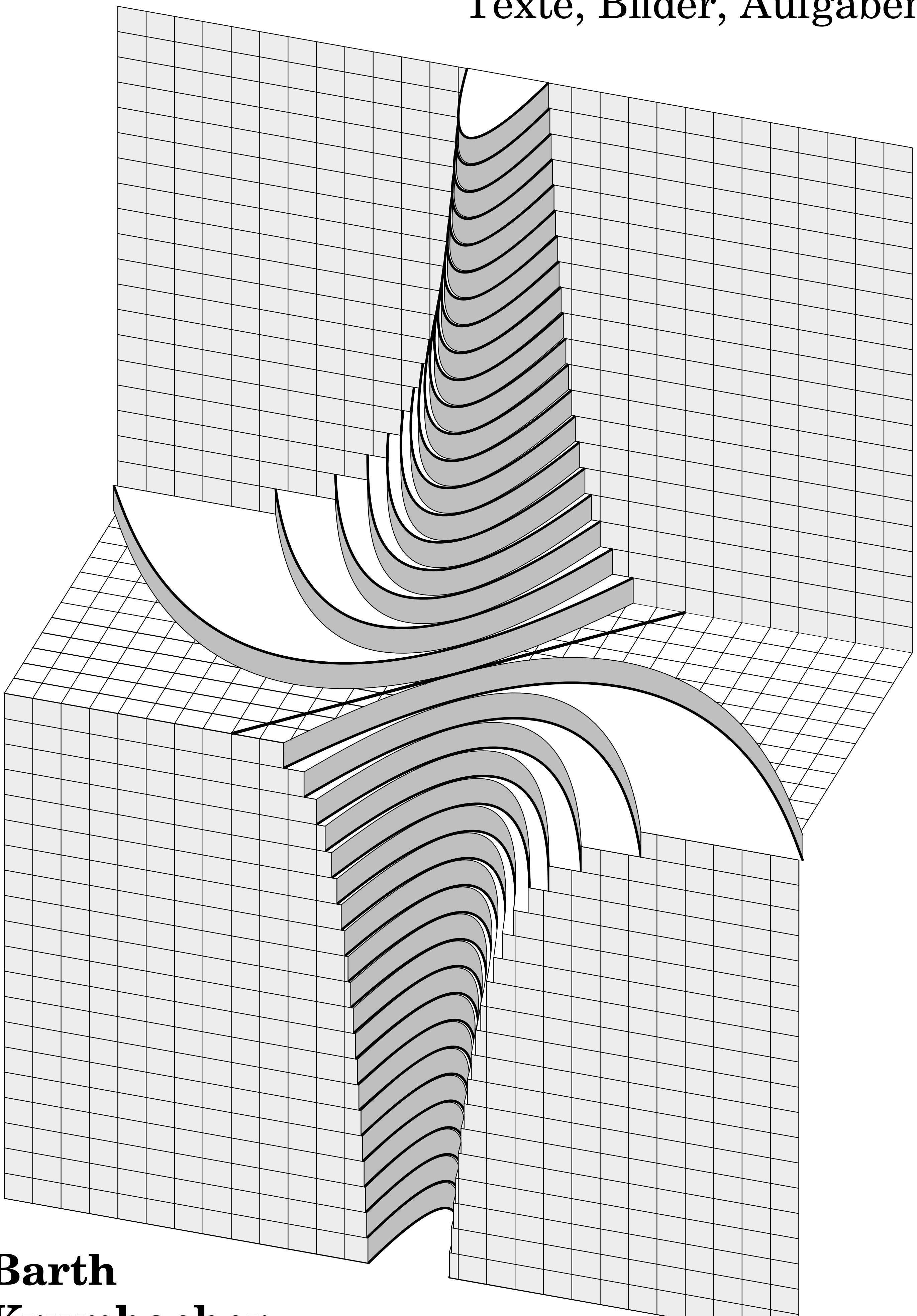
Analysis anschaulich 1

Texte, Bilder, Aufgaben



Barth
Krumbacher

Geneigter Leser,

Die vorliegenden gut 200 Seiten bilden den Inhalt von **Analysis Anschaulich 1**.
Dieses Lehrbuch ist in 1. Auflage 1999 im Oldenbourg–Verlag, München erschienen.
Es wendet sich an Schüler der 12. und 13. Klasse, Leistungskurs Mathematik;
es war vom Kultusministerium genehmigt zum Unterricht an bayerischen Gymnasien.

Nach dem unseligen Ende der Kollegstufe beim Übergang
vom 9jährigen Gymnasium G9 zum 8jährigen Gymnasium G8
war es entbehrlich im neuen Flickwerk–Lehrplan – die 3. Auflage 2003 war die letzte.

Nach wie vor gibt es Liebhaber unter Lehrern und Schülern,
die jener Zeit der soliden, klassischen Mathematik nachtrauern –
sind sie doch überdrüssig der modischen Firlefanz–Pädagogik,
die als einer von zahllosen kultusministeriellen Irrläufern streng verordnet wird.

Für solche Freunde haben wir die alten Dateien wieder aufleben lassen,
sie sind für jeden frei und zur Weitergabe verfügbar.

Noch ein Wort zu den Symbolen und Lösungen:
Es bedeuten ◊ Empfohlene Aufgabe
• Schwierige Aufgabe
•◊ Schwierige, empfohlene Aufgabe
: Anspruchsvolle Aufgabe

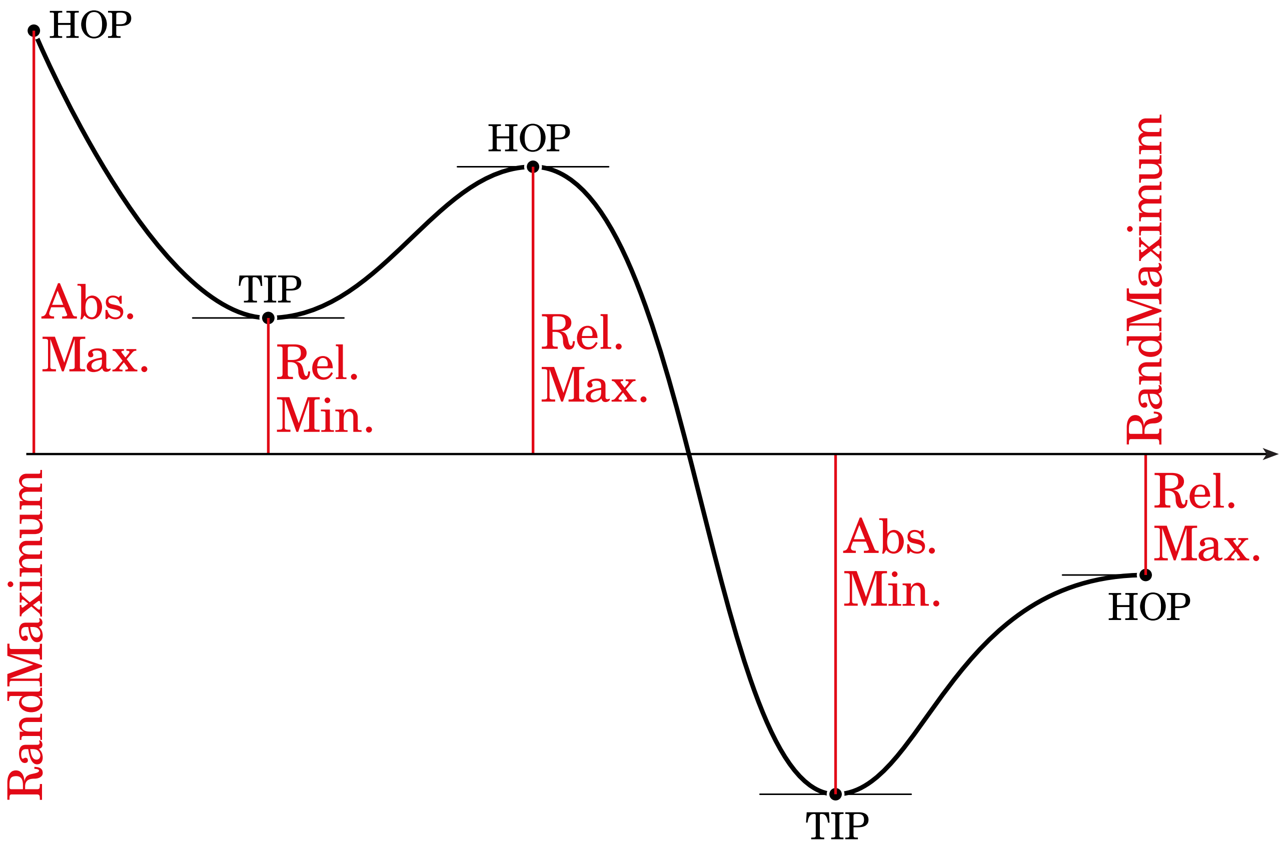
Die Lösungen sind gedacht als Entwurf, sie sind von keiner anderen Instanz durchgesehn oder korrigiert worden. Bitte schicken Sie uns keine gut gemeinten Berichtigungsvorschläge: Wir können sie nicht mehr einarbeiten, denn die guten FrameMaker–Dateien aus den 90er Jahren sind auf unsern heutigen Rechnern nicht mehr lesbar und auf wenigen alten unzuverlässigen Exemplaren nur noch mit größter Mühe zu öffnen und zu bearbeiten.

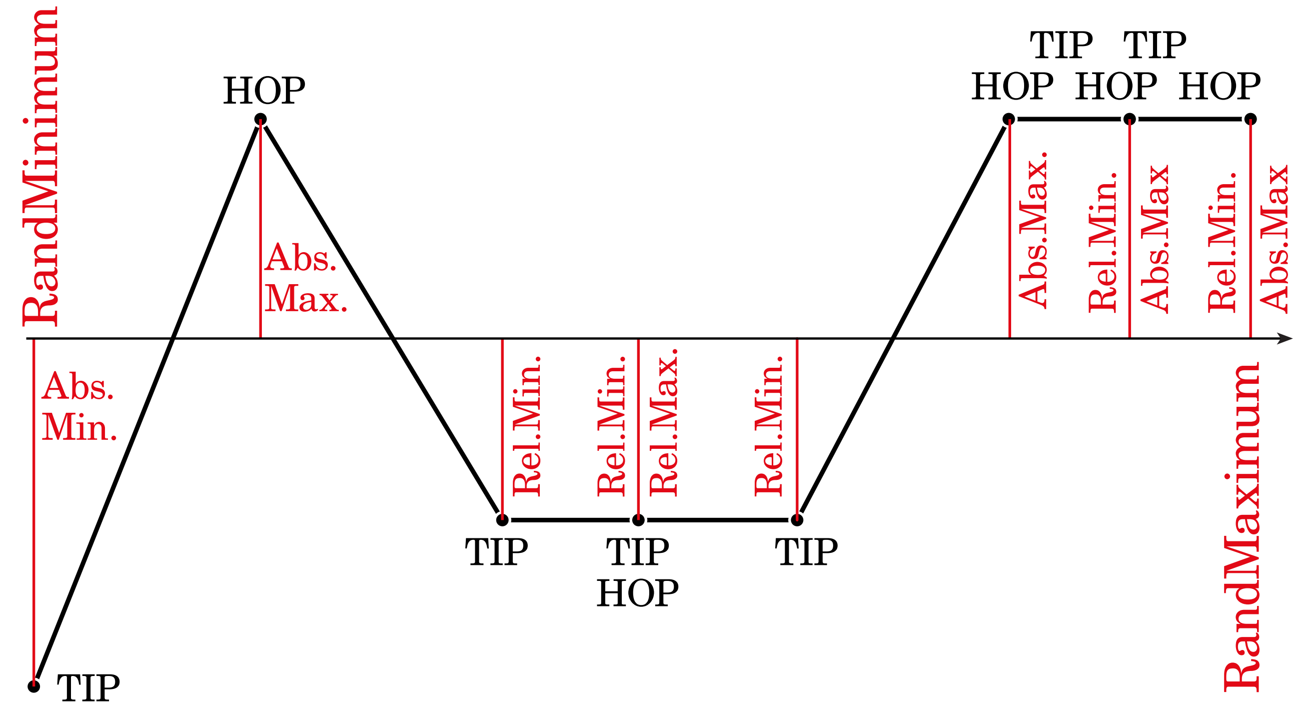
Und nun viel Erfolg !

Friedrich Barth, e.f.barth@t–online.de
Gert Krumbacher, grafioso@t–online–de

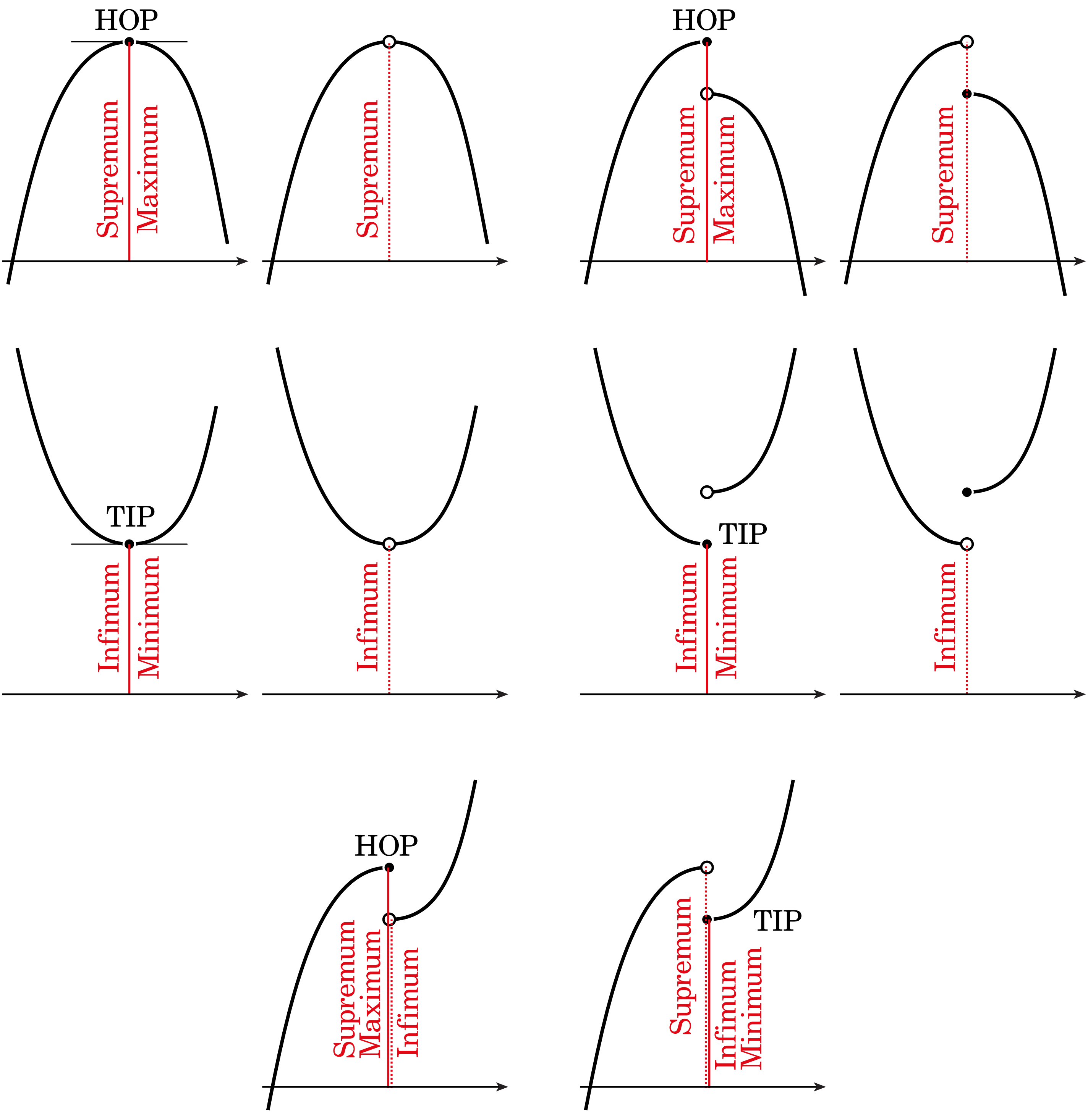
München, im Frühjahr 2017

Relative und absolute Extrema





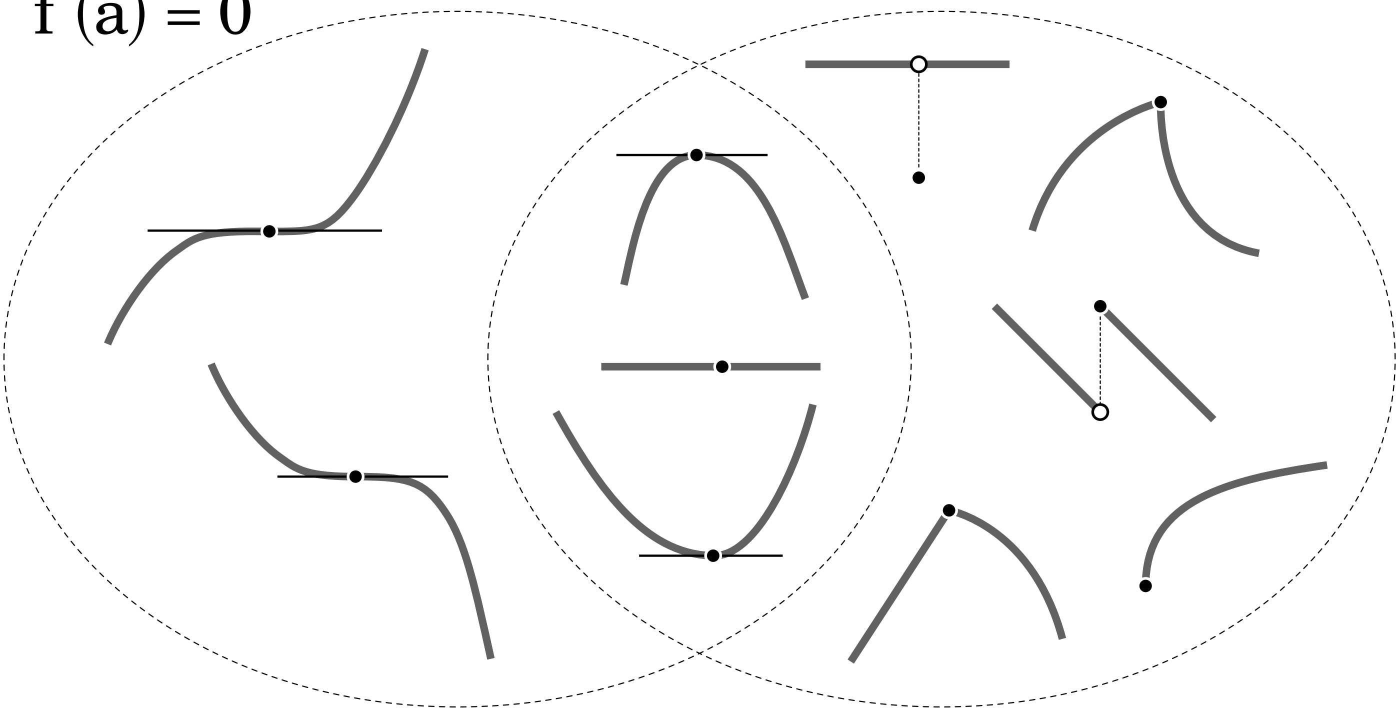
Supremum–Maximum
Infimum–Minimum



MARKANTE KURVENPUNKTE

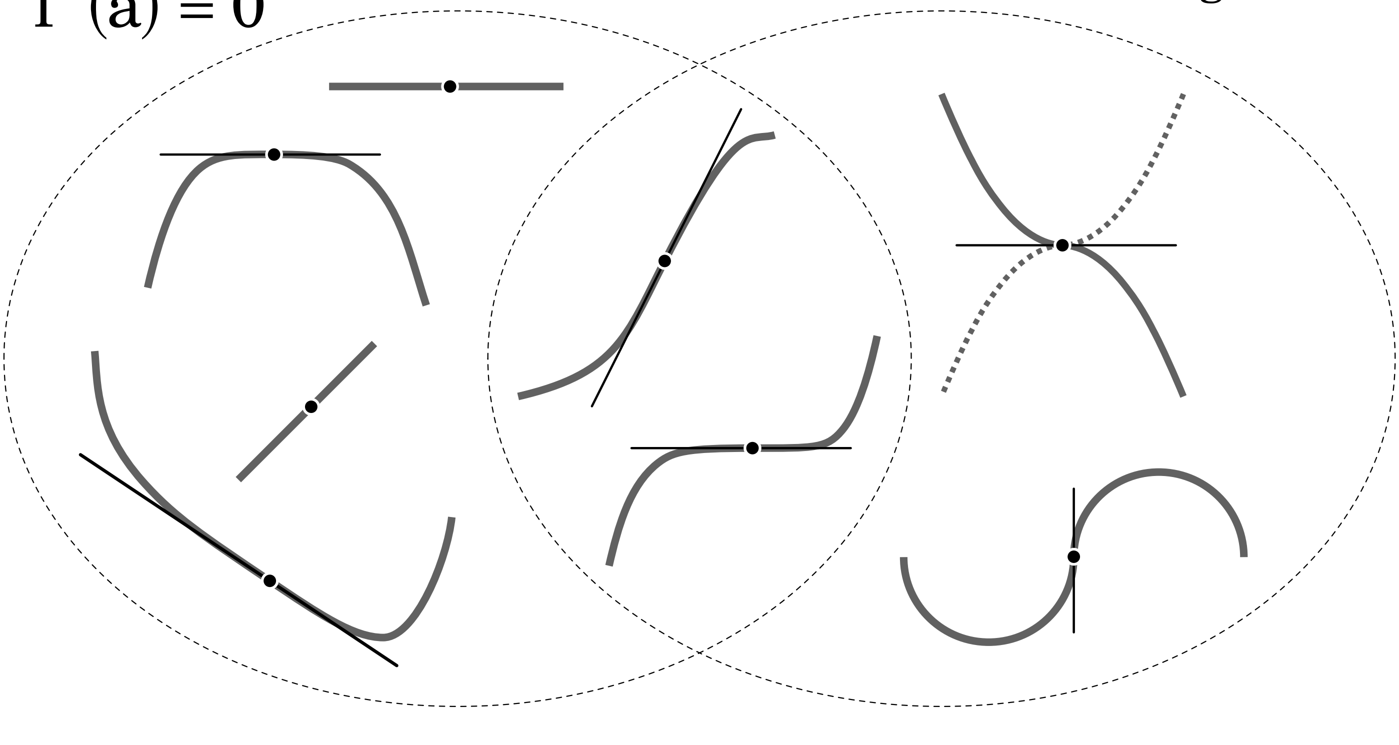
Waagrechtpunkte
$f'(a) = 0$

Extrempunkte

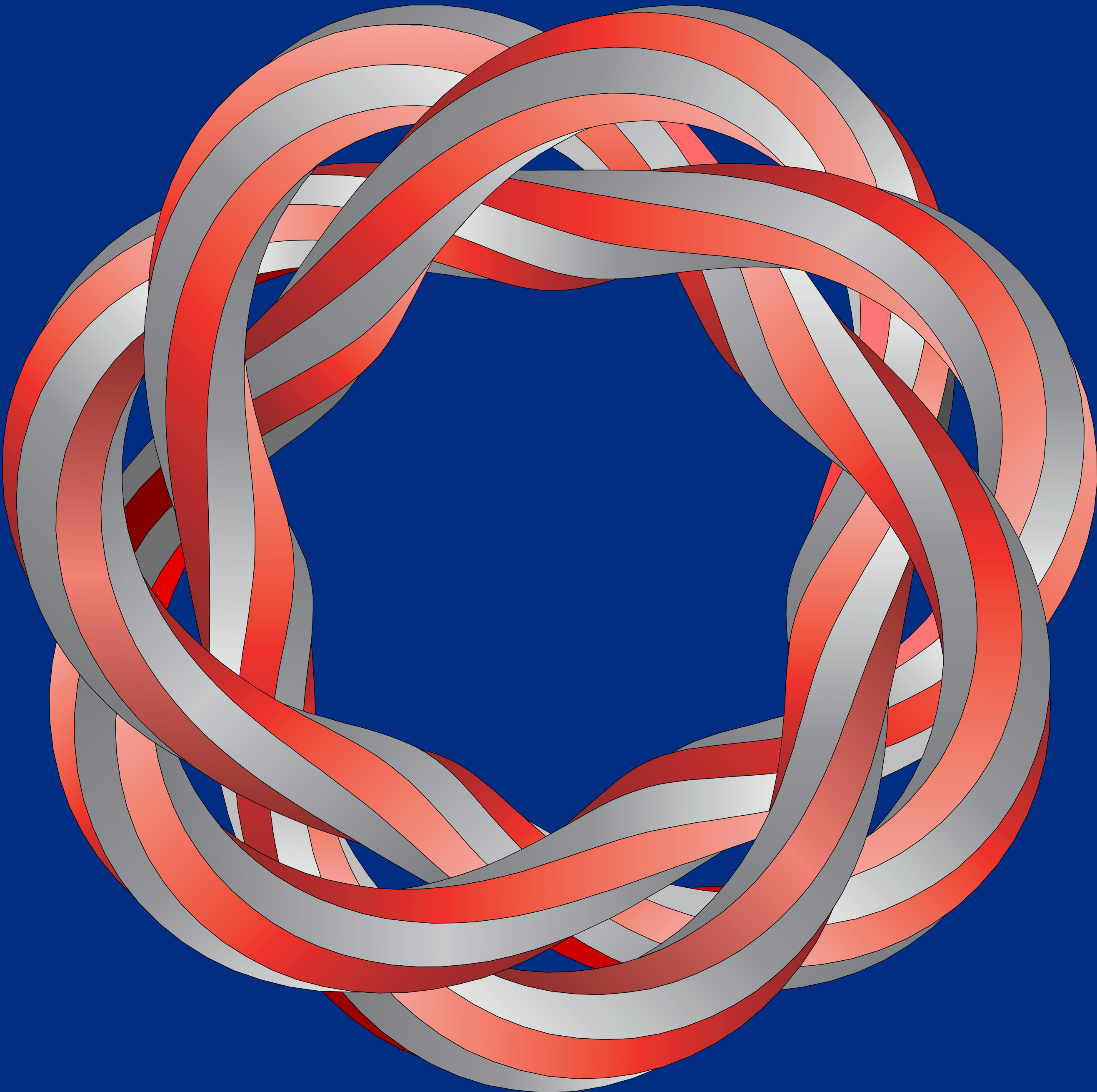


Wendepunkte
Durchdringung
Kurve-Tangente

Flachpunkte
$f''(a) = 0$



Analysis Anschaulich I



I. Funktion und Graph

1. Grundbegriffe

1.1 Zuordnung

Beispiel: Will man wissen, ob eine natürliche Zahl n zum Beispiel durch 5 oder 2 teilbar ist, so schaut man auf die letzte Ziffer z.
Man ordnet der Zahl n ihre letzte Ziffer z zu:

Zahl n	123	17	18	95	7	…
Endziffer z	3	7	8	5	7	…

Beispiel: Will man wissen, welchen Flächeninhalt F ein Kreis mit Radius r hat, so rechnet man mit der Formel $F = r^2\pi$. Man ordnet dem Radius r den Flächeninhalt F des zugehörigen Kreises zu:

Radius r	4	1	$\sqrt{2}$	π	$1/\pi$	…
Flächeninhalt F	16π	π	2π	π^3	$1/\pi$	…

Beispiel: Will man wissen, welche Strecke s ein Stein in der Zeit t fällt, so kann mans machen wie Galilei: Man misst mit einem Maßband die Strecke und mit einer Uhr die zugehörige Fallzeit.
Man ordnet der Strecke s die Fallzeit t zu:

Strecke s in m	1	5	10	0,5	0	100	…
Fallzeit t in s	0,45	1,01	1,43	0,32	0	1,52	…

In jedem der 3 Beispiele ist einer Zahl der ersten Zeile der Tabelle **eindeutig** eine Zahl der zweiten Zeile zugeordnet. Solche eindeutigen Zuordnungen heißen in der Mathematik auch Funktionen.
Die Tabelle heißt **Wertetabelle** der Funktion.
Es gibt auch mehrdeutige Zuordnungen; diese sind also keine Funktionen.

Beispiel: Man ordnet einer natürlichen Zahl n ihre Teiler zu:

Zahl n	1	2	3	4	…	12	…
Teiler	1	1, 2	1, 3	1, 2, 4	…	1, 2, 3, 4, 6	…

Beispiel: Man ordnet einer Zahl a die Lösungen der Gleichung $x^2 = a$ zu:

Zahl a	0	1	2	4/9	–16	…
Lösungen	0	–1, +1	$-\sqrt{2}, \sqrt{2}$	–2/3, 2/3	keine Lösung	…

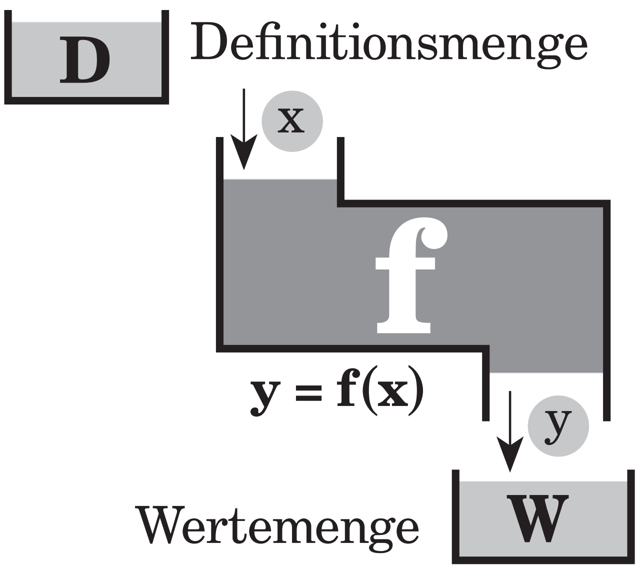
Bei Funktionen nimmt man für die Zahlen in der 1. und 2. Zeile **Variablen**.
In den Beispielen sind das n, r und s (1. Zeile) und z, F und t (2. Zeile).
Künftig verwenden wir meist x für die Variable der 1. Zeile und y für die Variable der 2. Zeile.
Weil sich y aus x ergibt, nennt man y die **abhängige** und x die **unabhängige** Variable. Die Funktionen selber bezeichnet man etwa mit f, g, h.

$y = f(x)$ bedeutet: Die Funktion f ordnet der Zahl x die Zahl y als **Funktionswert** zu. Statt y schreibt man auch f(x).
Manchmal fasst man das symbolisch zusammen zu
f: x € f(x).

Die Zahlen, die für die unabhängige Variable x infrage kommen, bilden die Definitionsmenge D (manchmal auch D_f) der Funktion f.
Die Zahlen, die sich für die abhängige Variable y ergeben, bilden die Wertemenge W (manchmal auch W_f) der Funktion f.
Im 1. Beispiel ist $D = \mathbb{N}$ und $W = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$,
im 2. Beispiel ist $D = \mathbb{R}^+$ und $W = \mathbb{R}^+$,
im 3. Beispiel ist $D = \mathbb{R}_0^+$ und $W = \mathbb{R}_0^+$.

Definition: Eine Vorschrift f, die jeder Zahl x einer Menge D **eindeutig** eine Zahl y zuordnet, heißt **Funktion**.
D heißt **Definitionsmenge**.
Die Menge W der Funktionswerte heißt **Wertemenge**.

Man kann sich eine Funktion vorstellen als Maschine, die eine Zahl x (Eingabe) verarbeitet zu einer Zahl f(x) (Ausgabe).



Sonderfall D = ℕ

Funktionen, deren Definitionsmengen aus den natürlichen Zahlen bestehen, heißen **Folgen**. Bei Folgen ist es üblich, die Funktionswerte mit Indizes zu nummerieren. Heißt die Funktion (Folge) a, so schreibt man für den Funktionswert a(1) kurz a_1 und allgemein für a(n) kurz a_n.

Beispiel: Folge der Quadratzahlen:

n	1	2	3	…	k	…
a_n	1	4	9	…	k^2	…

Beispiel: Folge der Primzahlen:

n	1	2	3	4	5	…	k	…
p_n	2	3	5	7	11	…	?	…

Sogenannte Intelligenztests enthalten oft Aufgaben, bei denen man eine Zahlenfolge »passend« fortsetzen soll, das heißt, für gegebene Zahlen muss man eine Gesetzmäßigkeit finden und damit die nächsten Zahlen bestimmen.

Beispiel: Folge der Fibonacci-Zahlen:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	…
f_n	1	1	2	3	5	8	13	?	…

Gesetzmäßigkeit: Jede Fibonacci-Zahl f_n größer als 1 ergibt sich als Summe der beiden vorhergehenden Zahlen f_{n-1} und f_{n-2} .

Unter die 8 gehört also $f_8 = f_7 + f_6 = 13 + 8 = 21$.

Aufgaben

1 Vervollständige die Wertetabelle für die Funktion f mit D = ℕ.

x	1	2	3	4	5	8	10	12	20
f(x)									

a) f(x) ist die Quersumme von x.

b) f(x) ist die Anzahl der Teiler von x.

c) f(x) ist die Anzahl der echten Teiler von x.

d) f(x) ist die Anzahl der Primfaktoren 2 in x.

e) f(x) ist der größte gemeinsame Teiler von x und 30.

◊**2** Vervollständige die Wertetabelle für die Funktion f mit $D = \mathbb{R}$.

x	–100	–π	–0,2	0	0,5	1	2,5	3,5	100
f(x)									

a) f(x) ist das Quadrat von x.

b) f(x) ist das arithmetische Mittel der Zahlen 1 und x.

c) f(x) ist der absolute Betrag von x.

d) f(x) ist die ganze Zahl, die x am nächsten liegt.
Bei gleichen Abständen nimmt man die gerade Zahl.

e) f(x) ist das Vorzeichen von x, das heißt,
$f(x) = -1$ für negative x,
$f(x) = +1$ für positive x und $f(0) = 0$.

f) f(x) ist die kleinste ganze Zahl, die größer oder gleich x ist.

g) f(x) ist die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist.

h) $f(x) = 1$ für rationale x und $f(x) = 0$ sonst.

3 Unter max(a, b) versteht man die größere der beiden Zahlen – oder a, falls a = b; zum Beispiel ist max(2, 3) = 3 und max(2, 2) = 2.
Unter min(a, b) versteht man die kleinere der beiden Zahlen – oder a, falls a = b; zum Beispiel ist min(2, 3) = 2 und min(2, 2) = 2.
Vervollständige die Wertetabelle für die Funktion f mit $D = \mathbb{R}$.

x	–2	–1	–0,5	0	0,5	0,9	1	2	10
f(x)									

a) $f(x) = \max(1, x)$ **b)** $f(x) = \min(0, x)$ **c)** $f(x) = \max(x, x^2)$

4 Entscheide, ob die Vorschrift eine Funktion ist:

a) Man ordnet einer Zahl a die Lösung der Gleichung $x^3 = a$ zu,
$D = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$.

b) Man ordnet einer Zahl n die Anzahl der möglichen Schnittpunkte von n Geraden in der Ebene zu, $D = \mathbb{N}$.

c) Man ordnet einer Zahl n die Anzahl der Gitterpunkte mit ganzzahligen positiven Koordinaten zu, die vom Ursprung die Entfernung n haben, $n \in \{1, 2, 3, \dots, 10\}$.

5 Gib eine Gesetzmäßigkeit an, die für die gegebene Zahlenfolge passt, und bestimme den nächsten Funktionswert.

a)

n	1	2	3	4	5	6
f_n	0	1	3	7	15	?

b)

n	1	2	3	4	5	6
f_n	2	5	10	17	26	?

c)

n	1	2	3	4	5	6
f_n	1	3	6	10	15	?

1.2 Funktionsterm und maximale Definitionsmenge

Funktionsterm

Oft lässt sich die Zuordnung mit einer Rechenvorschrift ausdrücken wie in:

$f(x) = x^2 - 1$ $\quad g(x) = \frac{1}{x^2-1}$ $\quad h(x) = \sqrt{x^2-1}$ $\quad k(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

Man nennt eine solche Rechenvorschrift **Funktionsterm**. Es gilt dann $y = f(x)$. Die Gleichung $y = f(x)$ heißt **Funktionsgleichung**. Fasst man die Funktionsgleichung $y = f(x)$ als Bestimmungsgleichung für die Unbekannten x und y auf, dann sind die Zahlenpaare $(x|y)$ der Wertetabelle Lösungen der Funktionsgleichung. Zum Beispiel sehen Lösungen von $y = x^2 - 1$ tabelliert so aus:

x	–2	–1	–1/2	0	1/2	1	3
y	3	0	–3/4	–1	–3/4	0	3

Einsetzen in den Funktionsterm

Die y-Werte ergeben sich, wenn man Zahlen für x einsetzt.

Beispiel: $f(x) = x^2 - 1$

$f(-2) = (-2)^2 - 1 = 3$

$f(0) = 0^2 - 1 = -1$

$f(0{,}5) = 0{,}5^2 - 1 = -0{,}75$

Statt Zahlen kann man für x auch Variablen oder sogar ganze Terme einsetzen. Der Term in den Klammern hinter dem Funktionsnamen heißt auch **Argument** der Funktion, »f(Argument)«.

Beispiel: $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ das Argument ist x

$f(a) = \frac{a}{a^2-1}$ das Argument ist a

$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2-1} = -\frac{x}{x^2-1}$ das Argument ist –x

$f(x+1) = \frac{x+1}{(x+1)^2-1} = \frac{x+1}{x(x+2)}$ das Argument ist x+1

Als Argument kann man auch den Funktionsterm selber nehmen:

$$f(f(x)) = f\left(\frac{x}{x^2-1}\right) = \frac{\frac{x}{x^2-1}}{\left(\frac{x}{x^2-1}\right)^2-1} = \frac{x(x^2-1)}{x^2-(x^2-1)^2}$$

$$f(f(x)) = \frac{x(x-1)(x-1)}{(x-(x^2-1))(x+(x^2-1))} = \frac{x(x-1)(x-1)}{(-x^2+x+1)(x^2+x-1)}$$

Definitionsmenge

Eine Funktion liegt vor, wenn Funktionsterm f(x) und Definitionsmenge D gegeben sind. Gewöhnlich nimmt man als Definitionsmenge der Funktion die maximale Definitionsmenge D_{max} des Funktionsterms. Um D_{max} zu bestimmen, genügt es vorläufig, darauf zu achten, dass kein Nenner =0 und Radikanden ≧0 sind.

$f(x) = x^2-1$ $\qquad D_{max} = \mathbb{R}$

Man findet verbotene Zahlen, indem man die Gleichung »Nenner = 0« löst:

$g(x) = \frac{1}{x^2-1}$ $\qquad x^2 - 1 = 0 \Rightarrow |x| = 1 \Rightarrow x = \pm 1,$ $\qquad D_{max} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

Man findet die erlaubten Bereiche,
indem man die Ungleichung »Radikand ≧ 0« löst:

$h(x) = \sqrt{x^2-1}$ $\qquad x^2 - 1 \geqq 0 \Rightarrow |x| \geqq 1$ $\qquad D_{max} =]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[$

oder $\quad D_{max} = \mathbb{R} \setminus]-1, 1[$

Manchmal muss man auch beide Bedingungen beachten:

$k(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ $\qquad x^2 - 1 > 0 \Rightarrow |x| > 1$ $\qquad D_{max} =]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

oder $\quad D_{max} = \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$

Ist der Funktionsterm eine Summe oder ein Produkt einfacherer Terme, so ist D_{max} gleich der Schnittmenge der einzelnen Definitionsmengen.

Beispiel: $f(x) = \frac{x}{x+1} - \frac{1}{x^2-1}$, $f_1(x) = \frac{x}{x+1}$, $D_{1max} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$f_2(x) = \frac{1}{x^2-1}$, $D_{2max} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

$D_{max} = D_{1max} \cap D_{2max} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

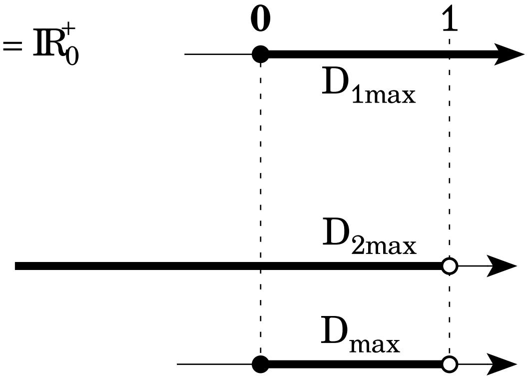
Beispiel: $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$, $f_1(x) = \sqrt{x}$, $D_{1max} = \mathbb{R}_0^+$

$f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$

$1 - x > 0 \Rightarrow 1 > x$

$D_{2max} =]-\infty; 1[$

$D_{max} = D_{1max} \cap D_{2max} = [0;1[$



Vereinbarung

Wenn künftig im Buch die Definitionsmenge nicht genannt ist, dann ist immer die maximale Definitionsmenge D_{max} des Funktionsterms f(x) zu nehmen.

Aufgaben

◊1 $f(x) = 2x - 1$ Berechne und vereinfache

a) $f(-2{,}5)$ **b)** $f(-a^2)$ **c)** $f(x+h)$ **d)** $f\left(\frac{1}{x}\right)$ **e)** $f(f(x))$

◊2 $f(x) = x - x^2$ Berechne und vereinfache

a) $f(\sqrt{2})$ **b)** $f(-x)$ **c)** $f(x-1)$ **d)** $f(x+h)$ **e)** $f(x-h)$

3 $f(x) = \frac{x+2}{2x-1}$ Berechne und vereinfache

a) $f(x-2)$ **b)** $f(-x)$ **c)** $f(2x)$ **d)** $f(f(x))$ **e)** $f(f(f(x)))$

4 $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $g(x) = \frac{x+1}{x}$ Berechne und vereinfache

a) $f(-1)$, $g(-1)$ **b)** $f(-x)$, $g(-x)$ **c)** $f(g(x))$, $g(f(x))$

5 $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ Berechne und vereinfache

a) $f(1)$ **b)** $f(x^2-1)$ **c)** $f(x^2) - 1$ **d)** $(f(x))^2 - 1$

•6 Bestimme in $f(x) = mx + t$ die Koeffizienten m und t so, dass gilt

a) $f(f(x)) = f(x)$ **b)** $f(f(x)) = x$

:7 Bestimme in $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ die Koeffizienten a, b, c und d so, dass $f(f(x))=x$ ist.

◊8 Bestimme die maximale Definitionsmenge des Funktionsterms

a) $f(x)=\frac{x}{x-4}$ **b)** $f(x)=\frac{x^2}{x^2-4}$ **c)** $f(x)=\frac{x^2}{x^2+4}$

d) $f(x)=\frac{x^2}{x^2+4x}$ **e)** $f(x)=\frac{x^2}{-x^2-2x-1}$ **f)** $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2-4}$

◊9 Bestimme die maximale Definitionsmenge des Funktionsterms

a) $f(x)=\sqrt{x-4}$ **b)** $f(x)=\sqrt{4-x}$ **c)** $f(x)=\sqrt{x^2+4}$

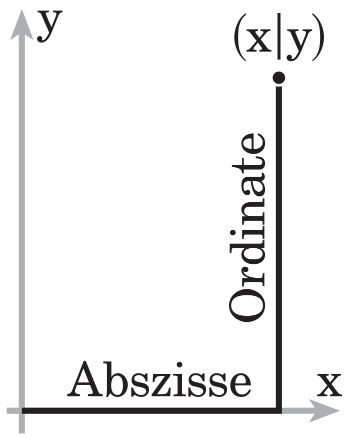
d) $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ **e)** $f(x)=\sqrt{2-x}\sqrt{2+x}$ **f)** $f(x)=\sqrt{x^2-4x}$

g) $f(x)=\sqrt{x^2-4}$ **h)** $f(x)=\sqrt{x-2}\sqrt{x+2}$ **i)** $f(x)=\sqrt{x^2-4x+4}$

10 Bestimme die maximale Definitionsmenge des Funktionsterms

a) $f(x)=\frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}+1}$ **b)** $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{x^2-1}}$ **c)** $f(x)=\frac{\sqrt{1-x}+\sqrt{x-1}}{x-1}$

1.3 Graph



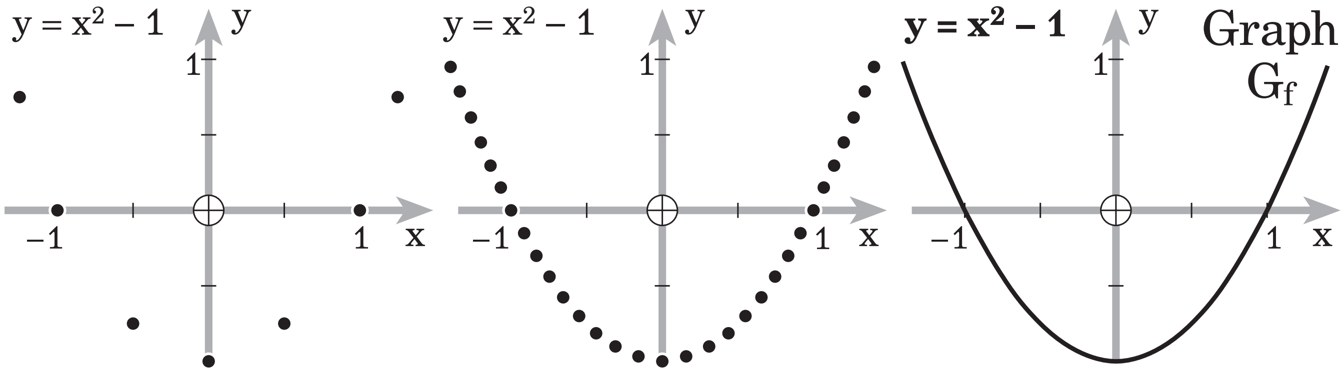
Die Wertetabelle enthält Zahlenpaare der Form (x|f(x)). In einem x-y-Koordinatensystem sind Zahlenpaare als Punkte veranschaulicht; die 1. Koordinate heißt **x-Wert** oder **Abszisse**, die 2. Koordinate heißt **y-Wert** oder **Ordinate**. Der **Graph** G_f der Funktion ist die Menge der Punkte (x|y) im Koordinatensystem, deren Koordinaten die Funktionsgleichung y=f(x) erfüllen. Für Graph ist auch die deutsche Bezeichnung **Schaubild** üblich.

Die Wertetabelle liefert eine Punktmenge im Koordinatensystem, eine Teilmenge des Graphen. Da wo f definiert ist, verbindet man diese Punkte nach Augenmaß durch eine möglichst einfache glatte Kurve. Wir verwenden »Kurve« als Sammelbegriff für Linien, die gerade oder krumm sein können. Eine Kurve gibt den Graphen mehr oder weniger gut wieder. Je umfangreicher die Wertetabelle ist, desto besser beschreibt die Kurve den Graphen. Ziel der Analysis ist es jedoch nicht, Kurven aus endlosen Wertetabellen zu erzeugen, sondern durch gezielte Methoden Informationen zu finden, mit denen man den Graphen schon mit wenigen Punkten durch eine Kurve gut annähern kann.

Zum Beispiel ergibt sich für die Funktion f mit $f(x) = x^2 - 1$ die Wertetabelle:

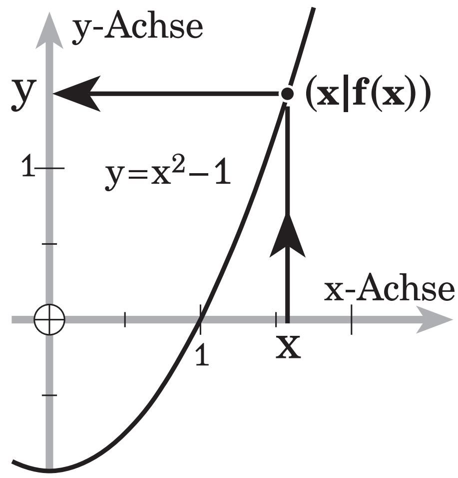
x	–5/4	–1	–1/2	0	1/2	1	5/4
y	9/16	0	–3/4	–1	–3/4	0	9/16

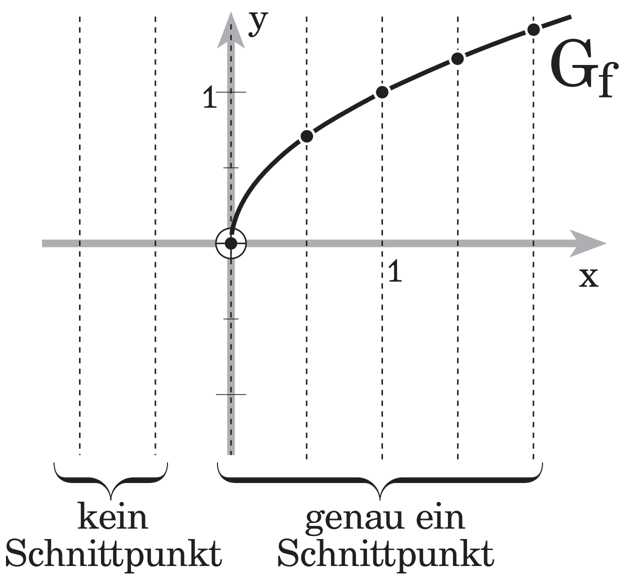
Das sind 7 Punkte im Koordinatensystem (Bild links). 31 Punkte (Bild Mitte) geben eine deutlichere Vorstellung vom Graphen G_f (Bild rechts).



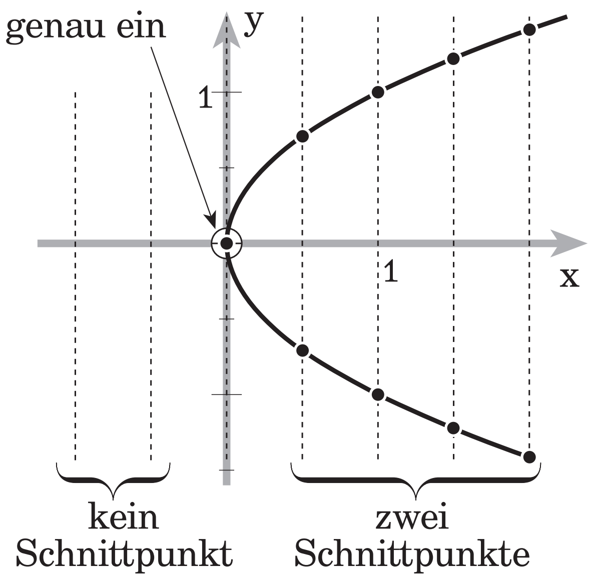
Der Graph vermittelt grafisch den Zusammenhang zwischen x und f(x) auch für Werte, die nicht in der Wertetabelle stehen. Man startet bei einer Zahl $x \in D$ auf der x-Achse und zielt parallel zur y-Achse aufs Schaubild; im Treffpunkt $(x|f(x))$ läuft man parallel zur x-Achse und trifft auf der y-Achse den Funktionswert y.

Graphisch zeigt sich die Eindeutigkeit der Funktion darin, dass jede Parallele zur y-Achse die Kurve höchstens einmal schneidet.





Funktions-Graph



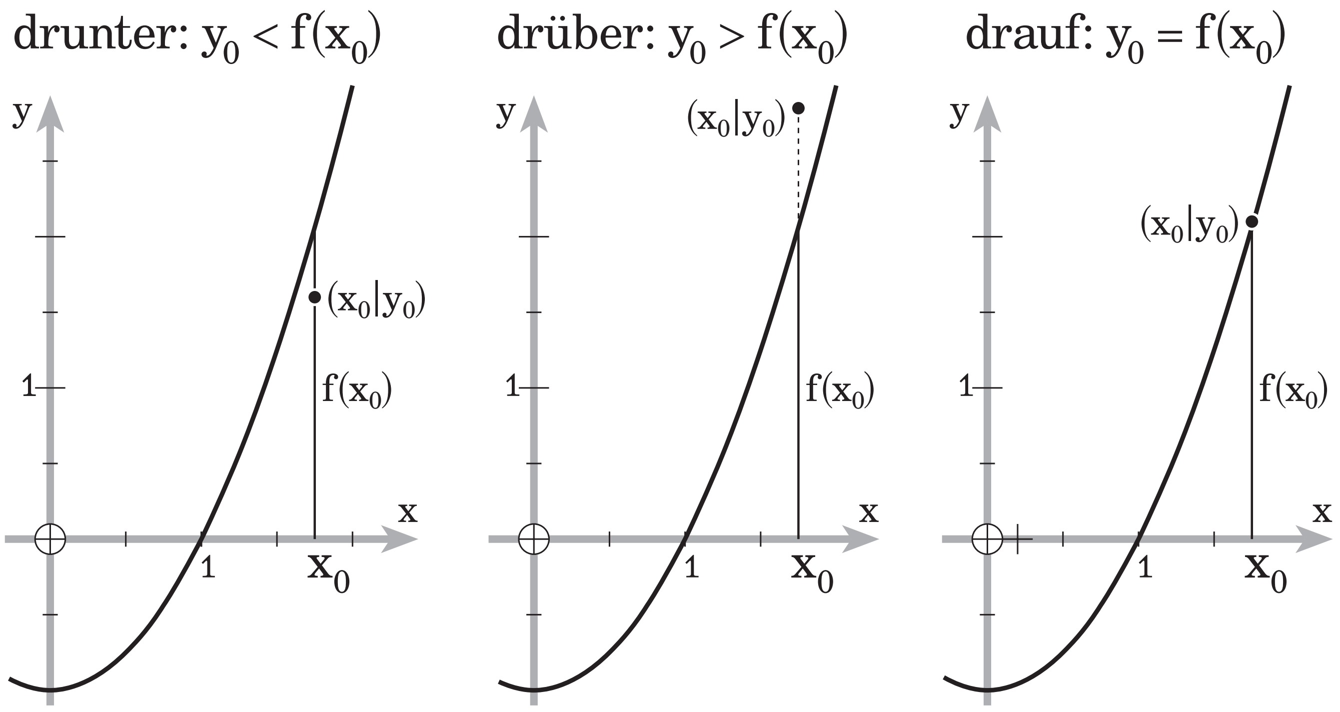
kein Funktions-Graph

Wie entscheidet man, ob ein Punkt $(x_0|y_0)$ auf dem Graphen einer Funktion f liegt ? Liegen zum Beispiel $P(1-\sqrt{2}\,|\,2(1-\sqrt{2}))$ und $Q(-0{,}41|-0{,}82)$ auf dem Schaubild der Funktion mit der Gleichung $y = x^2-1$? Mit einer Zeichnung lässt sich sowas nur in krassen Fällen klären. Exakt aber findet man das durch Einsetzen in die Funktionsgleichung.

P eingesetzt: $f(x_p) = f(1-\sqrt{2}) = (1-\sqrt{2})^2 - 1 = 2 - 2\sqrt{2} = 2(1-\sqrt{2}) = y_p$,
also liegt P drauf.

Q eingesetzt: $f(x_q) = f(-0{,}41) = (-0{,}41)^2 - 1 = -0{,}8319 < y_q$,
also liegt Q nicht drauf, Q liegt 0,0119 drüber.

Liegt der Punkt $P(x_0|y_0)$ auf dem Graphen der Funktion f, so erfüllen seine Koordinaten x_0, y_0 die Funktionsgleichung $y_0 = f(x_0)$.



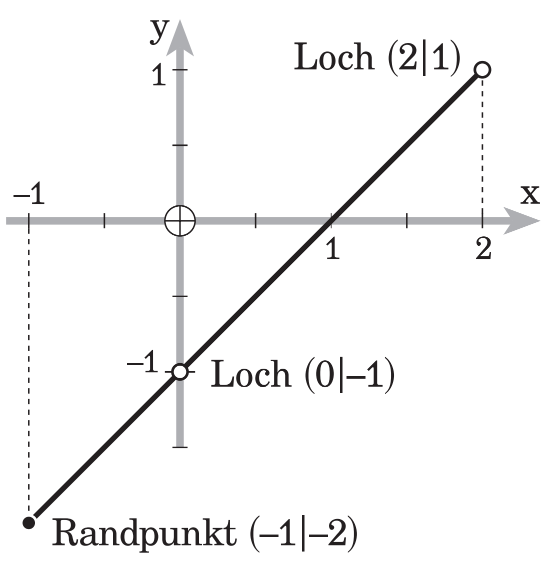
Randpunkte

Ist die Definitionsmenge begrenzt oder hat sie Lücken, so muss dies auch aus der Zeichnung hervorgehen. Randpunkte, die zum Schaubild gehören, kennzeichnen wir mit •, und die nicht dazugehören, die »Löcher«, mit ∘.

Beispiel: $f(x) = \dfrac{x^2-x}{x}$, $D = [-1;2[\setminus\{0\}$

Term vereinfachen

$f(x) = x - 1$



Aufgaben

◊1 Berechne von der Funktion f eine Wertetabelle für die angegebenen x-Werte und skizziere den Graphen.

a) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$ $x \in \{-2\,;\,0\,;\,4\}$

b) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3$ $x \in \{-3\,;\,-2\,;\,-1\,;\,0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\}$

c) $f(x) = \frac{x}{x-2}$ $x \in \{-6\,;\,-2\,;\,0\,;\,1\,;\,1{,}5\,;\,2{,}5\,;\,4\,;\,6\}$

d) $f(x) = 1 - \sqrt{x}$ $x \in \{\,0\,;\,1\,;\,2{,}25\,;\,4\,;\,6{,}25\,;\,9\}$

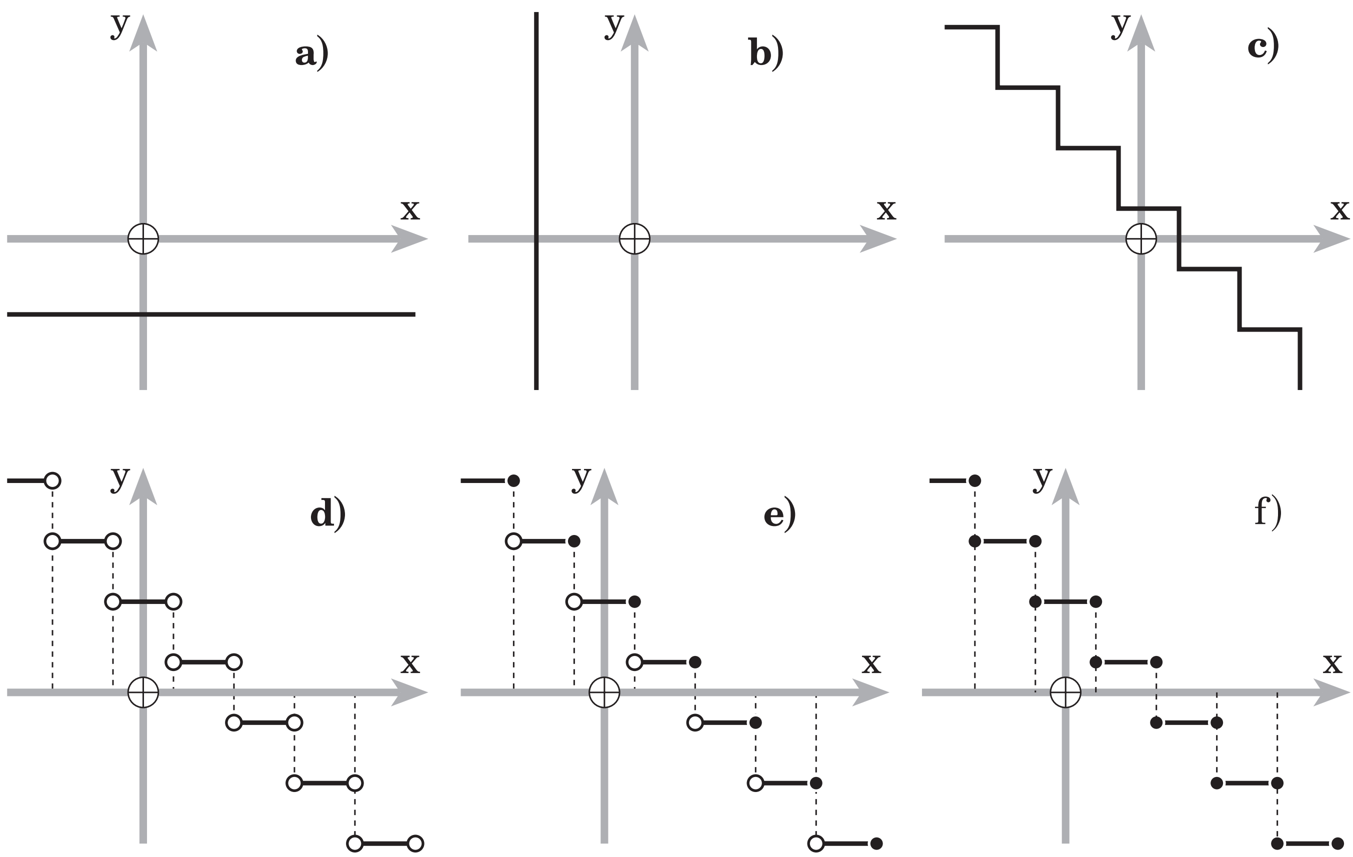
2 Ein Graph kann auch aus einzelnen, isolierten Punkten bestehen. Im folgenden ist $D \subset \mathbb{N}$ und $x \in [1;25]$

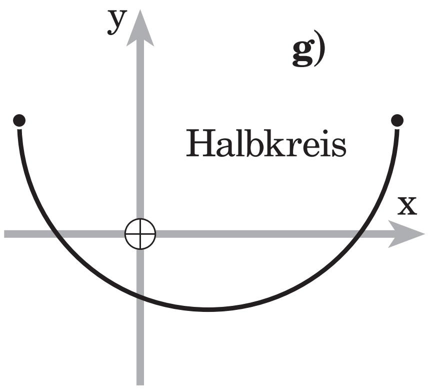
a) f(x) ist die Anzahl der Teiler von x.

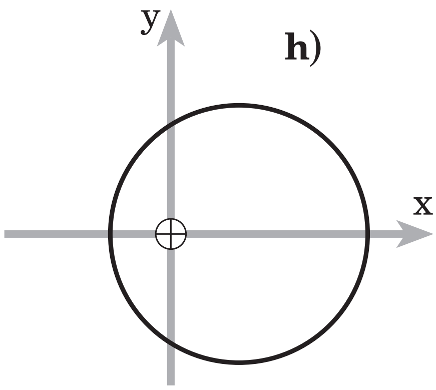
b) f(x) ist die Anzahl der Primfaktoren 2 in x.

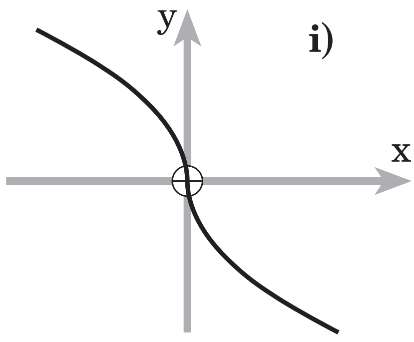
c) f(x) ist der größte Primfaktor in x, der kleiner ist als x.

3 Entscheide, ob die Kurve der Graph einer Funktion ist.

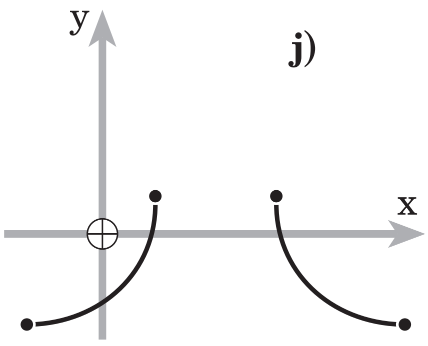




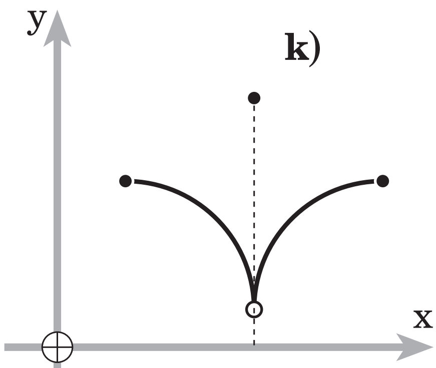




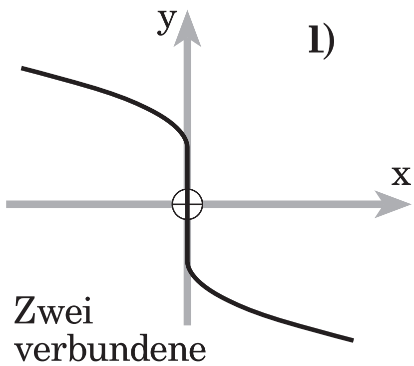
Zwei Halbparabeln



Zwei Viertelkreise



Zwei Viertelkreise



Zwei verbundene Halbparabeln

◊4 Liegen die Punkte auf G_f oder drunter oder drüber ?

a) $f(x) = 2x - 3$ $\quad P(1{,}5|0{,}5)$ $\quad Q(-\frac{1}{3}|-\frac{10}{3})$ $\quad R(\frac{1}{6}|-\frac{8}{3})$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$ $\quad P(\frac{2}{3}|-1)$ $\quad Q(-\frac{2}{3}|-\frac{7}{9})$ $\quad R(\frac{3}{2}|-\frac{1}{9})$

5 Liegen die Punkte auf G_f oder drunter oder drüber ?

a) $f(x) = -\frac{21}{34}x + 2{,}1$ $\quad P(0{,}8|1{,}6)$ $\quad Q(2{,}1|0{,}8)$ $\quad R(1{,}7|1{,}05)$

b) $f(x) = \sqrt{85^2 - x^2}$ $\quad P(75|40)$ $\quad Q(63|57)$ $\quad R(78|34)$

c) $f(x) = \sin x$ $\quad P(\frac{2}{3}|\frac{13}{21})$ $\quad Q(\sqrt{2}\,|\sin\sqrt{3})$ $\quad R(\frac{11\pi}{10}|\frac{1}{4} - \sqrt{0,3125})$

◊6 Achte beim Zeichnen des Schaubilds auf Randpunkte und Löcher.

a) $f(x) = \frac{x}{x}$ $\quad$ **b)** $f(x) = \frac{x^2}{x}$ $\quad$ **c)** $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}}$

7 Zeichne den Graphen der Funktion f mit $f(x) = x$ für

a) $D = [-2;3]$ $\quad$ **b)** $D =]-2;3[$ $\quad$ **c)** $D = [-2;3[$

d) $D =]-2;3]$ $\quad$ **e)** $D = [-2;3]\setminus\{1\}$

2. Affine Funktion

2.1 Definition und Graph

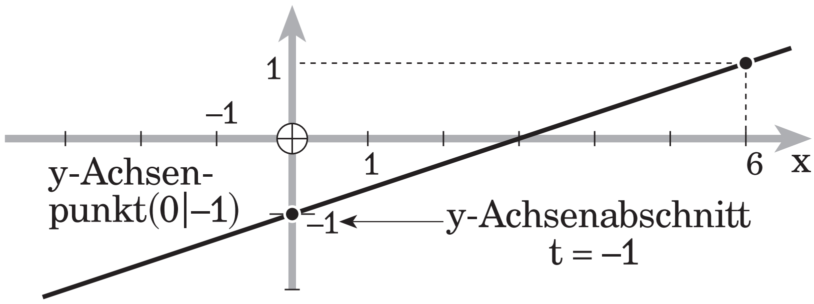
Wir beginnen mit Funktionstermen, die x nur in 1. Potenz enthalten,
zum Beispiel $f(x) = -2x + 3$.

Definition:	Eine Funktion f mit $f(x)=mx+t$ mit $m, t \in \mathbb{R}$ heißt **affine** Funktion

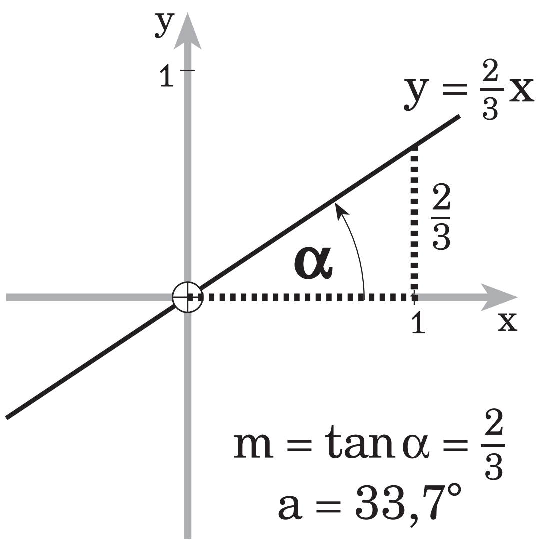
Die maximale Definitionsmenge einer affinen Funktion ist $\mathbb{R}$. Sie kann aber auch auf Teilmengen von $\mathbb{R}$ beschränkt sein. Ist die Definitionsmenge $\mathbb{R}$, dann ist der Graph eine Gerade. In einer Wertetabelle genügen 2 Zahlenpaare, um sie festzulegen.

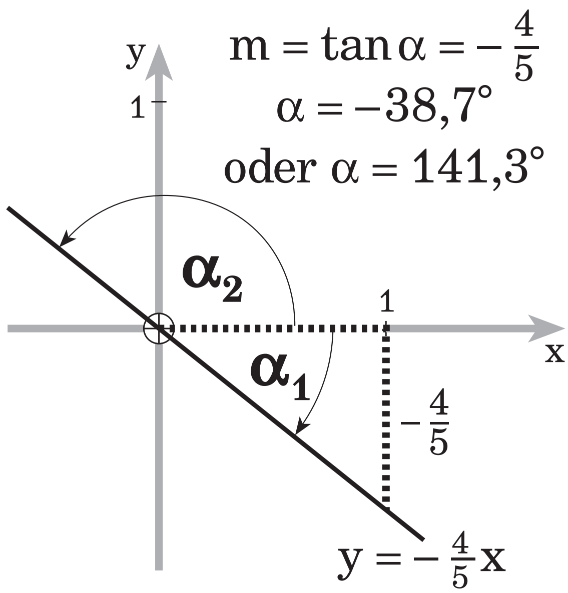
Beispiel: $f(x) = \frac{1}{3}x - 1$

x	0	6
y	–1	1



Mit m und t liegt der Term und damit die Gerade fest. Wegen $f(0)=t$ ist t der Abschnitt auf der y-Achse. Ist $t=0$, so geht die Gerade durch den Ursprung.
Die Ursprungsgerade $y=mx$ hat die Steigung $m=\tan\alpha$.





Weil die Neigungswinkel im Gradmaß meistens krumme Werte haben, geben wir sie gewöhnlich auf 10tel Grad gerundet an (»auf eine Dezimale genau«),
also $\alpha = 33{,}7°$ statt $\alpha = 33{,}69\ldots°$

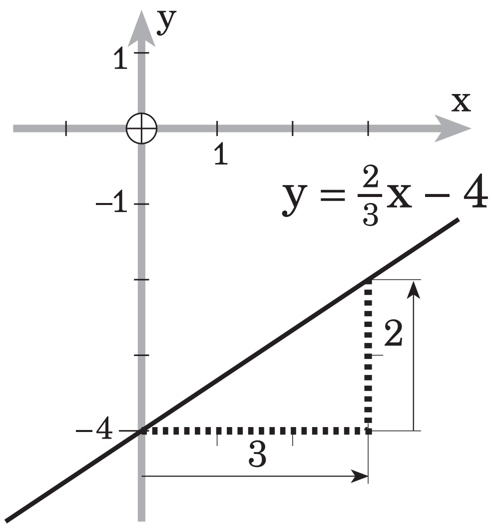
Die Steigung ändert sich nicht, wenn $t \neq 0$ ist, die Gerade also in y-Richtung verschoben ist. Beim Zeichnen von Geraden beginnt man zweckmäßigerweise auf der y-Achse im Punkt $(0|t)$ und zeichnet Steigungsdreiecke mit den Katheten 1 (waagrecht) und m (senkrecht).
Ist m ein Bruch $m = \frac{a}{b}$, dann zeichnet man Steigungsdreiecke mit den Katheten b (waagrecht) und a (senkrecht):

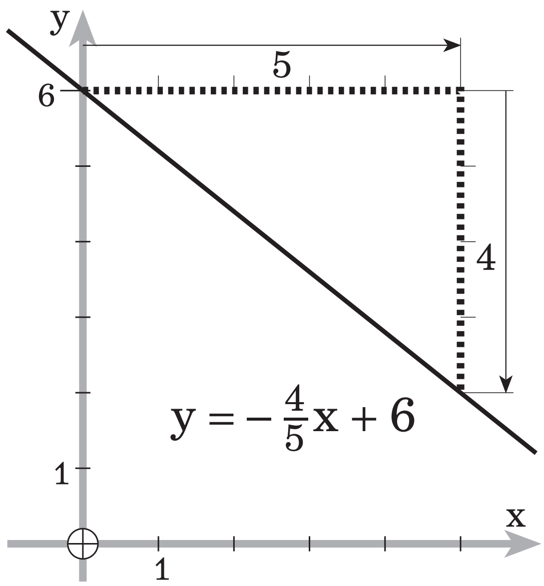
$m = \frac{2}{3}$ 3 nach rechts, 2 nach oben

$m = -\frac{4}{5}$ 5 nach rechts, 4 nach unten

Beispiel: $f(x) = \frac{2}{3}x - 4$

$g(x) = -\frac{4}{5}x + 6$



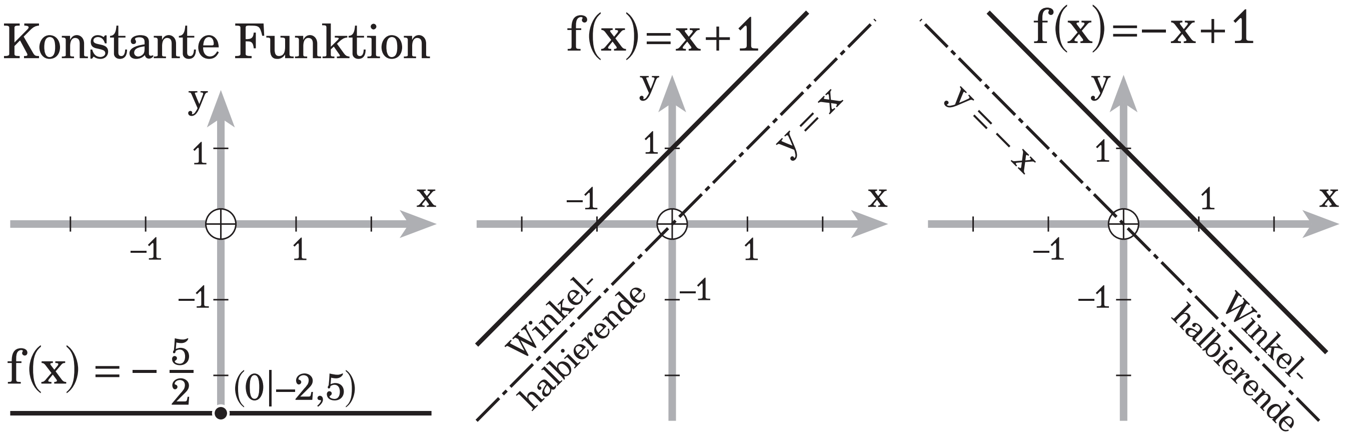


Sonderfälle

m = 0 $f(x) = t$ f ist die **konstante** Funktion mit dem Wert t. Die Gerade verläuft parallel zur x-Achse durch $(0|t)$.
Eine Parallele zur y-Achse, wie $x = 3$, ist nicht Graph einer Funktion, weil keine eindeutige Zuordnung vorliegt.

m = 1 $f(x) = x + t$ Die Gerade hat die Steigung $m = \tan\alpha = 1$, also den Neigungswinkel $\alpha = 45°$. Sie ist parallel zur Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten. Die Winkelhalbierende selber ergibt sich für $t = 0$, sie hat die Gleichung $y = x$.

m = –1 $f(x) = -x + t$ Die Gerade hat die Steigung $m = \tan\alpha = -1$, also den Neigungswinkel $\alpha = -45°$. Sie ist parallel zur Winkelhalbierenden des 2. und 4. Quadranten. Die Winkelhalbierende selber ergibt sich für $t = 0$, sie hat die Gleichung $y = -x$.



Nullstelle

Nullstelle heißt der x-Wert, bei dem die Funktion den Wert null hat.
Um sie zu finden, setzt man den Term gleich 0.

Beispiel: $f(x) = -\frac{1}{2}x - 3$

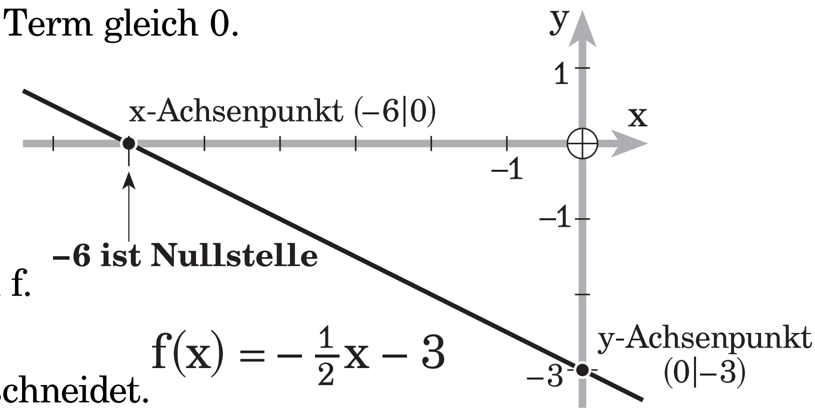
Nullsetzen:

$0 = -\frac{1}{2}x - 3 \Rightarrow x = -6$

–6 ist die Nullstelle von f.

(–6|0) ist der Punkt,

in dem G_f die x-Achse schneidet.



Zum Nachdenken

Oft bezeichnet man die affine Funktion auch als **lineare** Funktion, weil ihr Term linear in x ist und ihr Schaubild eine Gerade (»linea«) ist. Heute nennt man allgemein eine Funktion linear, wenn sie folgende 2 Eigenschaften hat:

- $f(a + b) = f(a) + f(b)$
- $f(k \cdot a) = k \cdot f(a)$ für $k, a, b \in \mathbb{R}$

In diesem Sinn ist eine affine Funktion nur dann linear, wenn t=0 ist, das heißt f(x)=mx oder y = mx, hier sind x und y proportional. Der Graph einer linearen Funktion ist eine Gerade durch den Ursprung. Verschiebt man eine Ursprungsgerade in y-Richtung mit $t \neq 0$, so geht die Proportionalität verloren. Deshalb hat man den Oberbegriff affine Funktion eingeführt.

Das lateinische »affinis« heißt verwandt. Die affine Funktion vermittelt eine besonders enge Verwandtschaft zwischen x und y.

Aufgaben

◊**1** Zeichne die Gerade und gib den Neigungswinkel an:

a) $f(x) = 3x - 2$ **b)** $f(x) = -2x + 3$ **c)** $f(x) = -5x$ **b)** $f(x) = 2$

◊2 Zeichne die Gerade und gib den Neigungswinkel an:

a) $f(x) = \frac{3}{4}x$ **b)** $f(x) = \frac{3}{4}x-2$ **c)** $f(x) = -\frac{3}{4}x+3$ **d)** $f(x) = -\frac{3}{4}x+1$

◊3 Bestimme die Achsenpunkte des Graphen:

a) $f(x) = -\frac{3}{2}x + 6$ **b)** $f(x) = x + \sqrt{2}$

c) $f(x) = -\sqrt{2}\,x + \sqrt{8}$ **d)** $f(x) = \frac{x}{4} - 1\frac{1}{8}$

4 $f(x) = 2x - 0{,}8$
Berechne die fehlende Koordinate des Geradenpunkts:
A(2|?) B(–5|?) C(10,9|?) P(?|0) Q(?|–1) R(?|23,6)

◊5 Gib den Term f(x) einer affinen Funktion an, für die gilt:

a) G_f hat die Steigung $\frac{3}{4}$ und schneidet die y-Achse bei –2.
b) G_f hat die Steigung –2 und schneidet die y-Achse bei $\frac{3}{4}$.
c) G_f hat die Steigung $\frac{1}{3}$ und schneidet die y-Achse bei 2.
d) G_f hat die Steigung 0 und schneidet die y-Achse bei 0.
e) G_f ist parallel zur Winkelhalbierenden des 2. Quadranten und geht durch $(-\pi|\pi)$.
f) G_f schneidet die x-Achse im Ursprung unter 120°.
g) G_f ist parallel zur x-Achse und geht durch $(-\pi|-\pi)$.

6 Klammert man im Funktionsterm der affinen Funktion die Steigung m aus, dann kann man aus der Klammer bequem die Nullstelle ablesen:
$f(x) = 3x + 12 = 3(x + 4)$, Nullstelle $x = -4$,
denn für $x = -4$ ist die Klammer gleich null.
Bestimme auf diese Art die Nullstelle in:

a) $f(x) = 7x - 3{,}5$ **b)** $f(x) = 3{,}5x + 7$ **c)** $f(x) = \sqrt{3}\,x - 3$

d) $f(x) = \frac{1}{5}x + 0{,}8$ **e)** $f(x) = \frac{3}{4}x - 1{,}5$ **f)** $f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{3}{2}$

7 Stelle den Term der affinen Funktion auf, für die gilt

a) G_f schneidet die x- und y-Achse bei 100.
b) G_f schneidet die x-Achse bei –100 und die y-Achse bei 100.
c) G_f geht durch $(\sqrt{5}\,|0)$ und $(0|-\sqrt{5}\,)$.
d) G_f geht durch $(\sqrt{5}\,|0)$ und $(-\sqrt{5}\,|0)$.
e) G_f hat nur den Achsenpunkt $(0|\sqrt{5}\,)$.

8 Kennzeichne in einem Koordinatensystem die Punkte (x|y), deren Koordinaten die Ungleichung erfüllen:

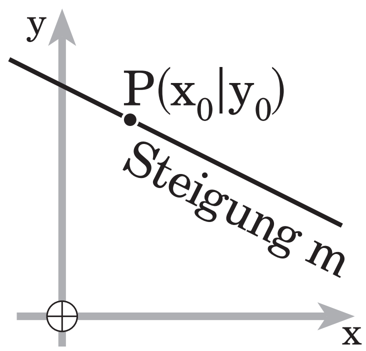
a) $y \leqq x + 1$ **b)** $y > \frac{1}{2}x - 1$ **c)** $y + x \geqq 0$ **d)** $y - x < 0$

2.2 Geradengleichungen

Eine Gerade lässt sich festlegen mit einem Punkt $P(x_0|y_0)$ und einer Steigung m. Die zugehörige affine Funktion hat den Term

$$\boxed{\mathbf{f(x) = m(x - x_0) + y_0}}$$

Punkt-Steigungs-Form



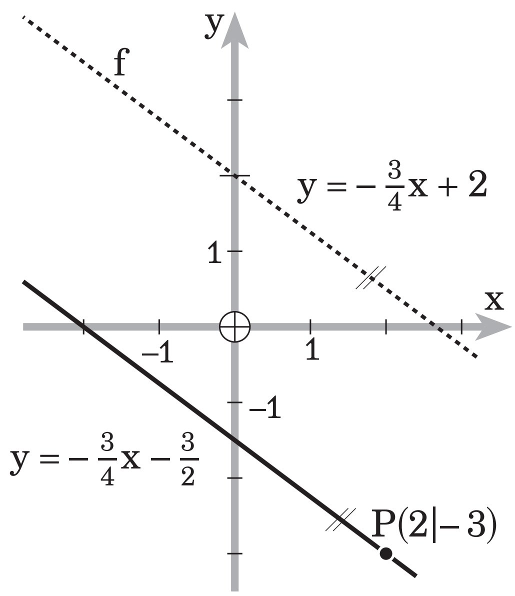
Man sieht das sofort, wenn man $P(x_0|y_0)$ einsetzt; die Steigung m steht ja schon als Faktor bei x. $\mathbf{y = m(x - x_0) + y_0}$ heißt Gleichung der Gerade.

Beispiel: Gegeben ist ein Punkt $P(2|-3)$ und eine Gerade G_f durch $f(x) = -\frac{3}{4}x + 2$.

Wir bestimmen die Gleichung der Gerade, die durch P geht und parallel ist zu G_f.

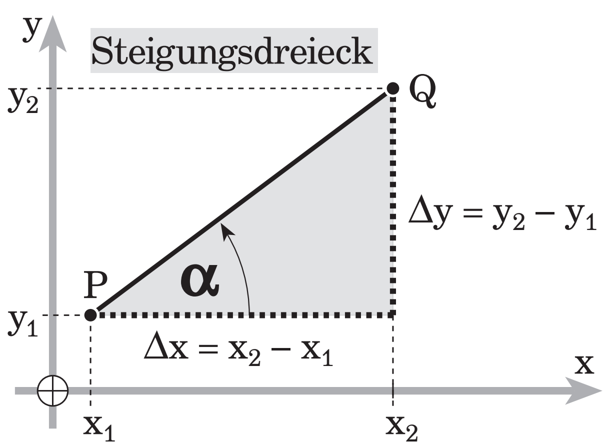
$y = -\frac{3}{4}(x-2) + (-3)$

$y = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{2}$



Eine Gerade lässt sich aber auch festlegen mit 2 Punkten $P(x_1|y_1)$ und $Q(x_2|y_2)$. P und Q bestimmen die Steigung. Der griechische Großbuchstabe Δ (gesprochen Delta) weist auf eine Differenz hin:
$\Delta x = x_2 - x_1$ und $\Delta y = y_2 - y_1$.

$$\boxed{\text{Steigung} \quad m = \tan\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$



α ist der Neigungswinkel

Zur Aufstellung der Geradengleichung bieten sich 2 Verfahren an.

Beispiel: Gegeben sind P(–3|4) und Q(3|0).
Gesucht ist eine Gleichung der Gerade PQ.
1. Verfahren: Man setzt beide Punkte in die Geradengleichung ein und löst ein System von 2 Gleichungen.

Allgemeine Geradengleichung	$y = mx + t$	
Punkt P einsetzen	$4 = -3m + t$	I
Punkt Q einsetzen	$0 = 3m + t$	II
es ergibt sich	$m = -\frac{2}{3}$ und $t = 2$	

Ergebnis $y = -\frac{2}{3}x + 2$

2. Verfahren: Man berechnet die Steigung und verwendet die Punkt-Steigungs-Form der Geradengleichung.

Steigung $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-4}{3-(-3)} = -\frac{2}{3}$

m und P (oder Q) einsetzen $y = -\frac{2}{3}(x-3) + 0$

Ergebnis $y = -\frac{2}{3}x + 2$

Schnittpunkt

Besondere x-Werte bezeichnet man auch als **Stelle**, Beispiel Nullstelle.
Eine **Schnittstelle** ist demnach der x-Wert eines Schnittpunkts.
Eine Schnittstelle zweier Graphen findet man durch Gleichsetzen der Funktionsterme und Auflösen nach x (Schnittstelle). Einsetzen von x in einen der beiden Funktionsterme liefert den y-Wert des Schnittpunkts.

Beispiel: $f(x) = \frac{3}{2}x - 1$, $g(x) = -\frac{1}{2}x + 2$.

Wo schneiden sich die Geraden ?

Gleichsetzen

$f(x) = g(x)$

$\frac{3}{2}x - 1 = -\frac{1}{2}x + 2$

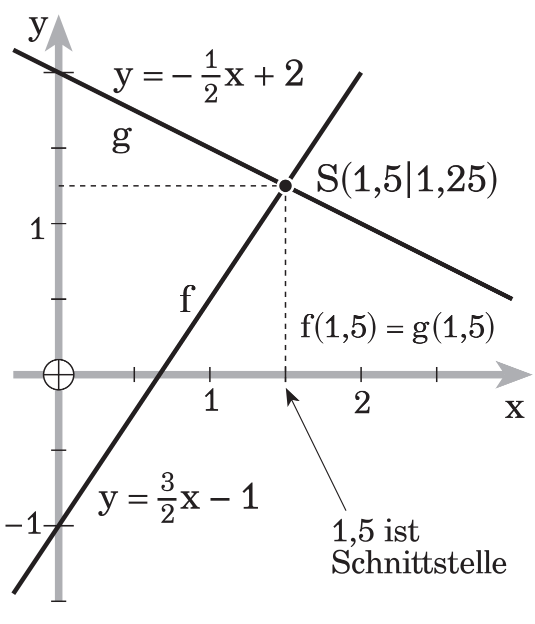
Auflösen nach x

$x = \frac{3}{2}$, das ist die Schnittstelle

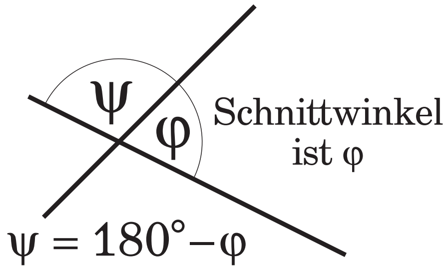
Einsetzen von x

$y = f(\frac{3}{2}) = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} - 1 = \frac{5}{4}$

Schnittpunkt $S(\frac{3}{2}|\frac{5}{4})$



Schnittwinkel
Beim Schnitt zweier Geraden entstehen 4 Winkel, von denen je 2 gleich groß sind. Als Schnittwinkel nehmen wir den kleineren.
Der Schnittwinkel φ ist die Differenz der Neigungswinkel α_1 und α_2

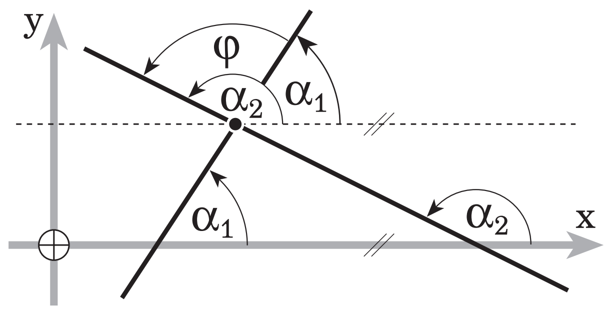


$$\varphi = \Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$$

$$\tan\varphi = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1}{1 + \tan\alpha_2 \cdot \tan\alpha_1} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1}$$

Mit dieser Formel kann man, wie im Bild, auch den stumpfen Winkel erwischen. Betragstriche verhindern das.
Schnittwinkel φ

$$\boxed{\tan\varphi = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 \cdot m_1}\right|} \qquad m_2 m_1 \neq -1$$



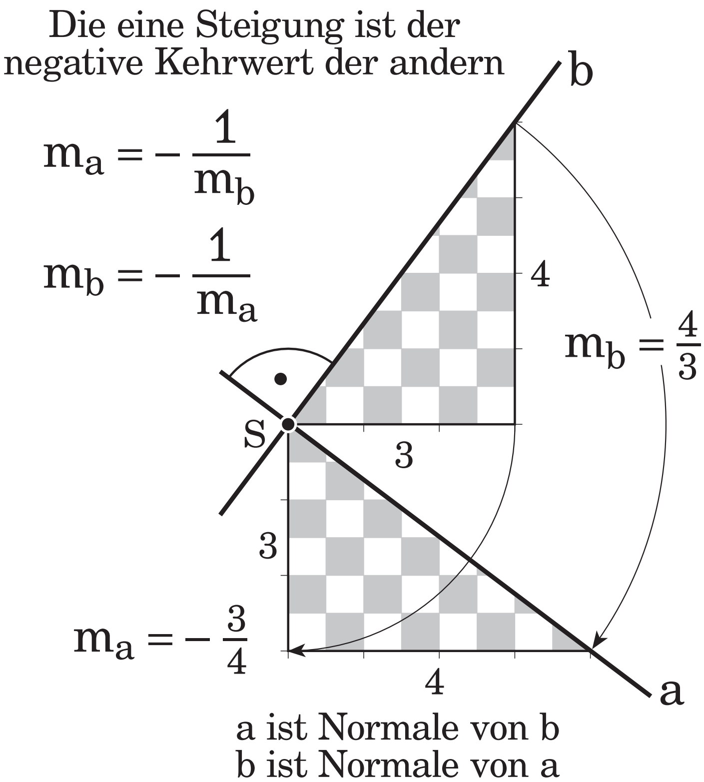
Bei den Geraden aus dem letzten Beispiel ergibt sich

$$\tan\varphi = \left|\frac{-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{1 + (-\frac{1}{2}) \cdot \frac{3}{2}}\right| = |-8| = 8; \text{ Schnittwinkel } \varphi = 82{,}9°$$

Senkrecht stehen

Die Schnittwinkelformel ist unbrauchbar, wenn $m_2 m_1 = -1$ ist, weil dann der Tangens nicht definiert ist. Das liegt daran, dass sein Winkel 90° ist. Also gilt:

2 Geraden stehen senkrecht, wenn ihre Steigungen negativ reziprok sind: $\mathbf{m_2 = -\frac{1}{m_1}}$

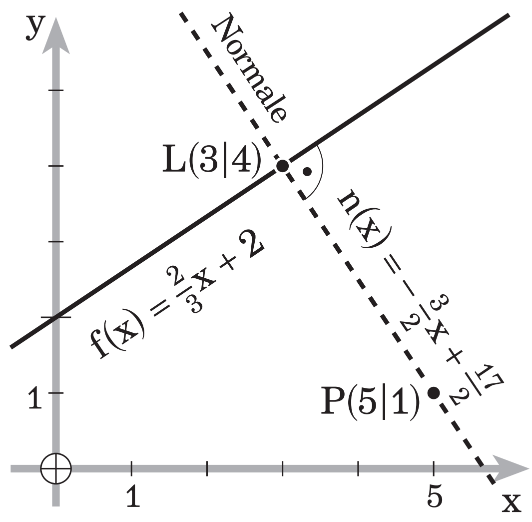


Eine Gerade, die senkrecht auf einer andern Gerade steht, heißt auch **Normale** dieser Gerade.

Beispiel: Lot fällen

$f(x) = \frac{2}{3}x + 2 \quad P(5|1)$

Wir bestimmen die Normale von G_f durch P und den Lotfußpunkt L.



Steigung der Normale

$m = -\frac{1}{2/3} = -\frac{3}{2}$

Gleichung der Normale

$y = -\frac{3}{2}(x-5)+1 = -\frac{3}{2}x + \frac{17}{2}$

$n(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{17}{2}$

Der Lotfußpunkt L ist Schnittpunkt von Gerade und Normale.

$f(x) = n(x)$

$\frac{2}{3}x + 2 = -\frac{3}{2}x + \frac{17}{3} \Rightarrow x = 3,\ y = f(3) = 4, \quad L(3|4)$

Zum Nachdenken

❶ Implizite Geradengleichung

Die Gleichung $y = mx + t$ heißt auch **explizite** (»ausgewickelte«)Geradengleichung, weil die abhängige Variable y herausgestellt ist. Treten beide Variablen x und y auf einer Seite gleichrangig auf, wie in $ax + by + c = 0$, dann spricht man von einer **impliziten** (»eingewickelten«) Geradengleichung. Diese kann man für $b \neq 0$ nach y auflösen, man bekommt die explizite Gleichung $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ der Gerade mit Steigung $m = -\frac{a}{b}$ und y-Achsenabschnitt $t = -\frac{a}{b}$. Für $b = 0$ und $a \neq 0$ ergibt sich $x = -\frac{c}{a}$. Das ist keine Funktionsgleichung, wohl aber eine Gleichung einer Gerade, die an der Stelle $-\frac{c}{a}$ senkrecht auf der x-Achse steht. $x = 3$ beschreibt also nicht einen Punkt der x-Achse, sondern eine Gerade parallel zur y-Achse mit der Gleichung $x = 0$.

❷ Lineare Interpolation

Beim Zeichnen und Berechnen von Kurvenpunkten ersetzt man den Kurvenbogen zwischen 2 Punkten A und B näherungsweise durch die Strecke [AB].
Dadurch vereinfachen und beschleunigen sich viele Rechnungen erheblich.
Die Näherung ist um so besser, je näher die beiden Punkte beieinander liegen.

Beispiel: $f(x) = \sqrt{x}$ A(100|10) B(101|10,0499)

Wir berechnen einen Näherungswert für den Zwischenwert $x = 100{,}3$ mit linearer Interpolation:

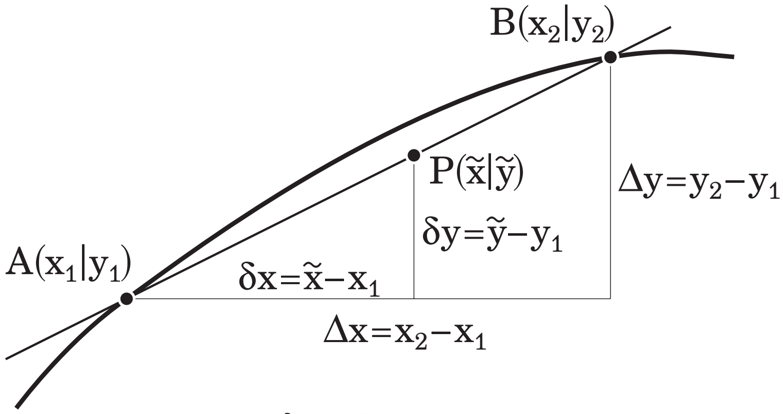
Steigung der Interpolationsgerade AB: $m = \frac{10{,}0499 - 10}{101 - 100} = 0{,}0499$

Gleichung der Interpolationsgerade: $y = 0{,}0499(x - 100) + 10$

Zwischenwert 100,3 einsetzen: $y = 0{,}0499(100{,}3 - 100) + 10 = 10{,}01497$.

Für $\sqrt{100{,}3}$ liefert der Taschenrechner auf 5 Stellen gerundet 10,01499; die Wurzelkurve liegt also knapp über dem Interpolationspunkt.

Die Formel für den Näherungswert (=Interpolationswert) $\tilde{y}$ kann man direkt aus dem Bild ablesen:



$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$
$$\frac{\tilde{y}-10}{100{,}3-100} = \frac{10{,}0499-10}{101-100}$$
$$\tilde{y} = 0{,}0499 \cdot 0{,}3 + 10 = 10{,}01497$$

Aufgaben

◊1 Von einer Gerade sind bekannt Steigung m und ein Punkt P.
Bestimme ihre Gleichung

a) $m = \frac{3}{4}$ P(1|–2) **b)** $m = -1$ P(0|0) **c)** $m = -\frac{3}{2}$ P(2|–1)

d) $m = 0$ P(0|–7) **e)** $m = \sqrt{2}$ P($\sqrt{2}$|0) **f)** $m = \frac{1}{a}$ P(a|a²)

◊2 Bestimme eine Gleichung der Gerade PQ

a) P(20|35) Q(30|50) **b)** P(35|20) Q(50|30)

c) P(0|0) Q(–111|–111) **d)** P(–30|40) Q(0,75|–1)

e) P(4|–7) Q(–7|–7) **f)** P(4|–7) Q(4|7)

◊3 Bestimme Steigung m, Neigungswinkel α und Nullstelle von

a) $y = -x + 5$ **b)** $y = -\frac{1}{2}x - 3$ **c)** $y = \sqrt{3}x + \sqrt{27}$

4 Bestimme Schnittpunkt S und Schnittwinkel φ von

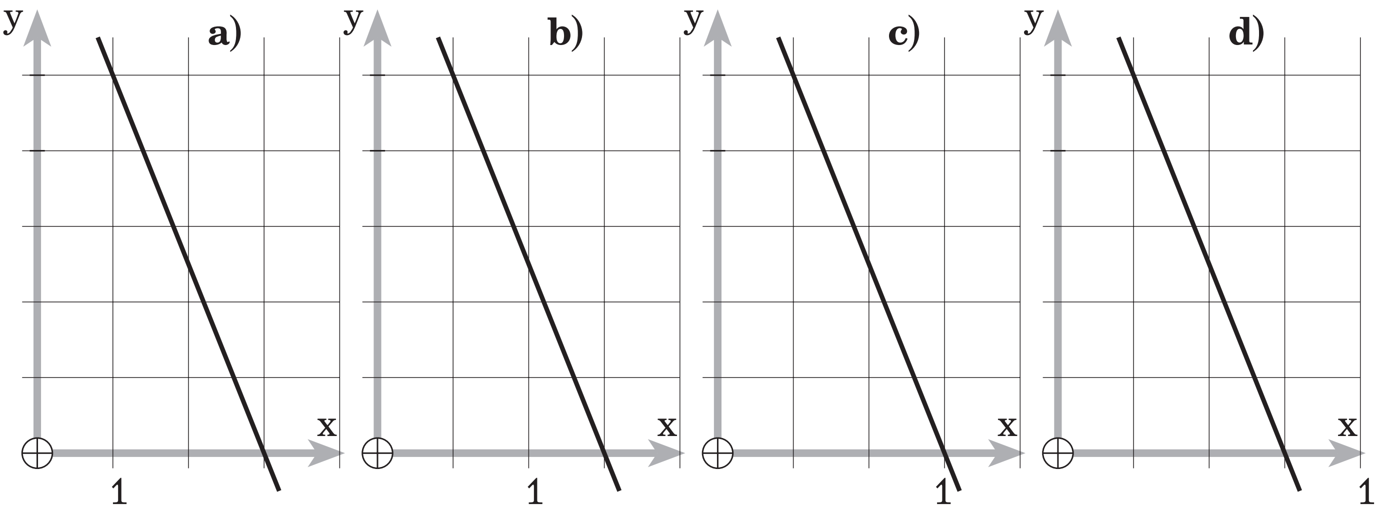
a) $f(x) = \frac{1}{3}x + 2$ und $g(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$

b) $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{13}{2}$ und $g(x) = 2x - 6$

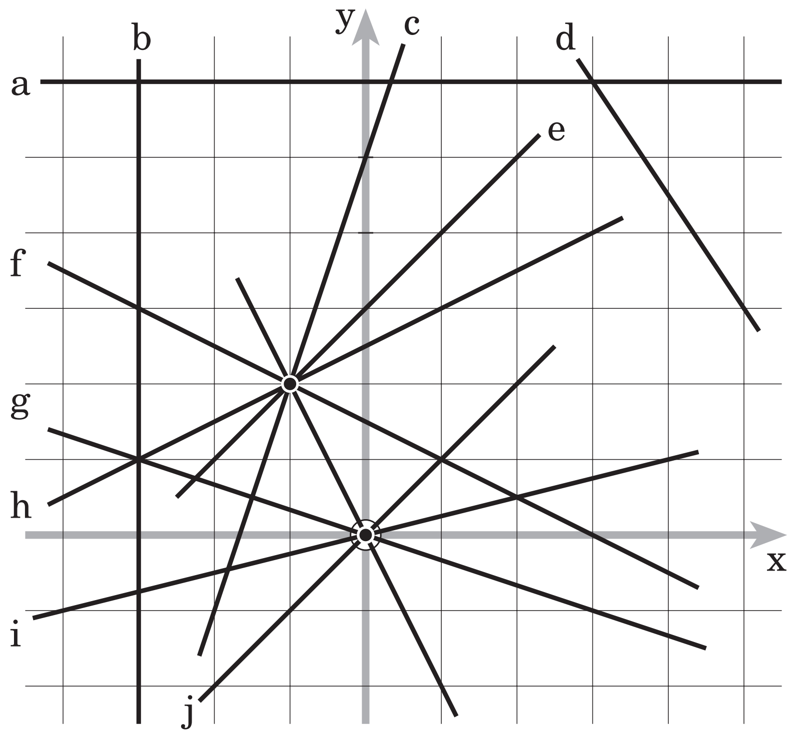
c) f: $8x = 13y$ und g: $8y = 5x - 1$

d) f: $8y + 13x = 88$ und g: $42y = 26x + 85$

5 Die 4 Geraden gehen durch Gitterpunkte mit ganzzahligen Koordinaten. Stelle Gleichungen der Geraden auf.
Die Gittergeraden sind gleichabständig.



6 Die Geraden a bis k gehen durch Gitterpunkte mit ganzzahligen Koordinaten. Die Gittergeraden haben den Abstand 1.



a) Stelle Gleichungen der Geraden auf.

b) Welche Geraden sind parallel, welche stehen senkrecht ?

c) Berechne die Schnittpunkte und Schnittwinkel von
b und c
c und d
f und g
h und i
d und k

7 Bestimme eine Gleichung der Gerade f, die durch P(3|4) geht und

a) parallel ist zur x-Achse

b) parallel ist zur y-Achse

c) parallel ist zur Winkelhalbierenden des 2. und 4. Quadranten

d) parallel ist zur Gerade g: $y = \frac{2}{3}x - 19$

e) senkrecht ist zur Gerade h: $y = -\frac{3}{4}x$

f) die y-Achse unter 60° schneidet

g) die Gerade i: $4y = 3x - 12$ auf der x-Achse schneidet

h) die Gerade i: $4y = 3x - 12$ auf der y-Achse schneidet

•i) die Gerade j: $y = -5x + 6$ unter 45° schneidet

8 Welcher Punkt der Gerade g: $2y + 3x + 13 = 0$ liegt
a) dem Ursprung **b)** P(1|5) am nächsten ?

9 Bestimme die maximale Definitionsmenge und zeichne den Graphen

a) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ **b)** $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x+2}$ **c)** $f(x) = \dfrac{x^3-4x}{x^2-2x}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2+6x+9}{-x-3}$ **e)** $f(x) = \dfrac{8x-x^2-12}{2x-4}$ **f)** $f(x) = \dfrac{4x^3-24x^2+36x}{6x^2-18x}$

10 Bestimme die maximale Definitionsmenge und zeichne den Graphen

a) $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{x}{x} - \dfrac{x-2}{2-x}$ **b)** $f(x) = 1 + x + \frac{x}{x} + \dfrac{x^2+2x+1}{x+1}$

11 Bestimme die maximale Definitionsmenge und zeichne den Graphen

a) $f(x) = \dfrac{x \cdot \sin x}{\sin x}$ **b)** $f(x) = x + \dfrac{\cos x}{\cos x}$

•12 Zeichne die Punktmenge, für die gilt
a) $x^2 - y^2 = 0$ **b)** $x^2 - y^2 \leqq 0$

:13 Zeichne die Punktmenge, für die gilt
a) $x^2 + y^2 - 2xy = 1$ **b)** $x^2 + y^2 - 2xy \leqq 1$

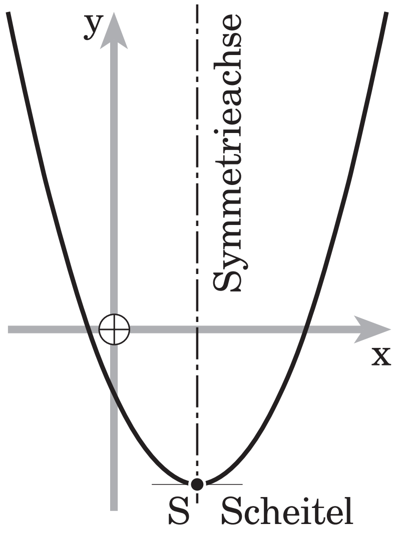
3. Quadratische Funktion

3.1 Definition und Graph

Enthält der Funktionsterm x in der 2. Potenz, aber in keiner höheren, so heißen Term und Funktion quadratisch, zum Beispiel $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$.

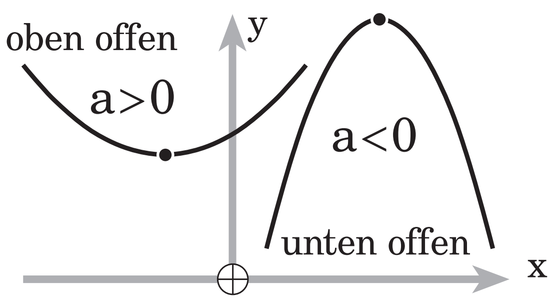
> Definition: Eine Funktion f mit $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ heißt **quadratische** Funktion.

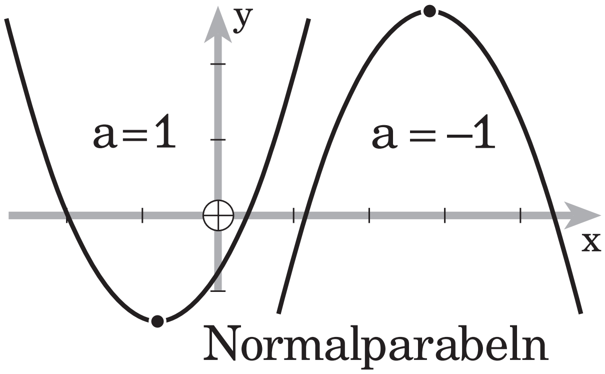
Die maximale Definitionsmenge einer quadratischen Funktion ist $\mathbb{R}$. Sie kann aber auch auf Teilmengen von $\mathbb{R}$ beschränkt sein. Ist die Definitionsmenge $\mathbb{R}$, dann ist der Graph eine **Parabel**.
Die Parabel ist achsensymmetrisch; sie schneidet ihre Achse im **Scheitel**. Der Scheitel ist der wichtigste Parabelpunkt. Wenn man eine Parabel zeichnet, dann setzt man gewöhnlich im Scheitel an.

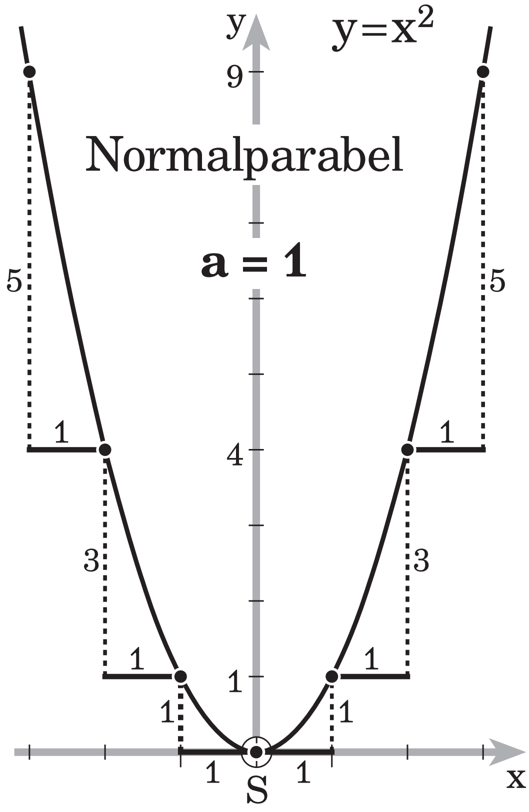


Einfluss der Koeffizienten a, b und c auf Lage und Form der Parabel

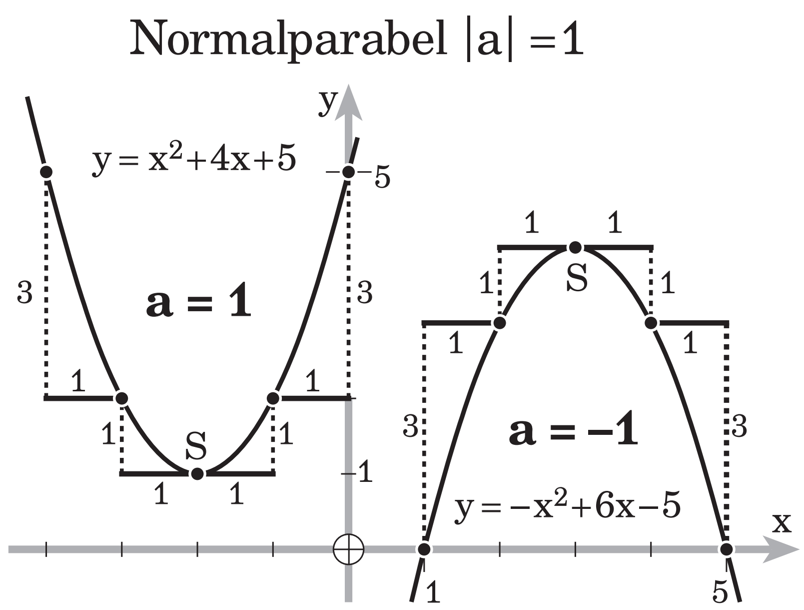
Der wichtigste Koeffizient ist der bei x^2.
Er bestimmt die Öffnung der Parabel.
Für $a > 0$ ist die Parabel oben offen,
für $a < 0$ ist die Parabel unten offen.
Für $|a| = 1$ heißt die Parabel **Normalparabel**.



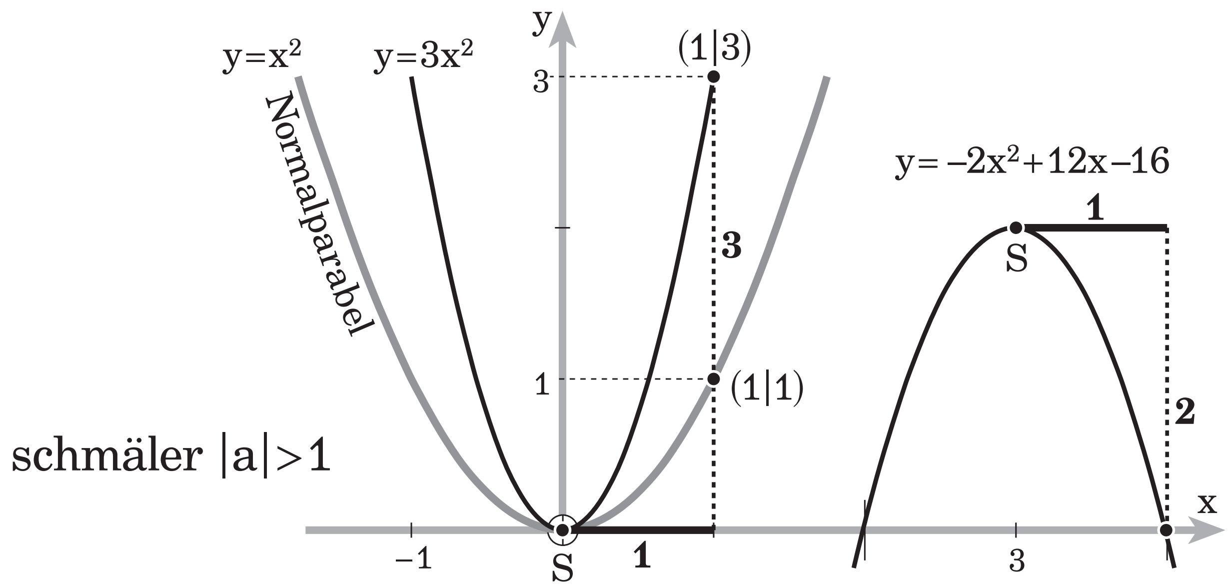


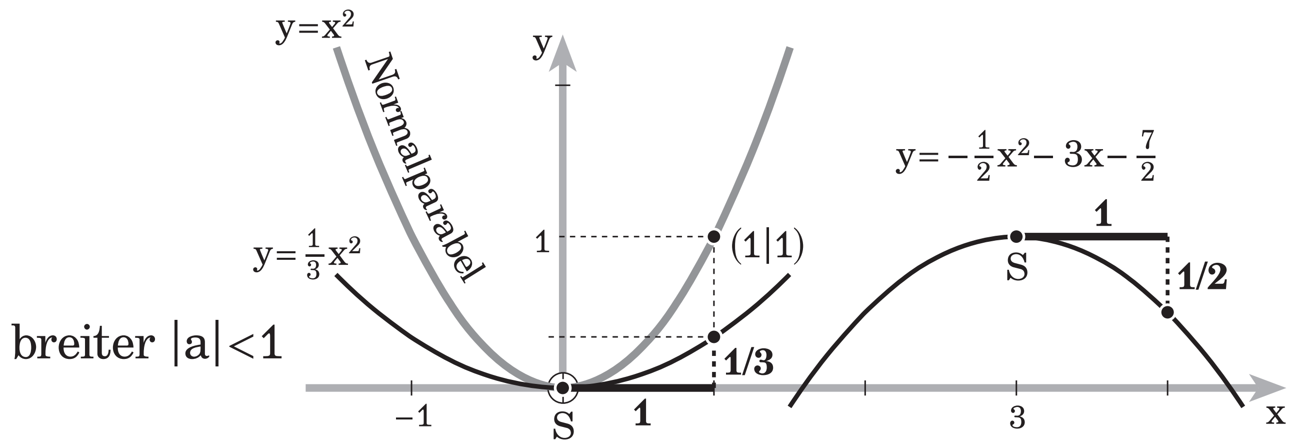


Zeichne den Scheitel.
Gehe 1 Einheit nach rechts und 1 Einheit nach oben, wenn a = 1, sonst nach unten, und zeichne den zweitwichtigsten Punkt der Parabel.
Setze das Spiel fort wie in der Zeichnung beschrieben.



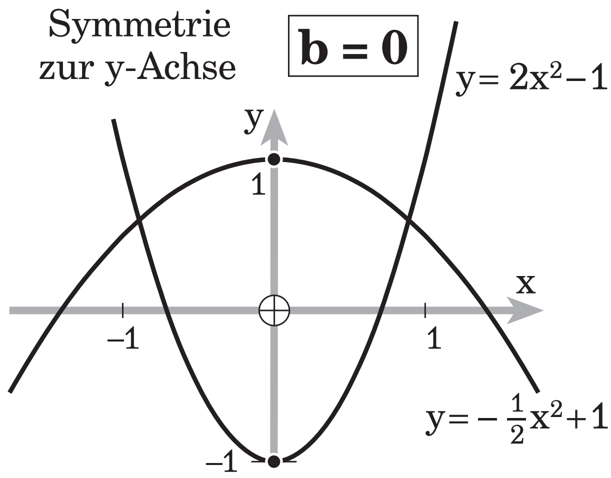
Für |a|> 1 ist die Parabel schmäler als die Normalparabel,
für |a|< 1 ist sie breiter.





Die Koeffizienten b und c beeinflussen nur die Lage des Scheitels.
Für $b = 0$ liegt der Scheitel $S(0|c)$ auf der y-Achse, die y-Achse ist Symmetrieachse der Parabel.

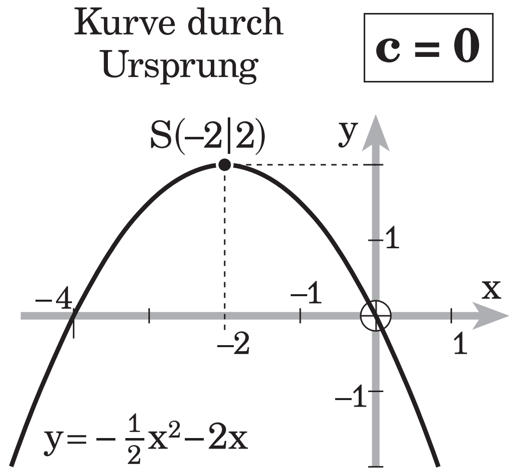
c ist der y-Achsenabschnitt, $(0|c)$ ist der Parabelpunkt, der auf der y-Achse liegt.



Für $c = 0$ lässt sich der Term faktorisieren:
$f(x) = ax^2 + bx = x(ax + b)$
Man liest die Nullstellen ab:
$x_1 = 0$ und $x_2 = -\frac{b}{a}$
Die Parabel geht durch den Ursprung.
Die Scheitelstelle liegt in der Mitte der beiden

Nullstellen: $x_s = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$

$y_s = f(x_s) = -\frac{b^2}{4a}$



Scheitelbestimmung mit Nullstellen oder quadratischer Ergänzung:

Beispiel: $f(x) = -x^2 - 2x + 3$

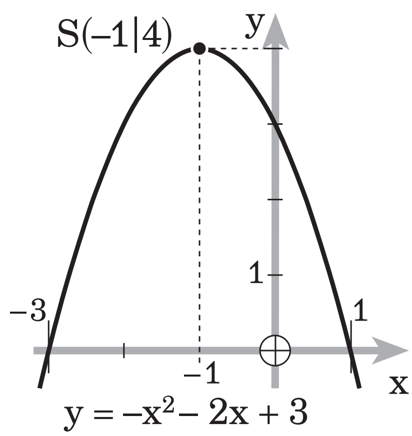
$f(x) = 0$: $x^2 + 2x - 3 = 0$

Diskriminante: $2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16$

Nullstellen: $x = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = -1 \pm 2$

$x = -3$ oder $x = 1$

Scheitel: $x_s = \frac{-3+1}{2} = -1$; $y_s = f(-1) = 4$



Bei ganzzahligen Nullstellen lässt sich der Funktionsterm nach VIETA faktorisieren:
$f(x) = -(x+3)(x-1)$. Die Nullstellen 1 und −3 liest man direkt ab.

Quadratische Ergänzung
$f(x) = -x^2 - 2x + 3 = -(x^2 + 2x - 3) = -((x^2 + 2x + 1^2) - 1^2 - 3)$
$f(x) = -(x + 1)^2 + 4$
Die allgemeine Parabelgleichung $y = ax^2 + bx + c$ wird durch quadratische Ergänzung zur Scheitelgleichung $y = a(x-x_s)^2 + y_s$.
Aus ihr liest man den Scheitel S ab, hier im Beispiel $S(-1|4)$.

Aufgaben

◊1 Bestimme Nullstellen (falls vorhanden) und Scheitel und zeichne die Parabeln.

a) $y = x^2 + 1$ **b)** $y = x^2 - 1$ **c)** $y = -x^2 + 1$ **d)** $y = -x^2 - 1$

e) $y = x^2 - 2$ **f)** $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3$ **g)** $y = -2x^2 + 4$ **h)** $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$

◊2 Faktorisiere den Term, bestimme Nullstellen und Scheitel und zeichne die Parabeln.

a) $y = x^2 + 4x$ **b)** $y = 4x - x^2$ **c)** $y = 3x^2 + 6x$ **d)** $y = -\frac{1}{4}x^2 - x$

◊3 Faktorisiere den Term, bestimme Nullstellen und Scheitel und zeichne die Parabeln.

a) $y = x^2 + 4x + 4$ **b)** $y = -x^2 - 4x - 3$ **c)** $y = -2x^2 + 6x - 4$

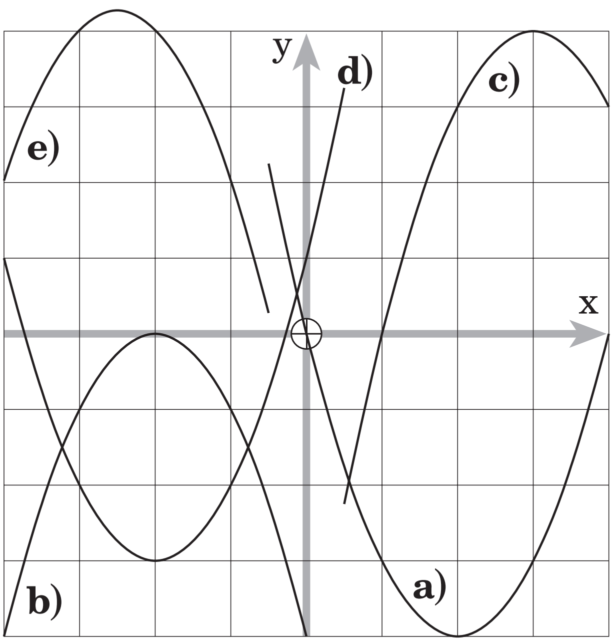
d) $y = \frac{1}{4}x^2 - x + \frac{3}{4}$ **e)** $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$ **f)** $y = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}$

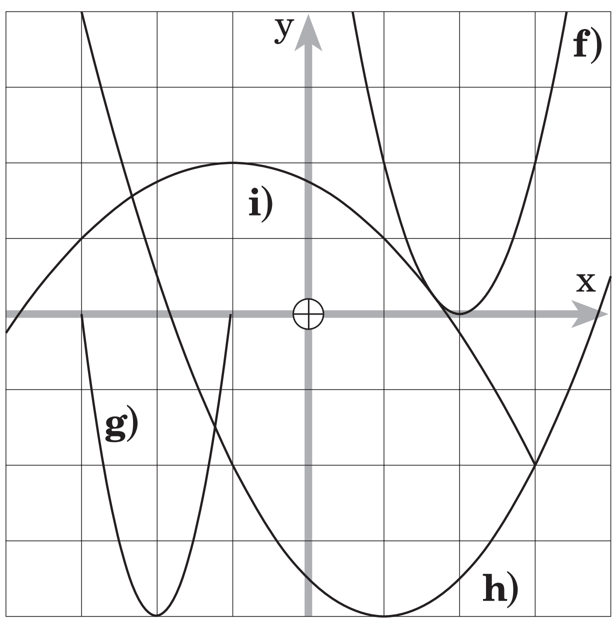
◊4 Bestimme Nullstellen (falls vorhanden) und Scheitel und zeichne die Parabeln.

a) $y = x^2 - 2x - 3$ **b)** $y = 2x^2 - 12x + 16$ **c)** $y = -3x^2 + 6x + 1$

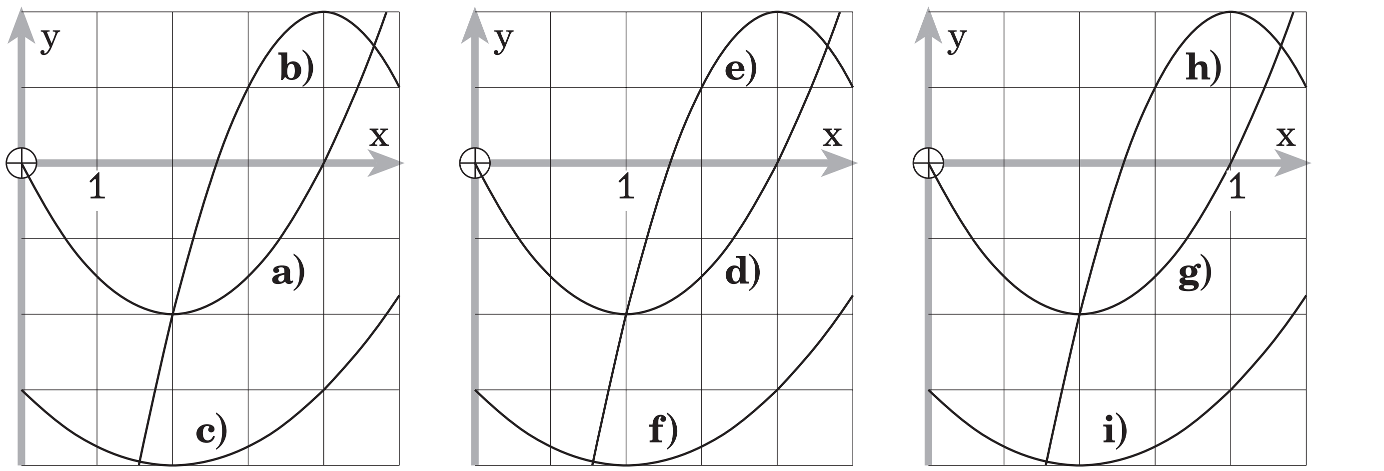
d) $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ **e)** $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x - 3$ **f)** $y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{35}{12}$

5 Parabeln gehen durch Gitterpunkte mit ganzzahligen Koordinaten. Bestimme ihre Gleichungen. Die Gittergeraden haben den Abstand 1.





6 Parabeln gehen durch Gitterpunkte mit ganzzahligen Koordinaten. Bestimme ihre Gleichungen. Die Gittergeraden sind gleichabständig.



7 Parabel durch 3 Punkte P, Q und R
Bestimme Gleichung, Scheitel und Nullstellen der Parabel.

a) $P(-2|-3)$ $Q(-6|5)$ $R(-1|0)$ **b)** $P(2|0{,}75)$ $Q(1|1)$ $R(-3|-3)$

c) Wie müssen P, Q und R liegen, wenn sie eine Parabelgleichung der Form $y = ax^2 + bx + c$ festlegen ?

8 x_1 und x_2 seien die Nullstellen einer Parabel mit Scheitel $(x_s|y_s)$.
Bestimme die Parabelgleichung.

a) $x_1 = -3$, $x_2 = -5$, $y_s = -2$ **b)** $x_1 = 2$, $x_s = 3$, $y_s = 3$

•9 Welche Parabel geht durch

a) $N_1(-1|0)$, $N_2(3|0)$, $P(2|1)$ **b)** $N_1(-1|0)$, $N_2(3|0)$, $P(4|1)$

10 Scheitelstelle anders finden
Man formt den Parabelterm um:
$ax^2 + bx + c = ax(x + \frac{b}{a}) + c$ und vergleicht die rechte Seite mit dem Term $ax(x + \frac{b}{a})$. Dieser beschreibt eine Parabel durch den Ursprung; sie entsteht aus der Ausgangsparabel durch Verschiebung in y-Richtung. Beide Scheitel haben also dieselbe Scheitelstelle x_s. Man findet x_s recht einfach aus den Nullstellen von $ax(x + \frac{b}{a})$.
Bestimme so die Scheitel von Parabeln mit den Funktionstermen

a) $x^2 + 2x - 1$ **b)** $x^2 - 5x + 4$ **c)** $-x^2 + 4x + 96$ **d)** $-\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{5}{2}$

◊11 Skizziere die Parabel und lies im Bild die x-Werte ab, für die gilt

a) $x^2+2x-3 \geqq 0$ **b)** $x^2-2x-3 < 0$ **c)** $-2x^2+8x-6 \geqq 0$

d) $-x^2-4x-3 < 0$ **e)** $\frac{1}{2}x^2-x+1 \geqq 0$ **f)** $-x^2-4x-4 \geqq 0$

12 Kennzeichne die Menge der Punkte $(x|y)$, für die gilt

a) $y \geqq x^2 - 5x + 4$ **b)** $y \leqq x^2 - 1$ **c)** $x^2-4x \leqq y \leqq -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{5}{2}$

3.2 Schnittpunkte

Hier geht es um die Schnittpunkte von Gerade-Parabel und Parabel-Parabel. Ihre x-Werte, die Schnittstellen, findet man durch Gleichsetzen der Funktionsterme und Auflösen nach x.

Gerade-Parabel

Gleichsetzen der Funktionsterme $ax^2 + bx + c = mx + t$

$$ax^2 + (b - m)x + (c - t) = 0$$

Das ist die Bestimmungsgleichung für die Schnittstellen. Weil sie quadratisch ist, hat sie abhängig vom Vorzeichen ihrer Diskriminante D 2 Lösungen, eine oder keine Lösung.

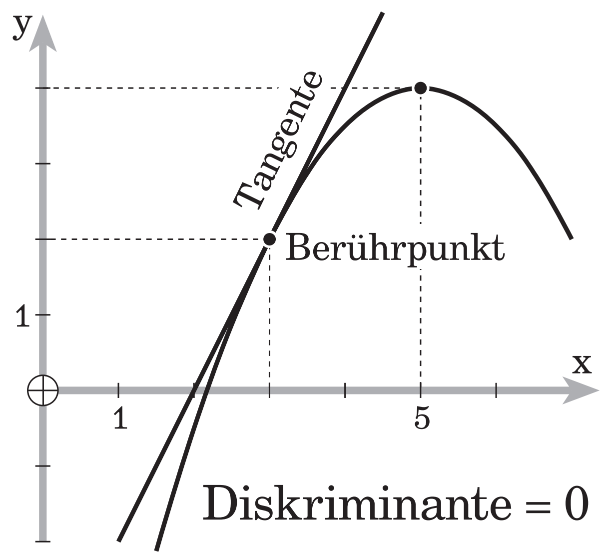
Wir schneiden die Parabel: $p(x) = -\frac{1}{2}(x-5)^2 + 4$

mit Parallelen der Steigung 2: $g_t(x) = 2x + t$

Gleichsetzen: $-\frac{1}{2}x^2 + 5x - \frac{17}{2} = 2x + t$ führt zu $x^2 - 6x + (17 + 2t) = 0$

Diskriminante $D = 36 - 4(17 + 2t) = -8(t + 4)$

Fall: D = 0 $\Rightarrow$ $t = -4$, genau eine (Doppel-)Lösung



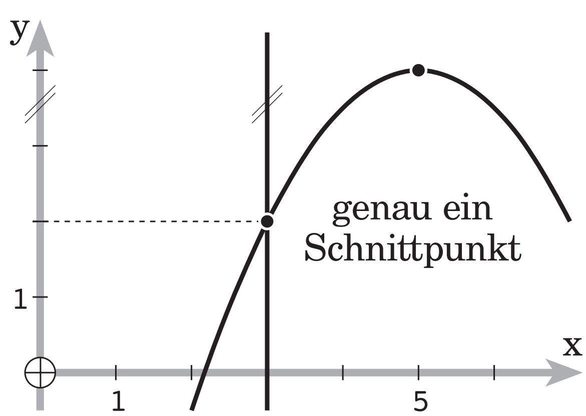
Gerade $g_{-4}(x) = 2x - 4$

Schnittstelle $x = \frac{6 \pm 0}{2} = 3$

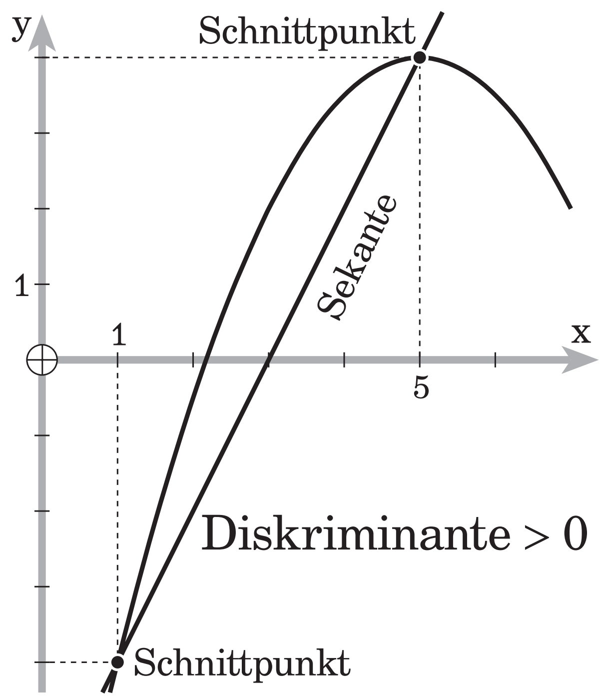
Ordinate $y = g_{-4}(3) = 2$

Gerade und Parabel haben genau den einen Schnittpunkt (3|2) gemeinsam. Weil seine Abszisse (Doppel-)Lösung einer quadratischen Gleichung ist (D = 0), heißt er doppelter Schnittpunkt. Einen doppelten Schnittpunkt nennt man auch **Berührpunkt** und die zugehörige Gerade **Tangente** (tangere = berühren).

Auch die Gerade mit der Gleichung x = 3 schneidet die Parabel genau einmal. Der Schnittpunkt ergibt sich durch bloßes Einsetzen von x = 3 in $y = -\frac{1}{2}(x-5)^2 + 4$ zu (3|2). Sein x-Wert ist jetzt nicht Doppellösung einer quadratischen Gleichung, (3|2) ist somit kein doppelter Schnittpunkt, also kein Berührpunkt. Und die Gerade ist deshalb keine Tangente, wie ein Blick aufs Bild bestätigt.



Fall: D > 0 ⇔ $t < -4$, 2 (einfache) Lösungen



Beispielgerade $g_{-6}(x) = 2x - 6$

Diskriminante $D = 16$

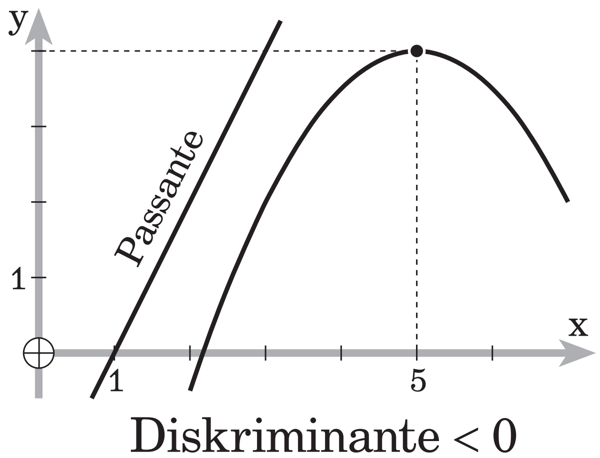
Schnittstellen $x = \frac{6 \pm 4}{2}$

$x_1 = 1,\ y_1 = g_{-6}(1) = -4$

$x_2 = 5,\ y_2 = g_{-6}(5) = 4$

Gerade und Parabel haben die einfachen Schnittpunkte $(1|-4)$ und $(5|4)$. Eine Gerade, die mit einer Kurve mindestens einen Schnittpunkt gemeinsam hat, der einfach ist, heißt **Sekante** der Kurve. (secare = schneiden)

Fall: D < 0 ⟺ $t > -4$, keine Lösung



Beispielgerade $g_{-2}(x) = 2x - 2$

Diskriminante $D = -16$

Es gibt keine Schnittstelle, Gerade und Parabel schneiden sich nicht.

Eine solche Gerade heißt **Passante** der Kurve.

(passer = vorbeigehen)

Parabel-Parabel

Gleichsetzen der Funktionsterme $\quad ax^2 + bx + c = Ax^2 + Bx + C$

$$(a - A)x^2 + (b - B)x + (c - C) = 0$$

Die Bestimmungsgleichung für die Schnittstellen ist für $a \neq A$ wieder quadratisch; sie hat je nach Vorzeichen ihrer Diskriminante 2 Lösungen, 1 oder keine Lösung.

Wir schneiden die Parabel: $\quad p(x) = -\frac{1}{2}(x-5)^2 + 4$

mit Parabeln $\quad q_c(x) = \frac{1}{4}x^2 - x + c$

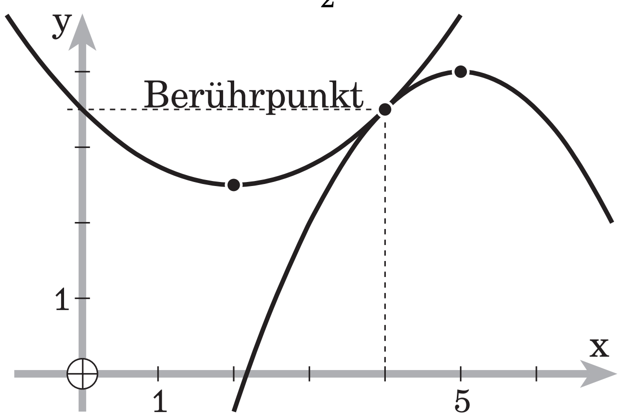
Gleichsetzen: $\quad -\frac{1}{2}x^2 + 5x - \frac{17}{2} = \frac{1}{4}x^2 - x + c \,\| \cdot (-4)$

$$2x^2 - 20x + 34 = -x^2 + 4x - 4c$$

$$3x^2 - 24x + (34 + 4c) = 0$$

Diskriminante $D = 576 - 12(34 + 4c) = 24(7 - 2c)$

Fall: D = 0 $\Leftrightarrow c = \frac{7}{2}$, genau eine (Doppel-)Lösung



Diskriminante = 0

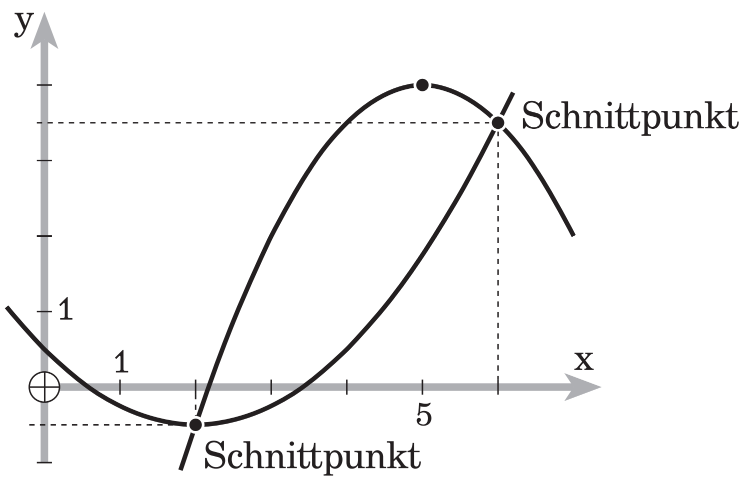
Parabel $\quad q_{7/2}(x) = \frac{1}{4}x^2 - x + \frac{7}{2}$

Schnittstelle $\quad x = \frac{24 \pm 0}{6} = 4$

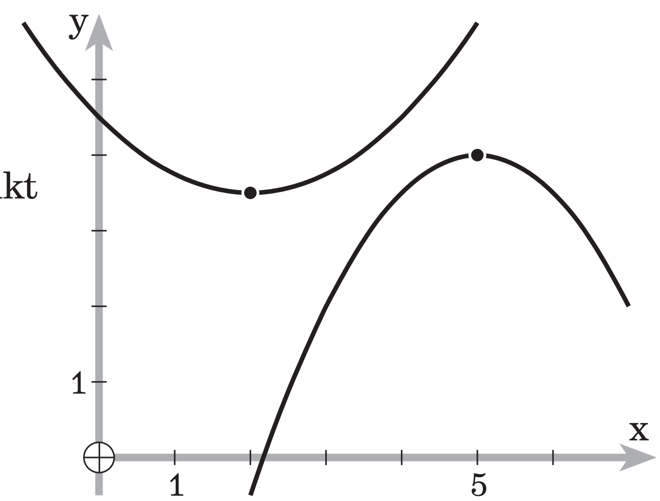
Ordinate $\quad y = p(4) = \frac{7}{2}$

Die beiden Parabeln haben genau den einen Punkt $(4|\frac{7}{2})$ gemeinsam. Weil er aus einer (Doppel-)Lösung entsteht, heißt er doppelter Schnittpunkt oder Berührpunkt; die Parabeln berühren sich.

Fall: D > 0 $\Leftrightarrow c < \frac{7}{2}$, 2 (einfache) Lösungen. Für $c = \frac{1}{2}$ ist $D = 144 > 0$, die Parabeln schneiden sich in $(2|-\frac{1}{2})$ und $(6|\frac{7}{2})$.



Diskriminante > 0



Diskriminante < 0

Fall: D < 0 $\Leftrightarrow$ $c > \frac{7}{2}$, keine Lösung.

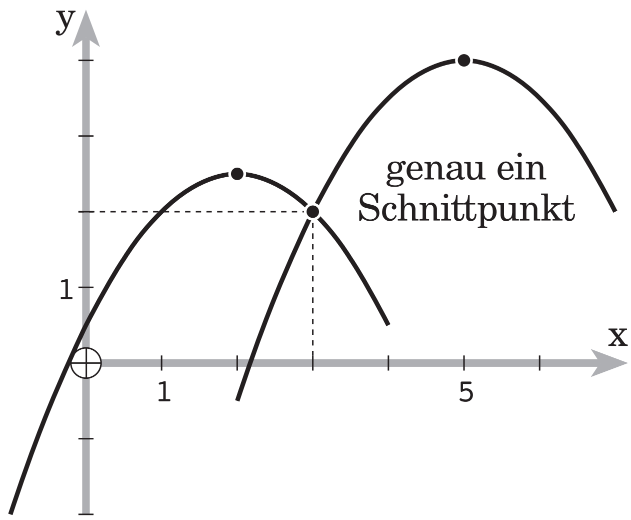
Für $c = \frac{9}{2}$ ist $D = -48 < 0$, die Parabeln treffen sich nicht.

2 Parabeln können auch einen einzigen einfachen Schnittpunkt haben.
Ihre Koeffizienten bei x^2 müssen dann gleich sein a = A, zum Beispiel

$$p(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 5x - \frac{17}{2}$$

$$q(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{1}{2}$$

Gleichsetzen der Terme führt zu einer linearen Bestimmungsgleichung der Schnittstellen. Es ergibt sich der einfache Schnittpunkt (3|2).



Aufgaben

◊**1** Gegeben ist eine Gerade G_g und eine Parabel G_p. Untersuche die Lage von G_g und G_p, bestimme gegebenenfalls die gemeinsamen Punkte.

a) $g(x) = x - 4,\ p(x) = x^2 - 4x$
b) $g(x) = -\frac{1}{2}x + 3,\ p(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + 4$
c) $G_g\colon\ y = -4,\ G_p\colon\ y = x^2 + 2x - 3$
d) $g(x) = -x + 3,\quad p(x) = -\frac{1}{4}x^2 - x + 3$
e) $G_g\colon\ x = 3,\quad G_p\colon\ y = \frac{1}{2}x^2 - 2x$
f) $g(x) = 2x + 7,\quad p(x) = -x^2 + 2x + 3$
g) $G_g\colon\ y = -3,\ G_p\colon\ y = \frac{1}{2}x^2 + 2x$
h) $g(x) = x - 4,\quad p(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3$

2 Eine Parallele G_g zur Winkelhalbierenden des 1. Quadranten geht durch den Scheitel der Parabel $G_p\colon\ y = \frac{1}{4}x^2 - x$.
Berechne die Schnittpunkte beider Kurven.

3 $g_t(x) = 2x + t,\quad p(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - 4$

a) Zu jedem Wert von t gehört eine Gerade.
Worin gleichen sich diese Geraden ?

b) Bestimme t so, dass die Gerade die Parabel berührt. (Zeichnung!)

c) Bestimme t so, dass die Gerade die Parabel zweimal schneidet.

d) Bestimme t so, dass die Gerade durch den Parabelscheitel geht.

e) Bestimme t so, dass die Gerade Passante der Parabel ist.

•4 $g_m(x) = m(x + 5) + 3$, $p(x) = -\frac{1}{4}x^2 - 2x - 3$.

a) Zu jedem Wert von m gehört eine Gerade.
Was kennzeichnet diese Geraden ?

Für welche Werte von m:

b) berühren sich Gerade und Parabel ?

c) schneiden sich Gerade und Parabel ?

d) haben Gerade und Parabel keinen Punkt gemeinsam ?

•5 $g_m(x) = m(x - 5) + 4$, $p(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2}$. Für welche Werte von m:

a) berühren sich Gerade und Parabel ?

b) schneiden sich Gerade und Parabel ?

c) haben Gerade und Parabel keinen Punkt gemeinsam ?

•6 $g_m(x) = m(x - 3) + 2$, $p(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - \frac{7}{2}$.
Zeige: Für jedes m ist G_{g_m} eine Sekante der Parabel G_p.

•7 Gegeben sind die Parabeln G_p und G_q. Untersuche die Lage von G_p und G_q, bestimme gegebenenfalls die gemeinsamen Punkte.

a) $p(x) = -\frac{1}{4}x(x + 8)$ $q(x) = (x - 1)^2 - 6$

b) $p(x) = \frac{1}{4}x^2 - x - 3$ $q(x) = x^2 - x - 6$

c) $p(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$ $q(x) = x^2 + 4x + 3$

d) $p(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 3x$ $q(x) = x^2 + 1{,}5$

e) $p(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 2$ $q(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6$

f) $p(x) = -\frac{1}{2}(x - 3)^2 + 2$ $q(x) = (x + 1)^2 - 3$

g) $p(x) = \frac{1}{2}(x - 4)^2 + 1$ $q(x) = \frac{1}{4}x(x - 4)$

h) $p(x) = (x-9)^2 - 16$ $\qquad$ $q(x) = (x-5)(x-13)$

•8 $p_a(x) = ax^2, \quad q(x) = x^2 - 10x + 20$

a) Zu jedem Wert von a gehört eine Parabel.
Was kennzeichnet diese Parabeln?

Für welche Werte von a haben G_{p_a} und G_q

b) einen doppelten Schnittpunkt (=Berührpunkt) ?

c) 2 einfache Schnittpunkte ?

d) genau einen einfachen Schnittpunkt ?

e) keinen gemeinsamen Punkt ?

•9 $p_k(x) = (x-k)^2, \quad q(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 5$

a) Zu jedem Wert von k gehört eine Parabel.
Was kennzeichnet diese Parabeln?

Für welche Werte von k haben G_{p_k} und G_q

b) einen doppelten Schnittpunkt (=Berührpunkt) ?

c) 2 einfache Schnittpunkte ?

d) keinen gemeinsamen Punkt ?

10 Kennzeichne die Menge der Punkte $(x|y)$, für die gilt

a) $\frac{1}{2}x + 2 \leqq y \leqq -\frac{1}{2}x^2 - x + 4$ $\qquad$ **b)** $\frac{1}{2}x^2 - x - 4 \leqq y \leqq -\frac{1}{2}x^2 + 5x - 12$

4. Umkehrfunktion und Wurzelfunktion

4.1 Umkehrfunktion

Eine Funktion f ordnet jedem Wert x (Urbild) der Definitionsmenge D_f genau einen Wert y (Bild) der Wertemenge W_f zu. Dabei kann es vorkommen, dass verschiedene x-Werte zum selben Bild y führen.

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2 + 2$ mit $D_f = \mathbb{R}$ und $W_f = [2\,;+\infty[$

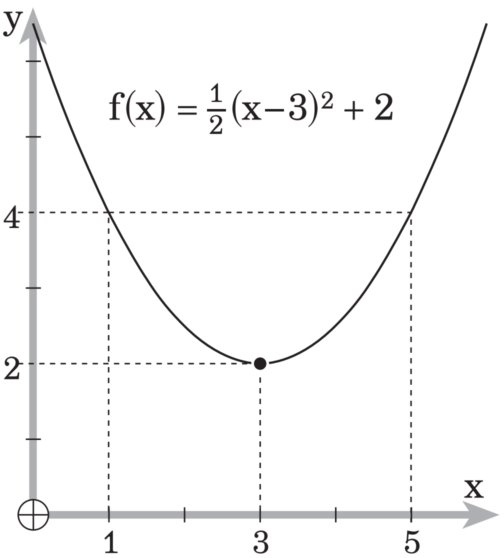
x = 1 hat das Bild f(1) = 4. Suchen wir umgekehrt die Urbilder von 4, dann lösen wir die Gleichung

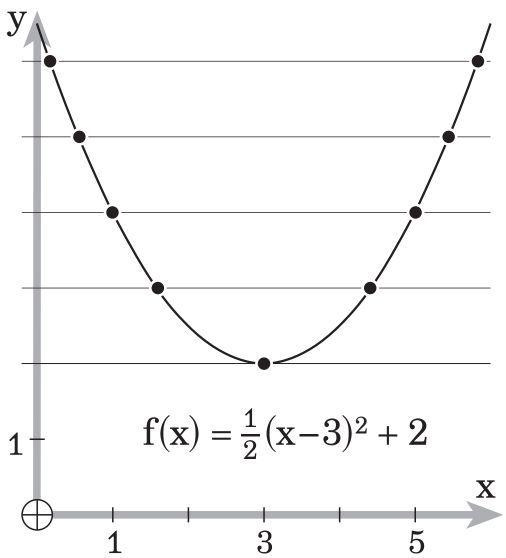
$$\frac{1}{2}(x-3)^2 + 2 = 4$$

$$(x-3)^2 = 4$$

$$|x-3| = 2 \;\Rightarrow\; x = 1 \text{ oder } x = 5$$

y = 4 hat also die beiden Urbilder x = 1 und x = 5. Es kann auch anders kommen: y = 2 hat nur das eine Urbild x = 3. In der Zeichnung äußert sich das darin, dass eine Parallele zur x-Achse den Graphen zweimal oder einmal trifft.





Es gibt aber auch Funktionen, bei denen jedes Bild y genau ein Urbild x hat.

Beispiel: $g(x) = -\frac{3}{2}x + 6$ mit $D_g = \mathbb{R}$ und $W_g = \mathbb{R}$

x = 2 hat das Bild g(2) = 3. Suchen wir umgekehrt die Urbilder von 3, dann lösen wir die Gleichung

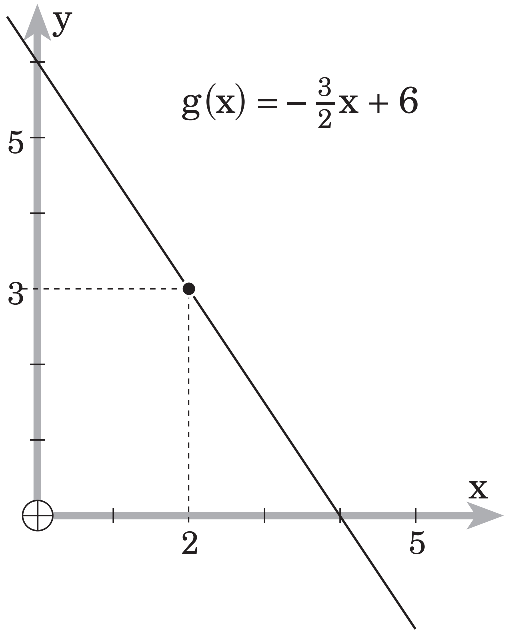
$$-\frac{3}{2}x + 6 = 3 \;\Rightarrow\; -\frac{3}{2}x = -3 \Rightarrow x = 2$$

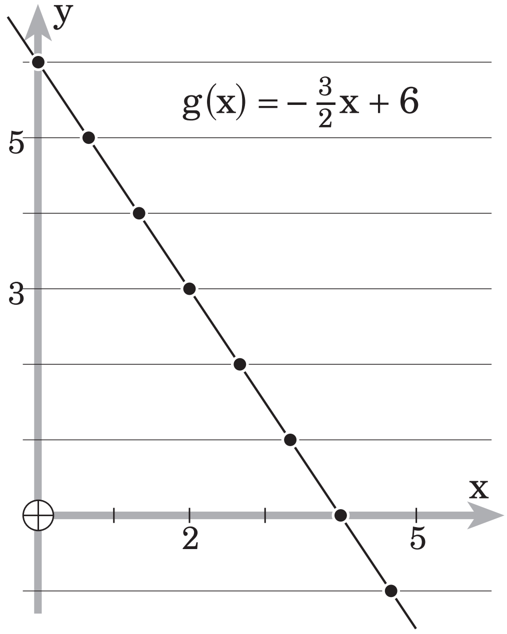
y = 3 hat also nur das eine Urbild x = 2.

Jedes Bild y_0 der Funktion g hat nur ein Urbild x_0

$-\frac{3}{2}x_0 + 6 = y_0 \Rightarrow x_0 = -\frac{2}{3}y_0 + 4$

In der Zeichnung äußert sich das darin, dass eine Parallele zur x-Achse den Graphen genau einmal trifft.



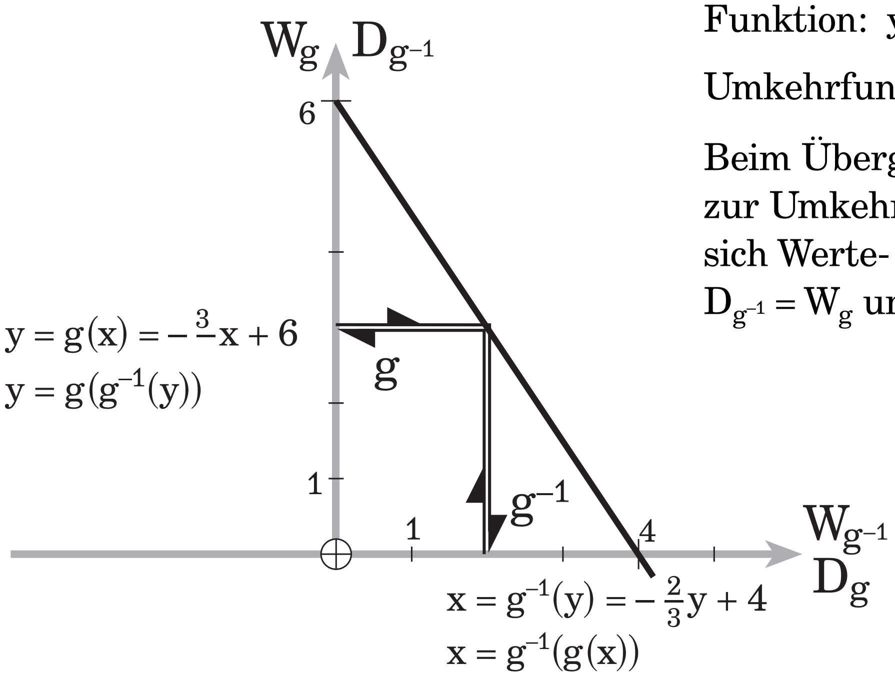


Beim Vergleich der Beispiele stellt man fest, dass der Rückschluss vom Bild aufs Urbild bei manchen Funktionen immer eindeutig ist (Beispiel g), bei anderen Funktionen für einzelne y-Werte auch mehrdeutig sein kann (Beispiel f). Die Eindeutigkeit einer Funktion ist ein entscheidendes Merkmal; deshalb ist bei einer Funktion wie g auch die umgekehrte Zuordnung y€x eine Funktion. Diese Funktion heißt Umkehrfunktion von g; man schreibt sie als g^{-1}.

Für g im Beispiel gilt
Funktion: $y = g(x) = -\frac{3}{2}x + 6$

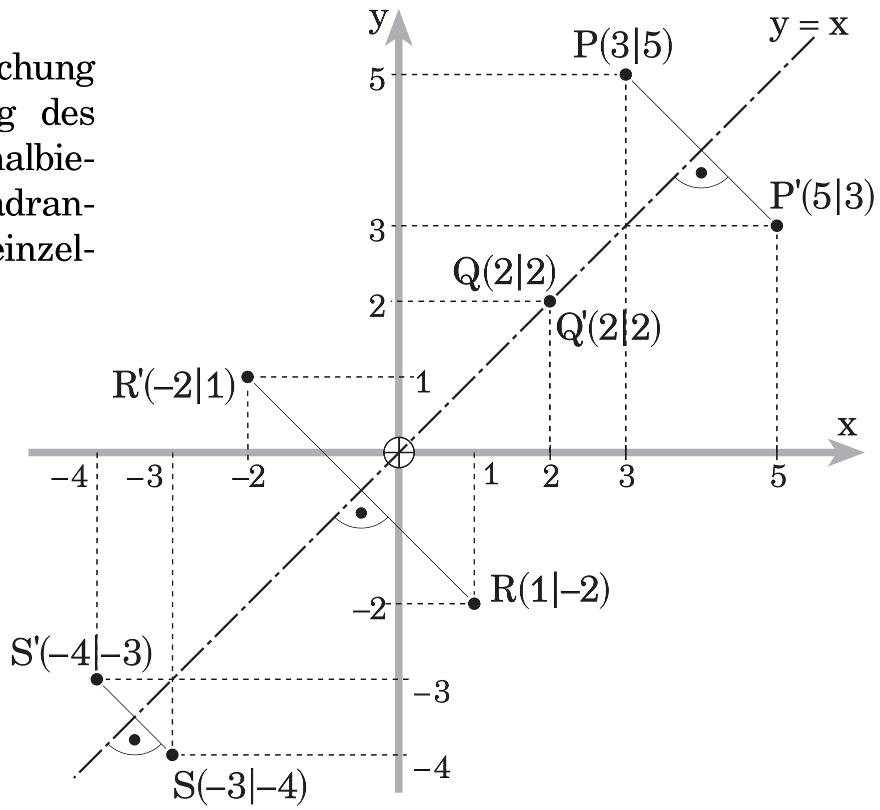
Umkehrfunktion: $x = g^{-1}(y) = -\frac{2}{3}y + 4$

Beim Übergang von der Funktion g zur Umkehrfunktion g^{-1} vertauschen sich Werte- und Definitionsmenge:
$D_{g^{-1}} = W_g$ und $W_{g^{-1}} = D_g$.

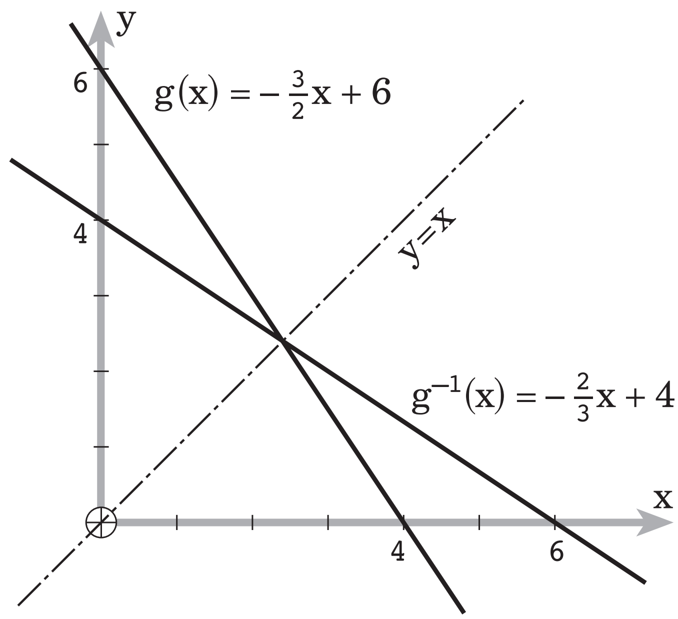


Da man auch bei der Umkehrfunktion die unabhängige Variable meist x nennt, vertauscht man in der Zeile $x = g^{-1}(y) = -\frac{2}{3}y + 4$ (hier ist y die unabhängige Variable) die Bezeichnungen x und y: $y = g^{-1}(x) = -\frac{2}{3}x + 4$ (hier ist x die unabhängige Variable).

Eine derartige Vertauschung bewirkt eine Spiegelung des Graphen an der Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten – wie man sich an einzelnen Punkten klarmacht.

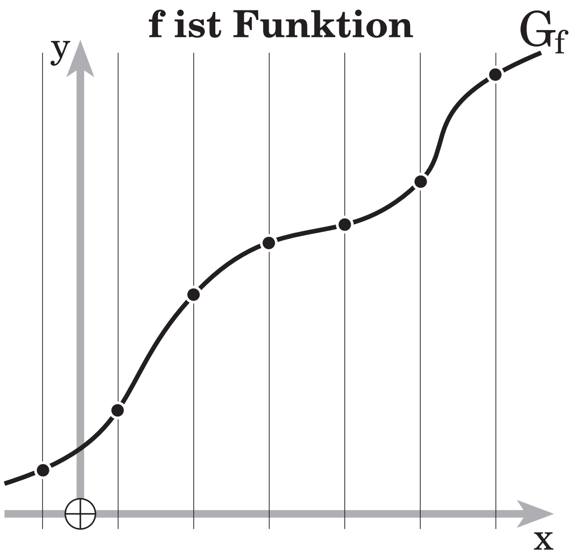


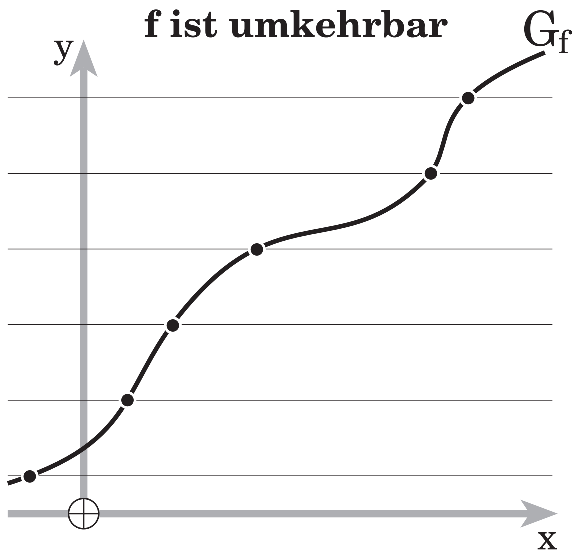
Nimmt man im Term der Funktion g und in dem der Umkehrfunktion g^{-1} jedesmal x als unabhängige Variable, dann sind die Graphen G_g und $G_{g^{-1}}$ symmetrisch zur Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten. Es gilt:
Die Schnittpunkte des Graphen G_f der Funktion f und $G_{f^{-1}}$ der Umkehrfunktion f^{-1} liegen auf der Winkelhalbierenden y = x.

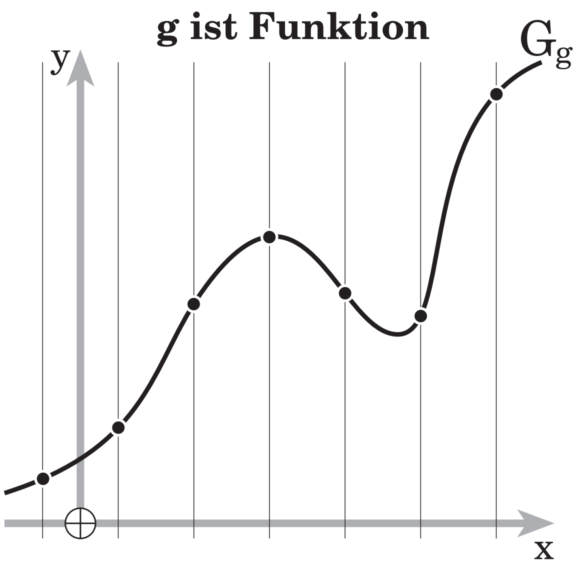


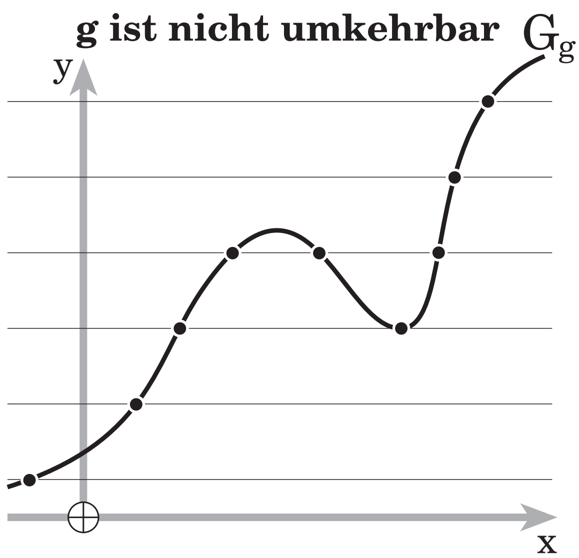
Definition: Eine Funktion f heißt **umkehrbar** oder **eineindeutig** oder **injektiv**, wenn verschiedene Urbilder x immer verschiedene Bilder y haben: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Anschaulich bedeutet das nichts anderes, als dass jede Parallele zur x-Achse den Graphen höchstens einmal schneidet.









Zusammenfassung Ist eine Funktion f umkehrbar, so bezeichnet man die Umkehrfunktion von f mit f^{-1}.

Funktion	$y = f(x)$	mit D_f und W_f
Umkehrfunktion	$x = f^{-1}(y)$	mit $D_{f^{-1}} = W_f$ und $W_{f^{-1}} = D_f$

oder nach Vertauschung der Variablen x und y

Umkehrfunktion	$y = f^{-1}(x)$	mit $D_{f^{-1}} = W_f$ und $W_{f^{-1}} = D_f$.

Es gilt

$f^{-1}(f(x)) = x$ für $x \in D_f$ und $f(f^{-1}(x)) = x$ für $x \in D_{f^{-1}}$.

Man findet den Term der Umkehrfunktion, indem man die Funktionsgleichung $y = f(x)$ nach x auflöst. Bei umkehrbaren Funktionen ist die Auflösung eindeutig, sonst nicht.

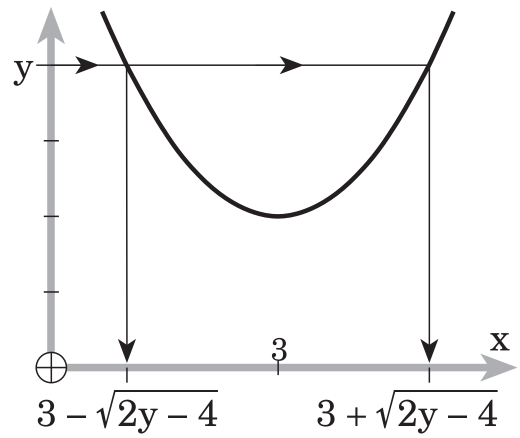
Beispiel: $y = f(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2 + 2$ mit $D_f = \mathbb{R}$ und $W_f = [2\,;+\infty[$

nach x auflösen

$(x-3)^2 = 2y - 4 \;\Rightarrow\; |x-3| = \sqrt{2y-4}$

$x = 3 + \sqrt{2y-4}$ oder $x = 3 - \sqrt{2y-4}$

Wegen dieser beiden Lösungen hat f keine Umkehrfunktion.



1 y-Wert → **2** x-Werte
f ist nicht umkehrbar

Ganz anders dagegen die Funktion h:

$y = h(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2 + 2$ mit $D_f = [3\,;+\infty[$ und $W_f = [2\,;+\infty[$

nach x auflösen $(x-3)^2 = 2y - 4 \;\Rightarrow\; |x-3| = \sqrt{2y-4}$

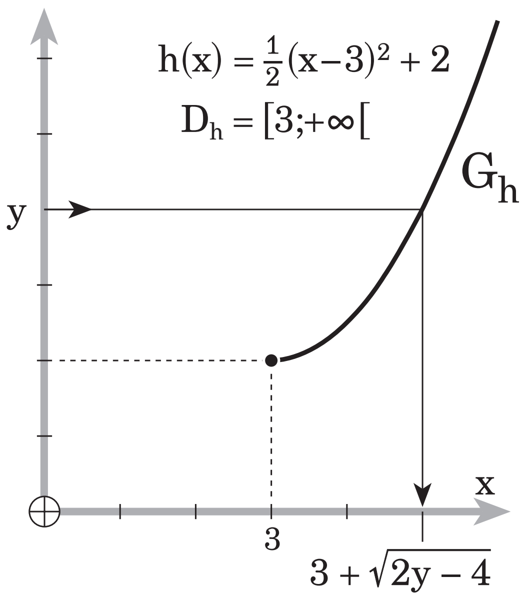
$x = 3 + \sqrt{2y-4}$ oder $x = 3 - \sqrt{2y-4}$

Wegen $x \geqq 3$ kommt nur die erste Lösung $x = 3 + \sqrt{2y-4}$ infrage, deshalb ist h umkehrbar.

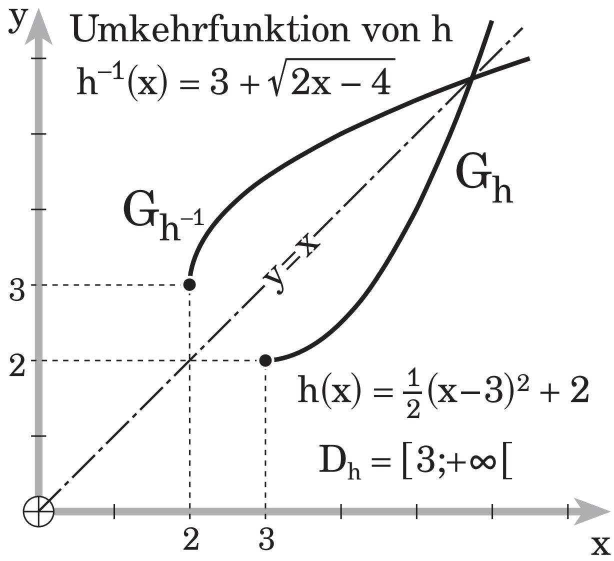
$x = h^{-1}(y) = 3 + \sqrt{2y-4}$ mit $D_{h^{-1}} = [2\,;+\infty[$ und $W_{h^{-1}} = [3\,;+\infty[$

Vertauschung von x und y:

$y = h^{-1}(x) = 3 + \sqrt{2x-4}$ mit $D_{h^{-1}} = [2\,;+\infty[$ und $W_{h^{-1}} = [3\,;+\infty[$



1 y-Wert → **1** x-Wert
f ist umkehrbar



Zum Nachdenken

Was heißt eigentlich »hoch –1« ?
Wie immer in der Mathematik muss man bei der Verwendung von Symbolen auf jede Kleinigkeit achten. So hängt die Bedeutung des Exponenten –1 ganz entscheidend davon ab, wo er steht, worauf er sich also bezieht.
Wir machen uns das klar am Term $f(x) = 2x - 4$ mit $D_f = \mathbb{R} = W_f$

- –1 steht bei der Funktion f, f^{-1} heißt Umkehrfunktion

  $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + 2,\ D_{f^{-1}} = W_f = \mathbb{R}$

- –1 steht beim Funktionsterm f(x), $f(x)^{-1}$ heißt Kehrwert des Terms

  $f(x)^{-1} = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{2x-4}$

- –1 steht beim Argument, hier bei x

  $f(x^{-1}) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2}{x} - 4$

Ähnlich verwendet man auch andere Potenzen:

$f^2(x) = f(f(x)) = f(2x - 4) = 2(2x - 4) - 4 = 4x - 12$

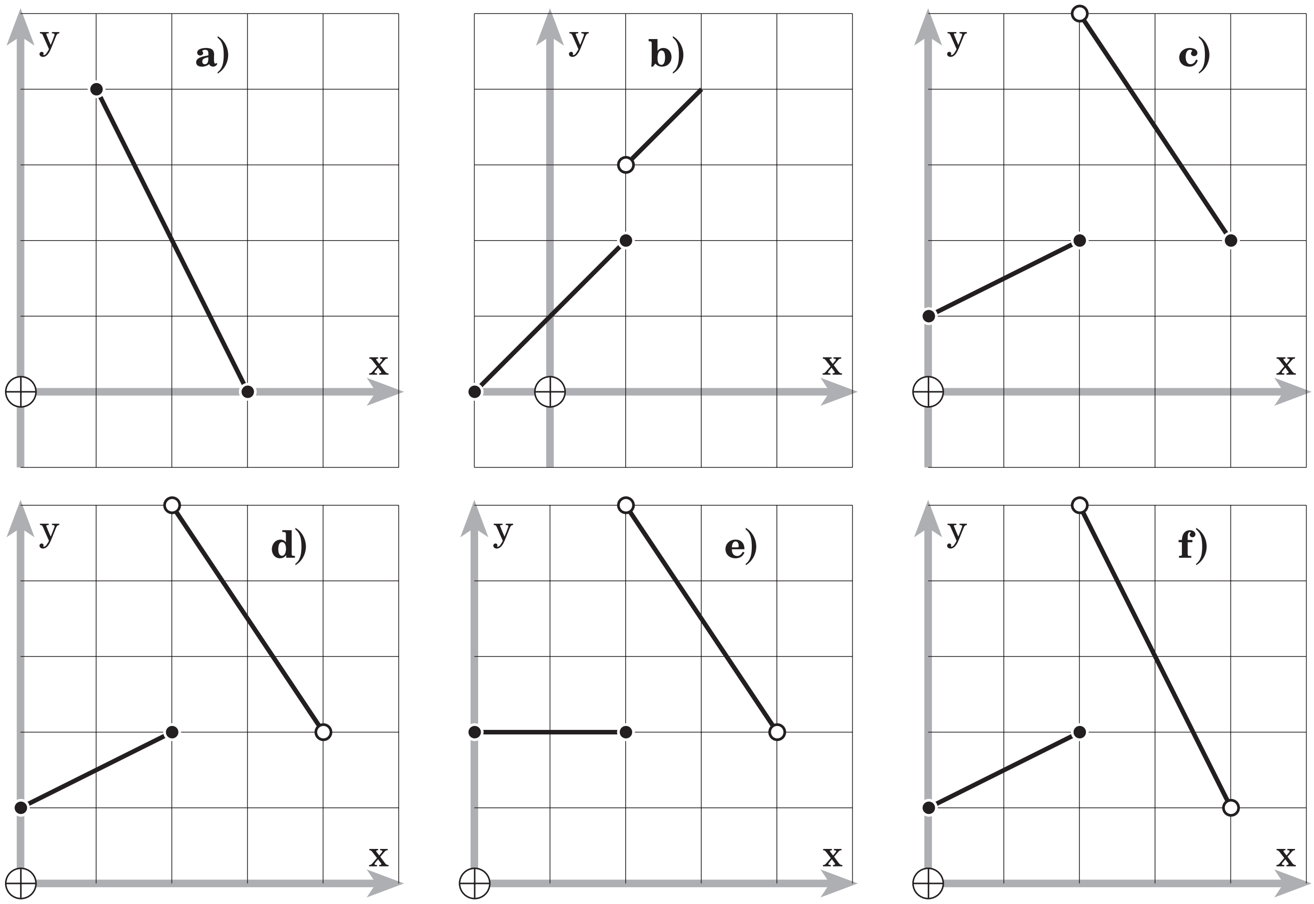
$f(x)^2 = [f(x)]^2 = (2x - 4)^2$

$f(x^2) = 2x^2 - 4$

Konsequenterweise sollte man auch unterscheiden
$\sin^2 x = \sin(\sin x)$ und $(\sin x)^2 = (\sin x)\cdot(\sin x)$

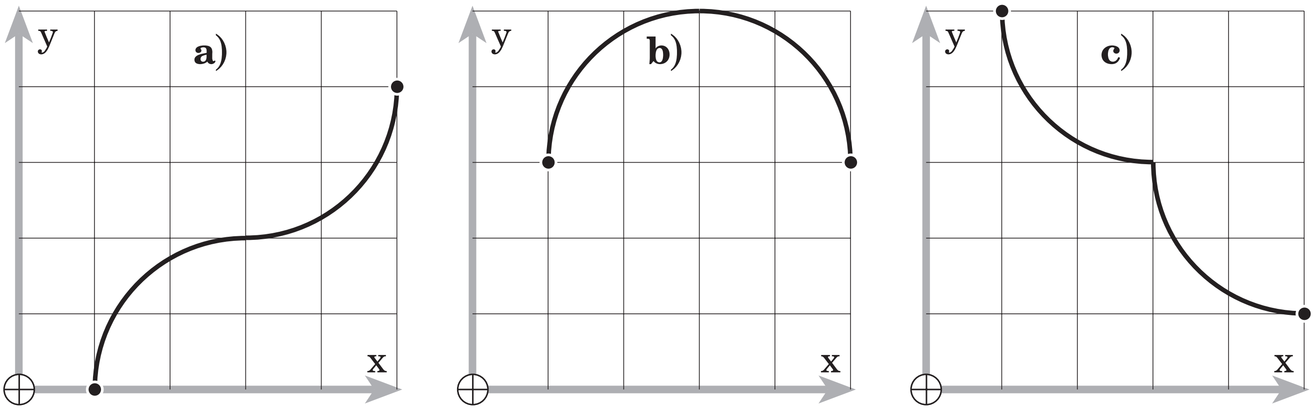
Aufgaben

◊1 Entscheide nach dem Augenmaß, welche Funktion umkehrbar ist. Skizziere bei den umkehrbaren Funktionen den gespiegelten Graphen.



◊2 Viertelkreise

Entscheide nach dem Augenmaß, welche Funktion umkehrbar ist.
Skizziere bei den umkehrbaren Funktionen den gespiegelten Graphen.



◊3 Bestimme die Umkehrfunktion (Term, Definitions- und Wertemenge)

a) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$ mit $D_f = \mathbb{R}$ **b)** $g(x) = -\frac{1}{2}x + 2$ mit $D_g = [-2;4[$

c) $h(x) = 3x - 3$ mit $D_h = \mathbb{R}_0^+$

4 $f(x) = mx + t$ mit $D_f = \mathbb{R}$
Bestimme m und t so, dass $f = f^{-1}$ ist.

5 Bestimme den Term der Umkehrfunktion und bestätige durch Einsetzen: $f(f^{-1}(x)) = x$ und $f^{-1}(f(x)) = x$.
Für welche Werte von x gilt jeweils die Identität ?

a) $f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$ mit $D_f = [-1;3[$ **b)** $g(x) = \frac{x}{x-1}$ mit $D_g = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$

c) $h(x) = \sqrt{x}$ mit $D_h = \mathbb{R}_0^+$

6 Bestimme die Punkte, in denen sich G_f und $G_{f^{-1}}$ schneiden.

a) $f(x) = 2x^3 + x - 16$ mit $D_f = \mathbb{R}$

b) $f(x) = x^2 + 2x - 6$ mit $D_f = [-1;+\infty[$

c) $f(x) = -x^2 + 2x$ mit $D_f =]-\infty;1[$

7 $f(x) = \sqrt{x}$ mit $D_f = \mathbb{R}_0^+$. Gib folgende Terme an:

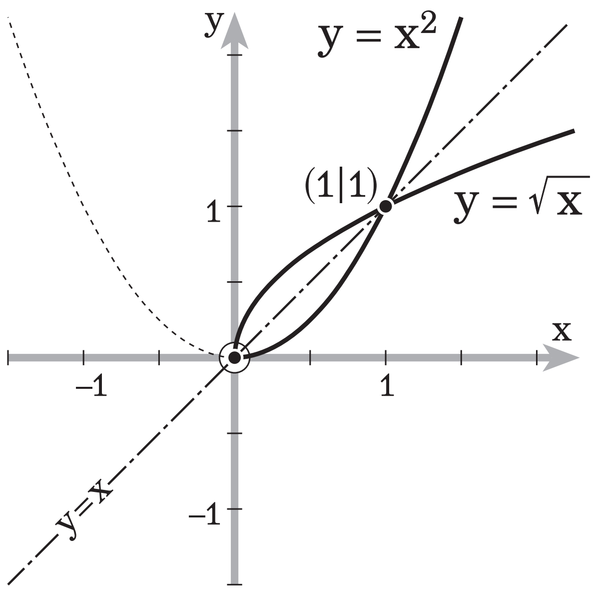
a) $f^{-1}(x)$ **b)** $f(x)^{-1}$ **c)** $f(x^{-1})$

d) $f^2(x)$ **e)** $f(x)^2$ **f)** $f(x^2)$

g) $f^{-2}(x)$ **h)** $(f^{-1})^{-1}(x)$ **i)** $f^{-1}(x^{-1})^{-1}$

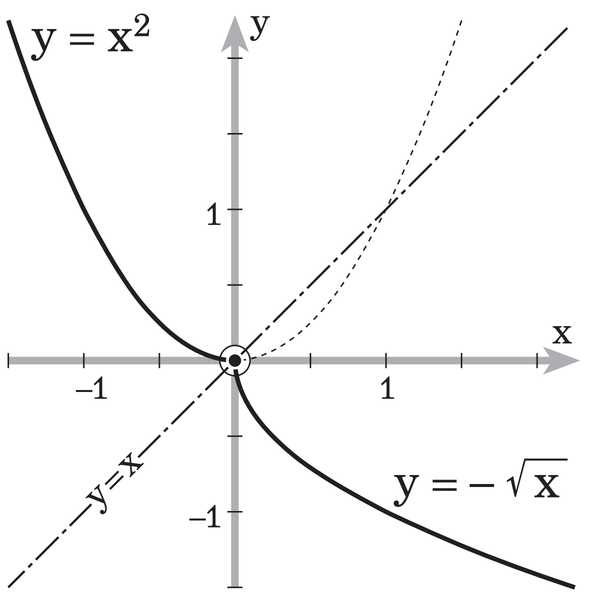
4.2 Wurzelfunktion

Der Graph einer quadratischen Funktion mit D=$\mathbb{R}$ ist eine Parabel; deshalb ist die quadratische Funktion nicht umkehrbar. Will man trotzdem umkehren, so muss man die Definitionsmenge passend einschränken: Man bildet zum selben Funktionsterm eine neue eineindeutige Funktion mit kleinerer Definitionsmenge. Man wird dabei natürlich nicht unnötig stark einschränken, sondern die neue Definitionsmenge möglichst groß machen. Das einfachste Beispiel ist die Wurzelfunktion; sie entsteht als Umkehrung bei einer der Einschränkungen der Funktion f mit f(x)= x^2 und $D_f = \mathbb{R}$. Die Einschränkung auf $\mathbb{R}_0^+$ liefert eine eineindeutige Funktion; die Umkehrfunktion heißt Wurzelfunktion (eigentlich Quadratwurzelfunktion).



$f(x) = x^2$ mit $D_f = \mathbb{R}$ und $W_f = \mathbb{R}_0^+$

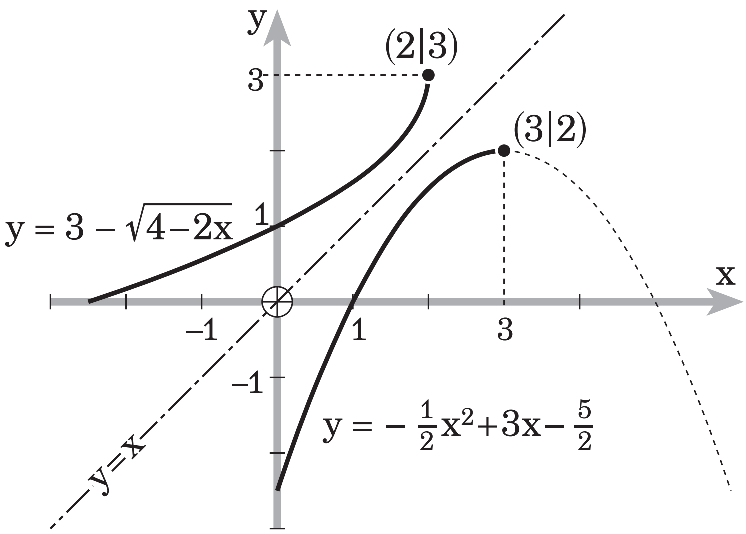
Einschränkung:
$g(x) = x^2$ mit $D_g = \mathbb{R}_0^+$ und $W_g = \mathbb{R}_0^+$
$y = x^2 \Leftrightarrow |x| = \sqrt{y} \Rightarrow x = \sqrt{y}$ wegen $x \geqq 0$
Wurzelfunktion:
$g^{-1}(x) = \sqrt{x}$ mit $D_{g^{-1}} = \mathbb{R}_0^+ = W_{g^{-1}}$



Genau so gut hätte man die linke Hälfte der Normalparabel nehmen können:
$h(x) = x^2$ mit $D_h = \mathbb{R}_0^-$ und $W_h = \mathbb{R}_0^+$
$y = x^2 \Leftrightarrow |x| = \sqrt{y} \Rightarrow x = -\sqrt{y}$ wegen $x \leqq 0$
Umkehrfunktion:
$h^{-1}(x) = -\sqrt{x}$ mit $D_{h^{-1}} = \mathbb{R}_0^+$, $W_{h^{-1}} = \mathbb{R}_0^-$

Ähnlich geht man bei verschobenen Parabeln vor:
Trennstelle ist die Scheitelstelle.
Die beiden Funktionsterme der Umkehrfunktionen ergeben sich, wenn man die Gleichung $ax^2 + bx + c = y$ nach x auflöst. Die Einschränkungen liest man am Term der Umkehrfunktion ab.

Beispiel: $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{5}{2}$ mit $D_f = \mathbb{R}$



$$-\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{5}{2} = y$$

$$x^2 - 6x + (5 + 2y) = 0$$

$$D = 36 - 4(5+2y) = 4(4-2y)$$

$$x = \frac{6 \pm 2\sqrt{4-2y}}{2} = 3 \pm \sqrt{4-2y}$$

Trennstelle (= Scheitelstelle) $x = 3$

Scheitel $(3|2)$, $W_f =]-\infty;2]$

1. Einschränkung

   $g(x) = f(x)$ mit $D_g =]-\infty;3]$

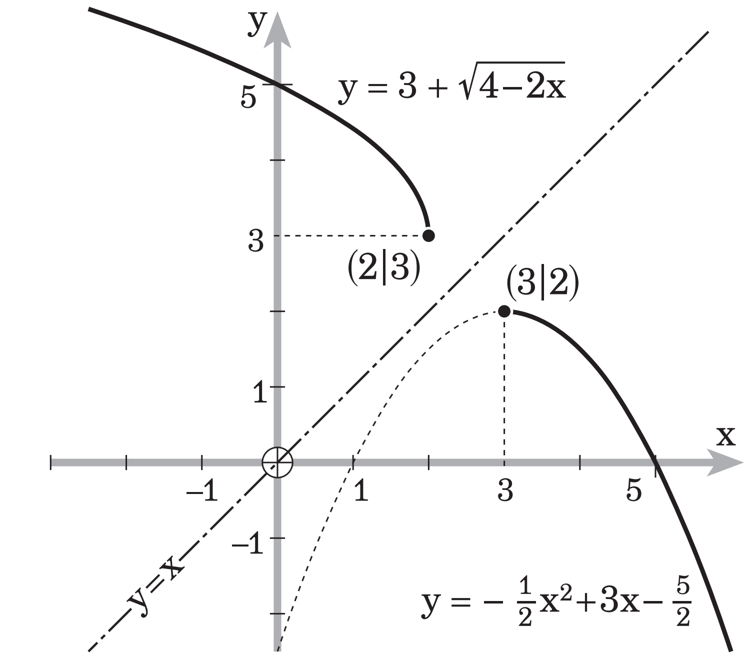
   zugehörige Umkehrfunktion:

   $g^{-1}(y) = 3 - \sqrt{4-2y}$

   gespiegelt:

   $g^{-1}(x) = 3 - \sqrt{4-2x}$

   mit $D_{g^{-1}} = W_f$



2. Einschränkung

   $h(x) = f(x)$ mit $D_h = [3;+\infty]$

   zugehörige Umkehrfunktion:

   $h^{-1}(y) = 3 + \sqrt{4-2y}$

   gespiegelt:

   $h^{-1}(x) = 3 + \sqrt{4-2x}$

   mit $D_{h^{-1}} = W_f$

Aufgaben

◊1 Schränke die Definitionsmenge der Funktionen so ein, dass die zugehörigen Funktionen umkehrbar sind. Bestimme die Umkehrfunktion, in deren Wertemenge der Wert 0 liegt.

a) $f(x) = (x+1)(x-3)$ mit $D_f = \mathbb{R}$

b) $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ mit $D_f = [-1;3]$

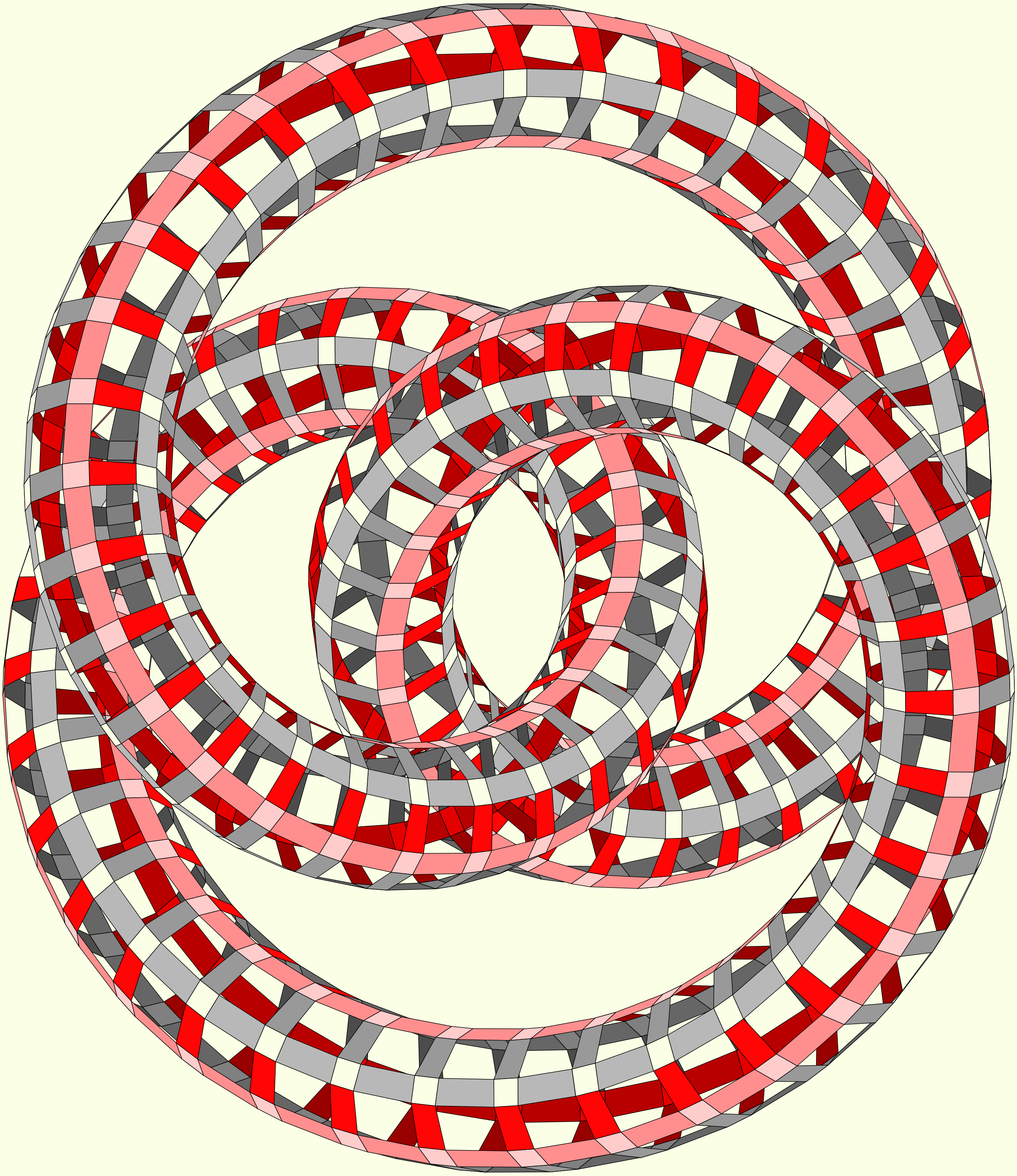
c) $f(x) = x^2 + 2x - 3$ mit $D_f = \mathbb{R}_0^-$

2 $f(x) = -\sqrt{-x}$ mit $D_f = \mathbb{R}_0^-$ Bestimme die Umkehrfunktion von f.

3 $f(x) = \sqrt{x-1}$, $g(x) = -\sqrt{5-x}$
Ermittle jeweils die maximale Definitionsmenge
und bestimme dann die Umkehrfunktionen f^{-1} und g^{-1}.

4 $f(x) = 1 - \sqrt{x-2}$
Ermittle die maximale Definitionsmenge
und bestimme dann die Umkehrfunktion f^{-1}

5 $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ mit $D_f = [0;1]$
Zeige, daß $f = f^{-1}$ gilt. Was folgt daraus für das Schaubild von f ?
Aus $P(x|y) \in G_f$ folgt $x^2 + y^2 = 1$. Rechne das nach.
Was kannst du daraus für den Graphen G_f folgern ?



II. Polynomfunktion

1. Potenzfunktion

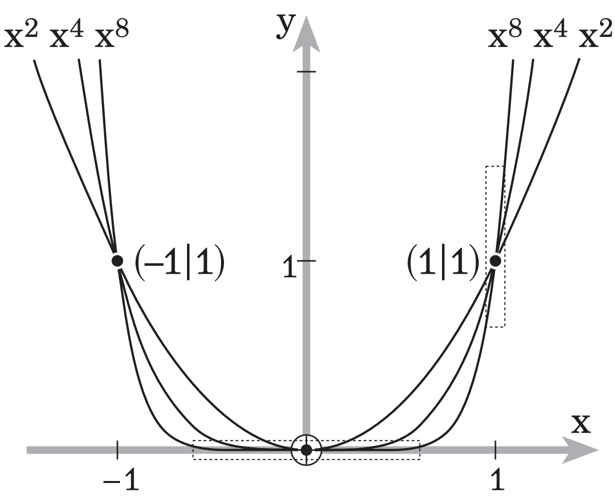
Die Terme der Funktionen, mit denen wir bisher gearbeitet haben, waren
affine Terme $mx + t$ und
quadratische Terme $ax^2 + bx + c$. Bei höheren Potenzen von x folgen
kubische Terme $ax^3 + bx^2 + cx + d$ usw.

Der Einfachheit halber untersuchen wir zuerst Funktionen,
deren Term bloß eine Potenz von x ist, die Potenzfunktionen.

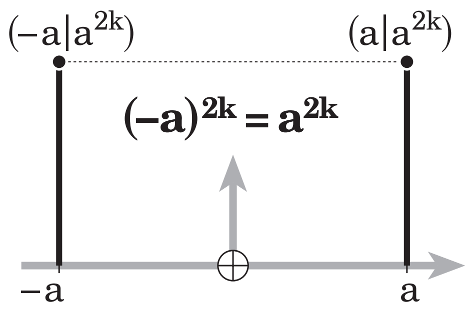
> Definition: Eine Funktion f mit $f(x)=x^n$ und $n \in \mathbb{N}$, $D_f = \mathbb{R}$ heißt (ganzrationale) **Potenzfunktion**.

Bei den Graphen der Potenzfunktionen unterscheidet man 2 Haupttypen,
je nachdem ob n gerade oder ungerade ist.

Gerade Exponenten $f(x) = x^{2k}$, $k \in \mathbb{N}$



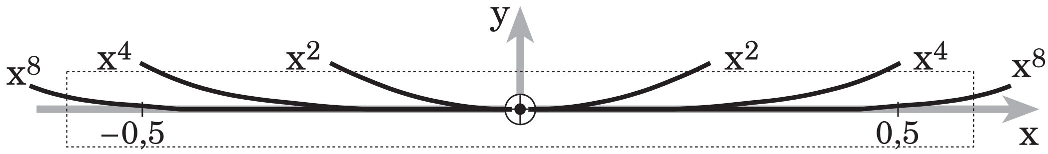
① Die y-Achse ist Symmetrieachse.
Denn für jede Zahl a gilt:
$(-a)^{2k} = ((-1)a)^{2k} = (-1)^{2k}a^{2k} = a^{2k}$



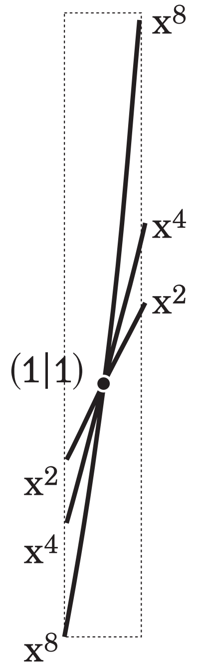
② Die Wertemenge ist $\mathbb{R}_0^+$.
Denn die Terme x^{2k} sind Quadrate $(x^k)^2$; ihre Werte sind also nicht negativ, können aber beliebig groß werden.

③ $(0|0)$, $(1|1)$ und $(-1|1)$ sind gemeinsame Punkte.
Denn $f(0) = 0^{2k} = 0$ und $f(1) = 1^{2k} = 1$.

④ Für $|x|< 1$ gilt:
Je größer der Exponent ist, desto näher ist die Kurve der x-Achse.
Denn multipliziert man eine positive Zahl mit einer positiven Zahl < 1, dann ist das Produkt kleiner als die Ausgangszahl, also gilt für $0<a<1$:
$a^{2(k+m)} = a^{2k} \cdot a^{2m} < a^{2k}$ mit $k, m \in \mathbb{N}$.

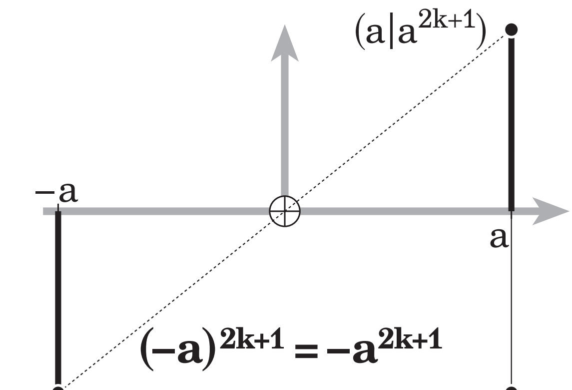


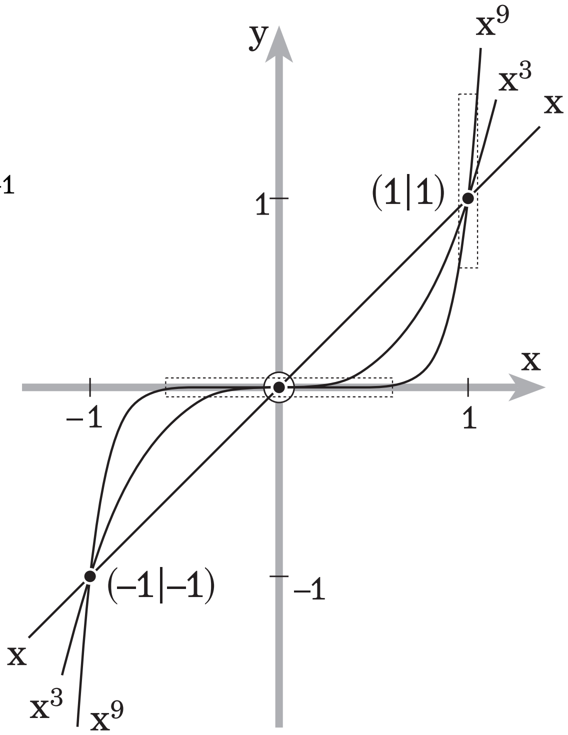
Für $|x| > 1$ gilt:
Je größer der Exponent ist,
desto weiter ist die Kurve von der x-Achse entfernt.
Denn multipliziert man eine positive Zahl mit einer positiven Zahl > 1, dann ist das Produkt größer als die Ausgangszahl, also gilt für $a>1$:
$a^{2(k+m)} = a^{2k} \cdot a^{2m} > a^{2k}$ mit $k, m \in \mathbb{N}$.



Ungerade Exponenten $f(x) = x^{2k+1}$, $k \in \mathbb{N}_0$

① Der Ursprung ist Symmetriezentrum.
Denn für jede Zahl a gilt:
$(-a)^{2k+1} = ((-1)a)^{2k+1} = (-1)^{2k+1} a^{2k+1} = -a^{2k+1}$

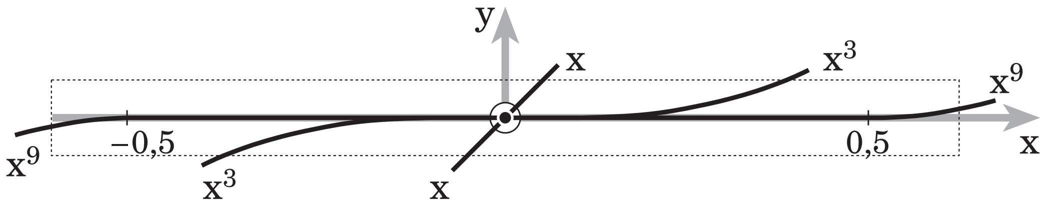


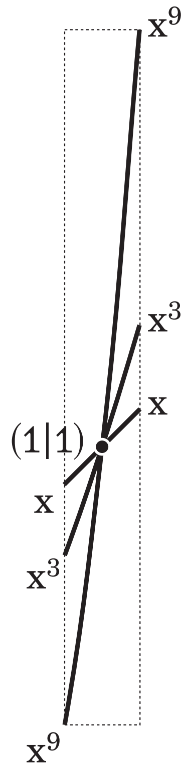


② Die Wertemenge ist $\mathbb{R}$.
Denn der Term x^{2k} hat die Wertemenge $\mathbb{R}_0^+$,
also auch der Term $x \cdot x^{2k} = x^{2k+1}$ für positive x-Werte.
Aus der Punktsymmetrie folgt die Behauptung.

③ $(0|0)$, $(1|1)$ und $(-1|-1)$ sind gemeinsame Punkte.
Denn es ist $f(0) = 0^{2k} = 0$ und $f(1) = 1^{2k} = 1$.

④ Für $|x| < 1$ gilt:
Je größer der Exponent ist,
desto näher ist die Kurve der x-Achse.





Für $|x| > 1$ gilt:
Je größer der Exponent ist,
desto weiter ist die Kurve von der x-Achse entfernt.
Denn für positive Werte von a, also rechts vom Ursprung,
gilt dasselbe wie bei den geraden Exponenten.
Der Rest folgt aus der Punktsymmetrie.

Verhalten im Unendlichen; Grenzwert

Entfernt man sich vom Ursprung auf der x-Achse beliebig weit, so hat man dafür eine eigene symbolische Schreibweise:

$x \to +\infty$ bedeutet: beliebig weit nach rechts, das heißt,
x wird beliebig groß, wächst über jede Schranke.
(gelesen »x gegen plus unendlich«)

$x \to -\infty$ bedeutet: beliebig weit nach links, das heißt,
x wird beliebig klein, fällt unter jede Schranke.
(gelesen »x gegen minus unendlich«)

Entsprechend behandelt man die Funktionswerte:

$f(x) \to +\infty$ bedeutet: beliebig weit nach oben, das heißt,
f(x) wird beliebig groß, wächst über jede Schranke.

$f(x) \to -\infty$ bedeutet: beliebig weit nach unten, das heißt,
f(x) wird beliebig klein, fällt unter jede Schranke.

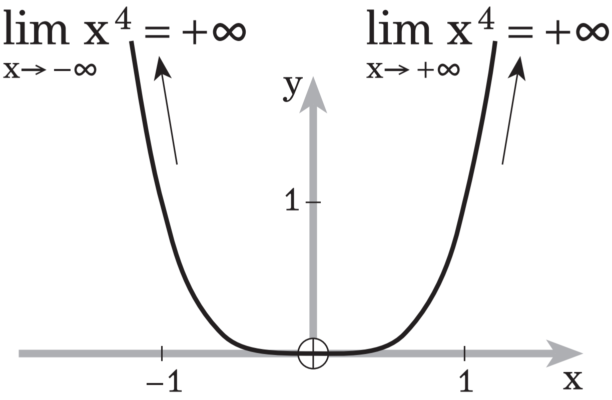
Für die Potenzfunktionen gilt:

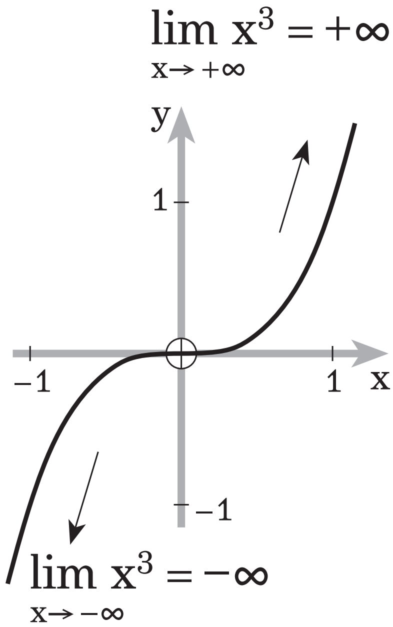
wenn $x \to +\infty$ dann, $x^n \to +\infty$, $n \in \mathbb{N}$

$$\text{wenn } x \to -\infty, \text{ dann } \begin{cases} x^{2k} & \to +\infty \\ x^{2k-1} & \to -\infty \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}$$

Für »wenn $x \to +\infty$, dann $x^n \to +\infty$, $n \in \mathbb{N}$«
hat sich die lim-Schreibweise eingebürgert: $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$, $n \in \mathbb{N}$
gelesen »limes von x hoch n für x gegen plus unendlich gleich plus unendlich«.
(»lim« ist die Abkürzung von »limes«, auf deutsch Grenzwert.)

Entsprechend: $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{2k} = +\infty$, $k \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{2k-1} = -\infty$, $k \in \mathbb{N}$





Aufgaben

◊1 Ergänze die Tabelle auf Millionstel gerundet.

x	0,8	0,4	0,2	0,1	0,05
x^2					
x^5					

2 Ergänze die Tabelle auf Millionstel gerundet.

x	−0,2	−0,1	−0,05
x^3			
x^5			
x^{15}			

3 Ergänze die Tabelle auf Hundertstel gerundet.

x	1,1	1,5	2
x^2			
x^5			
x^8			

4 Ergänze die Tabelle auf Hundertstel gerundet.

x	1,1	1,5	2
x^2			
x^6			
x^{20}			

5 Für welche positiven Zahlen a, b, c und d gilt (auf Hundertstel runden):

a) $a^2 < 0{,}001$ $b^3 < 0{,}001$ $c^5 < 0{,}001$ $d^{10} < 0{,}001$

b) $a^2 > 1000$ $b^3 > 1000$ $c^5 > 1000$ $d^{10} > 1000$

2. Polynomfunktion

2.1 Definition; Verhalten im Unendlichen

x-Potenzen mit natürlichen Exponenten eignen sich als Bausteine für kompliziertere Funktionsterme. Versieht man sie mit Faktoren (=Koeffizienten) und addiert sie, so entsteht ein Polynom. Der größte Exponent von x heißt Grad des Polynoms. So ist $f(x) = -3x^5 + x^4 - \sqrt{2}\,x^2 - 1$ ein Polynom vom Grad 5.

> Definition: Ein Term der Form
> $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$
> mit reellen Koeffizienten a_i und $a_n \neq 0$ mit $n \in \mathbb{N}$
> heißt **Polynom vom Grad n**.

Im Beispiel oben gilt $a_5 = -3,\ a_4 = 1,\ a_3 = a_1 = 0,\ a_2 = -\sqrt{2},\ a_0 = -1$.
Mit Polynomen lassen sich neue Funktionen bilden.

> Definition: Eine Funktion mit Definitionsmenge $\mathbb{R}$,
> deren Term ein Polynom vom Grad n ist mit $n \in \mathbb{N}$,
> heißt **Polynomfunktion vom Grad n** oder
> auch ganzrationale Funktion n-ten Grades.

Verhalten im Unendlichen

Für sehr große x-Werte ($x \to +\infty$) oder kleine x-Werte ($x \to -\infty$) ist der Term $a_n x^n$ entscheidend für das Verhalten der Funktion. Es gilt nämlich

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 = x^n\left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \ldots + \frac{a_0}{x^n}\right).$$

Wenn $|x|$ beliebig groß wird, dann unterscheiden sich die Summanden $\frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \ldots + \frac{a_0}{x^n}$ beliebig wenig von 0, sind also im Vergleich zu a_n vernachlässigbar klein, kurz: wenn $x \to \pm\infty$, dann $\left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \ldots + \frac{a_0}{x^n}\right) \to a_n$.

Für $x \to \pm\infty$ muss man sich also nur noch um den Term $a_n x^n$ kümmern, er strebt immer gegen $\pm\infty$: wenn $|x| \to +\infty$, dann $|a_n x^n| \to +\infty$.

Übers Vorzeichen entscheiden die Vorzeichenregeln. Beispiel:

$$\lim_{x \to +\infty}(-3x^5 + x^4 - \sqrt{2}x^2 - 1) = \lim_{x \to +\infty}(-3x^5) = -\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty}(-3x^5 + x^4 - \sqrt{2}x^2 - 1) = \lim_{x \to -\infty}(-3x^5) = +\infty$$

Die Kurve kommt also von links oben und verschwindet rechts unten.

Aufgaben

1 Gib den Grad und die Koeffizienten c_0 bis c_n an:

a) $f(x) = -x^4 + x^3 - 2x$ **b)** $f(x) = x^{17} - 1$

c) $f(x) = \frac{1}{10}x^{10} + \frac{1}{2}x^8 - x^6 + \sqrt{3}x^4$

2 Schreibe den Term einer Polynomfunktion mit den Koeffizienten:

a) $c_1 = -1,\ c_0 = 7$ **b)** $c_2 = 2,\ c_1 = c_0 = -13$

c) $c_{12} = 12,\ c_6 = -6,\ c_1 = 1$ alle andern $c_i = 0$ **d)** $c_i = -(-i)^i,\ i \in \{1, \ldots, 5\}$

3 Beschreibe das Verhalten der Kurve im Unendlichen

a) $f(x) = x^3 + x^2 - 12$ **b)** $f(x) = x^4 - 2^4$

c) $f(x) = -4x^4 + 16x^3 - 9x^2 + 5^{20}$ **d)** $f(x) = -\frac{3}{2}x^3 + 7x^2 - 7x + 1$

•**4** Beschreibe das Verhalten der Kurve im Unendlichen

a) $f(x) = -2(x-2)^5$ **b)** $f(x) = (x-3)(3-x)^3$

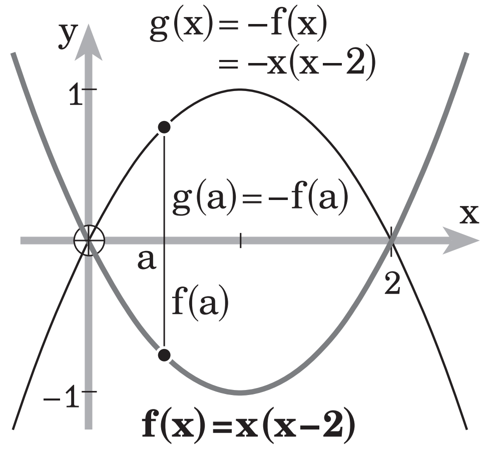
c) $f(x) = (x-1)(2-x)(2x-3)(4-3x)$ **c)** $f(x) = -5x^5(x-5)^5(25-x^3)^5$

2.2 Spiegeln und Symmetrie

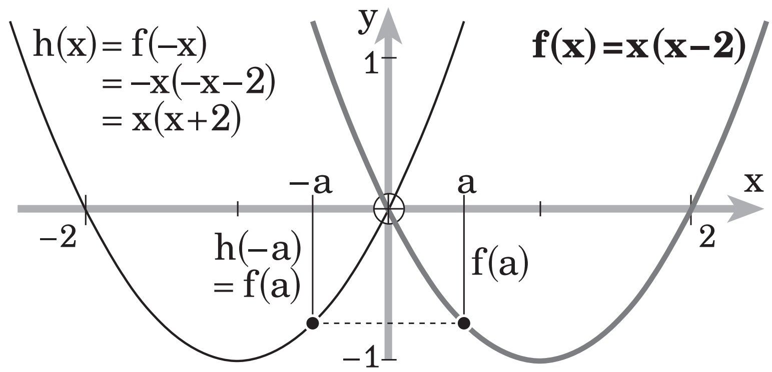
Man kann sich viel Rechenarbeit sparen, wenn bekannt ist, dass eine Kurve symmetrisch ist. Wir haben es hier bloß mit Achsen- und Punktsymmetrie zu tun und beschränken uns auf die Symmetrie zu den Koordinatenachsen und zum Ursprung – kurz, auf Symmetrie zum Koordinatensystem. Typische Vertreter sind Graphen der Funktionen mit den Gleichungen
$y = x^2$ mit Symmetrie zur y-Achse und $y = x^3$ mit Symmetrie zum Ursprung.

Auch bei den allgemeinen Polynomfunktionen erkennt man die Symmetrie auf einen Blick. Dazu müssen wir verstehen, was ein Minuszeichen im Funktionsterm bewirkt.

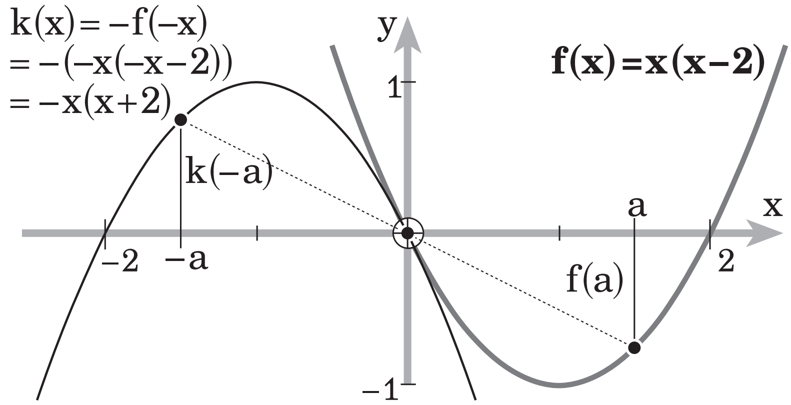
Die Graphen der Funktionen mit $y = f(x)$ und $y = g(x) = -f(x)$ sind zueinander symmetrisch bezüglich der x-Achse.



Die Graphen der Funktionen mit y=f(x) und y=h(x)=f(–x) sind zueinander symmetrisch bezüglich der y-Achse.



Die Graphen der Funktionen mit y=f(x) und y=k(x)=–f(–x) sind zueinander symmetrisch bezüglich des Ursprungs.



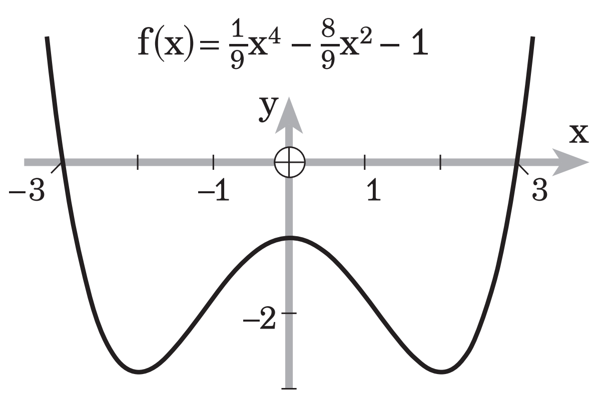
Stimmt der an einer Achse oder einem Punkt gespiegelte Graph mit sich selber überein, so ist der Graph symmetrisch zur Achse oder zum Punkt. Also gilt:

$f(-x) = f(x) \quad \Leftrightarrow$ Der Graph ist symmetrisch zur y-Achse.

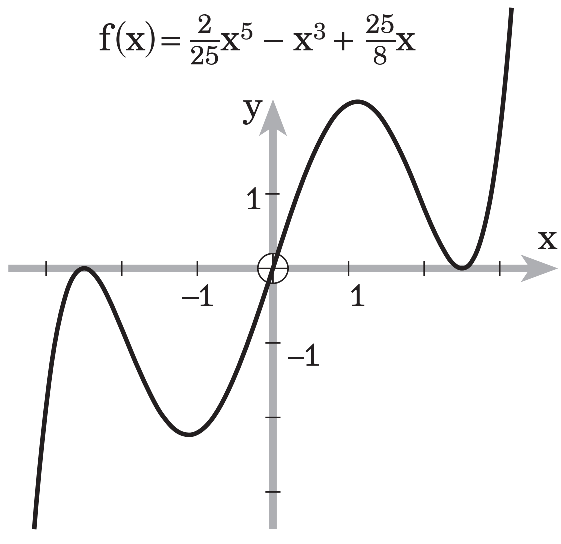
$f(-x) = -f(x) \quad \Leftrightarrow$ Der Graph ist symmetrisch zum Ursprung.

Diese beiden Sätze gelten für jede Funktion, deren Definitionsmenge symmetrisch zum Ursprung liegt. Speziell bei Polynomfunktionen sieht man am Term sofort, welche der beiden Symmetrien gegebenenfalls vorliegt:

Hat der Term lauter gerade Exponenten (auch 0 ist gerade!), dann ist $f(-x) = f(x)$ und G_f ist symmetrisch zur y-Achse:

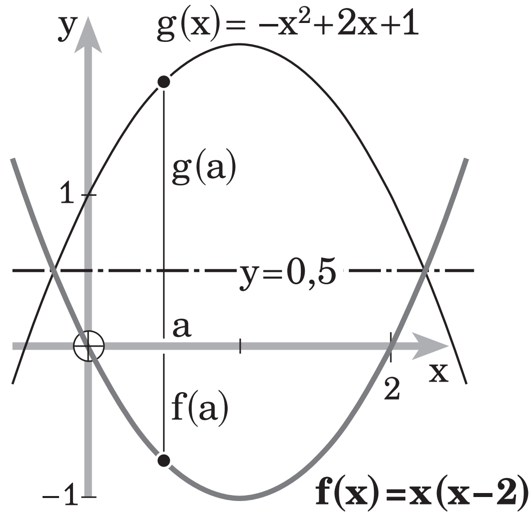


Hat der Term lauter ungerade Exponenten, dann ist $f(-x) = -f(x)$ und G_f ist symmetrisch zumUrsprung:



Zum Nachdenken

Es gibt auch Kurven, die zwar symmetrisch sind, aber nicht zum Koordinatensystem. Wir zeigen, wie man das rechnerisch untersucht.

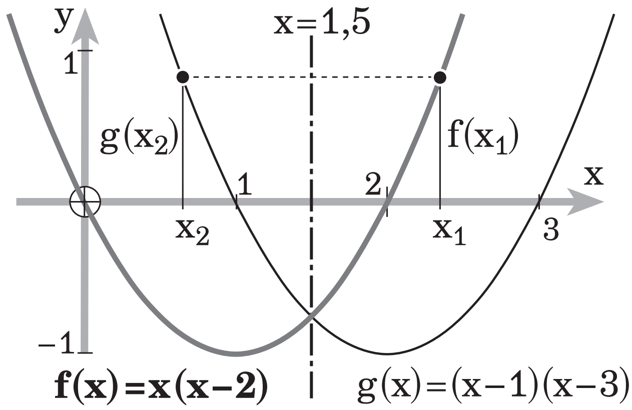


❶ Spiegeln an der waagrechten Achse y = t

G_g und G_f seien zueinander symmetrisch bezüglich y = t. Für jedes x ist dann t der Mittelwert der Funktionswerte f(x) und g(x):

$\frac{f(x) + g(x)}{2} = t \Rightarrow \mathbf{g(x) = 2t - f(x)}$

Im Beispiel spiegeln wir die Parabel mit $f(x) = x(x-2)$ an der Achse y = 0,5:
$g(x) = 2 \cdot 0{,}5 - x(x-2) = -x^2 + 2x + 1$



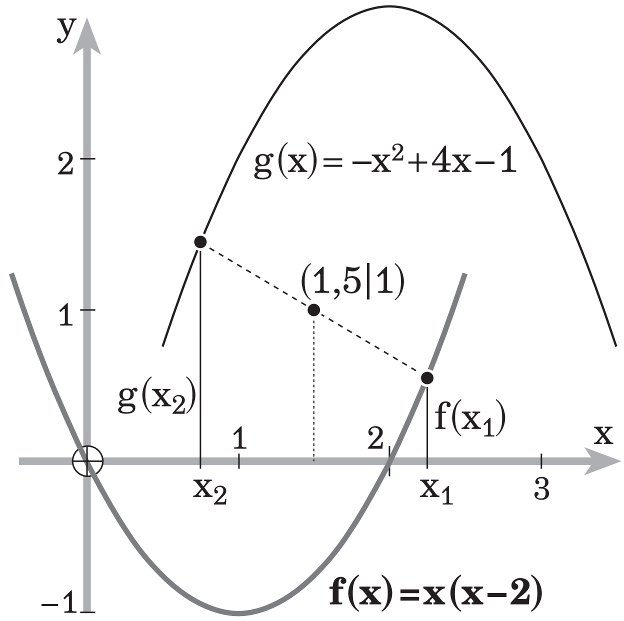
❷ Spiegeln an der senkrechten Achse x = s

G_g und G_f seien zueinander symmetrisch bezüglich x = s. Für 2 zur Achse x = s symmetrische Punkte $(x_1|f(x_1))$ und $(x_2|g(x_2))$ gilt: s ist der Mittelwert von x_1 und x_2,

das heißt $\frac{x_1+x_2}{2} = s$, und $f(x_1) = g(x_2)$.

Wählen wir allgemein $x_2 = x$, dann ergibt sich $x_1 = 2s - x$ und $\mathbf{g(x) = f(2s-x)}$.
Im Beispiel spiegeln wir die Parabel mit $f(x) = x(x-2)$ an der Achse x = 1,5:
$g(x) = f(2 \cdot 1{,}5 - x) = (3-x)(3-x-2) = (3-x)(1-x) = (x-1)(x-3)$

Sind Urbild und Spiegelbild identisch, dann ist die Kurve symmetrisch zur Achse x = s.
f(2s – x) = f(x) bedeutet: Der Graph ist symmetrisch zur Achse x = s.
Im Fall s=0 ergibt sich die schon bekannte Symmetrie zur y-Achse.



❸ Spiegeln am Punkt (s|t)

G_g und G_f seien zueinander symmetrisch bezüglich (s|t). Für 2 zu (s|t) symmetrische Punkte $(x_1|f(x_1))$ und $(x_2|g(x_2))$ gilt:
s ist der Mittelwert von x_1 und x_2,

das heißt $\frac{x_1+x_2}{2} = s$, und

t ist der Mittelwert von $f(x_1)$ und $g(x_2)$,

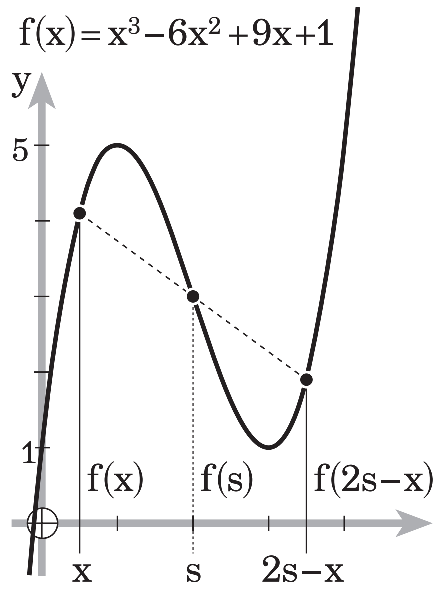
das heißt $\frac{f(x_1)+g(x_2)}{2} = t$.

Wählen wir allgemein $x_2 = x$, dann ergibt sich $x_1 = 2s - x$ und $\mathbf{g(x) = 2t - f(2s-x)}$.
Im Beispiel spiegeln wir die Parabel mit $f(x) = x(x-2)$ am Punkt (1,5|1):
$g(x) = 2 \cdot 1 - f(2 \cdot 1{,}5 - x)$
$= 2 - (3-x)(3-x-2) = 2 - (3-x)(1-x) = -x^2 + 4x - 1$

Sind Urbild und Spiegelbild identisch, dann ist die Kurve symmetrisch zum Punkt (s|t).
f(2s – x) = 2t – f(x) bedeutet: Der Graph ist symmetrisch zum Punkt (s|t).
Im Fall s=0, t=0 ergibt sich die schon bekannte Symmetrie zum Ursprung.

❹ Untersuchen auf Punktsymmetrie

Ist die Funktion f einer zu (s|t) symmetrischen Kurve bei x = s definiert, dann ist
$f(2s - s) = 2t - f(s) \iff f(s) = t$, das heißt,
die Kurve geht durch ihren Symmetriepunkt.
Als Bedingung für Symmetrie zu (s|t) gilt dann
$f(2s - x) = 2f(s) - f(x)$ oder auch $\frac{f(2s - x) + f(x)}{2} = f(s)$.



Mit dieser Symmetriebedingung findet man gegebenenfalls das Symmetriezentrum.
Als Beispiel suchen wir den Symmetriepunkt der Kurve mit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$.
Bedingung $f(2s - x) = 2f(s) - f(x)$ angewandt:
$(2s - x)^3 - 6(2s - x)^2 + 9(2s - x) + 1 = 2(s^3 - 6s^2 + 9s + 1) - (x^3 - 6x^2 + 9x + 1)$
Diese Gleichung gilt für alle x, wenn die Kurve symmetrisch ist zu (s|f(s)).
Setzen wir speziell x=0, dann vereinfacht sie sich spürbar:
$8s^3 - 24s^2 + 18s + 1 = 2s^3 - 12s^2 + 18s + 2 - 1 \iff 6s^3 - 12s^2 = 0 \iff 6s^2(s - 2) = 0$
Die Lösungen s=0 und s=2 sind mögliche Symmetriestellen.
Wir überprüfen die Symmetriebedingung:
s=0: $(-x)^3 - 6(-x)^2 + 9(-x) + 1 = 2\cdot 1 - (x^3 - 6x^2 + 9x + 1) \iff -12x^2 = 0 \iff x = 0$
Die Symmetriebedingung ist nur für x=0 erfüllt,
(0|f(0)) ist also kein Symmetriezentrum.
s=2: $(4 - x)^3 - 6(4 - x)^2 + 9(4 - x) + 1 = 2(8 - 24+ 18+ 1) - (x^3 - 6x^2 + 9x + 1)$
$64 - 48x + 12x^2 - x^3 - 96 + 48x - 6x^2 + 36 - 9x + 1 = 6 - x^3 + 6x^2 - 9x - 1 \iff 0 = 0$
Die Symmetriebedingung ist für jedes x erfüllt,
(2|f(2)) = (2|3) ist also Symmetriezentrum.

Aufgaben

1 Gegeben ist der Term f(x) einer Funktion f.
Bestimme den Term g(x) der Funktion g, deren Graph G_g durch Spiegeln von G_f an der x-Achse entsteht. Berechne die Schnittpunkte von G_g und G_f; welche Bedeutung haben sie für f ?

a) $f(x) = \frac{3}{2}x - 6$ **b)** $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ **c)** $f(x) = x(x^2 - 4)$

2 Gegeben ist der Term f(x) einer Funktion f. Bestimme den Term g(x) der Funktion g, deren Graph G_g durch Spiegeln von G_f an der y-Achse entsteht. Berechne die Schnittpunkte von G_g und G_f.

a) $f(x) = \frac{3}{2}x - 6$ **b)** $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ **c)** $f(x) = x(x^2 - 4)$

3 Gegeben ist der Term f(x) einer Funktion f. Bestimme den Term g(x) der Funktion g, deren Graph G_g durch Spiegeln von G_f am Ursprung entsteht. Berechne die Schnittpunkte von G_g und G_f.

a) $f(x) = \frac{3}{2}x - 6$ **b)** $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 2$ **c)** $f(x) = x(x^2 - 4)$

◊4 Untersuche die Graphen der Funktionen auf Symmetrie zum Koordinatensystem.

a) $f(x) = 2x - 1$ **b)** $f(x) = 4$ **c)** $f(x) = 4 - x^2 + 3x^4$

d) $f(x) = x - 4x^3$ **e)** $f(x) = x(x^2 - 4)$ **f)** $f(x) = x^2(x - 4)$

g) $f(x) = 2(x - x^3)^2$ **h)** $f(x) = 2(1 - x^2)^3$ **i)** $f(x) = (5 - x)(5 + x)x$

5 Für welche Werte von a sind die Kurven symmetrisch zum Koordinatensystem ? Welche Symmetrie liegt gegebenenfalls vor ?

a) $f(x) = x - a$ **b)** $f(x) = x(x - a)$ **c)** $f(x) = x(x - a)^2$

d) $f(x) = x(x^2 - a)$ **e)** $f(x) = ax^2 - (1 - a)x + a$ **f)** $f(x) = x^2(x - 2a)(x + 2a)$

6 Begründe: Eine bei 0 definierte Kurve, die symmetrisch ist zum Ursprung, geht durch den Ursprung.

•7 Spiegle die Parabel mit $p(x) = (x + 1)(x - 3)$

a) an der Achse $y = -1$ **b)** an der Achse $x = -1$

c) an der Achse $x = 1$ **d)** am Punkt $(2|-2)$

:8 Nachweis von Symmetrie

a) Zeige: G_f mit $f(x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2$ ist symmetrisch zur Achse $x = s$.

b) Zeige: G_f mit $f(x) = 3x^2 - x^3$ ist symmetrisch zum Punkt $(s|t)$.

Berechne die Werte von s und t.

•9 Für eine Funktion f gilt **a)** $f(4 - x) = -6 - f(x)$

b) $f(-8 - x) = f(x)$

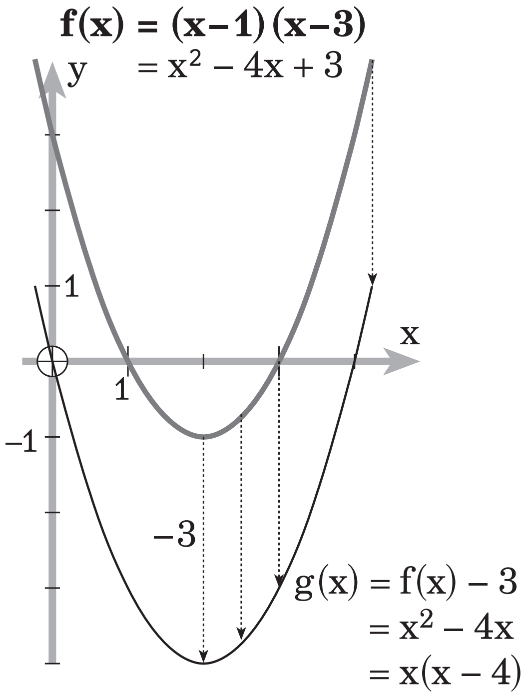
Welche Symmetrie hat der Graph ?

10 Wie viele Symmetrieachsen (oder Symmetriezentren) kann der Graph einer Funktion haben ?

2.3 Schieben und Strecken

Beim Untersuchen von Kurven ist es manchmal von Vorteil, die Kurve im Koordinatensystem passend zu verschieben. Zum Beispiel ist es günstig, wenn sie dann durch den Ursprung geht oder – wenn sie symmetrisch ist – dann symmetrisch zum Koordinatensystem wird.

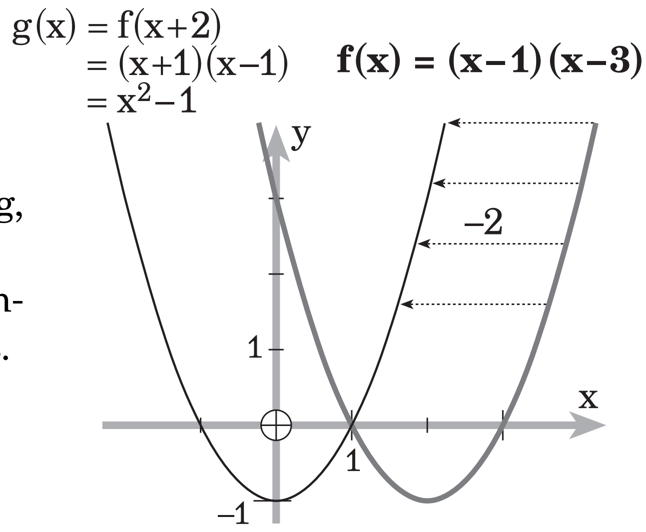
Im Folgenden sei f die Funktion der Ausgangskurve G_f (Urbild)
g die Funktion der neuen Kurve G_g (Bild).



Verschieben um b in y-Richtung

$$g(x) = f(x) + b$$

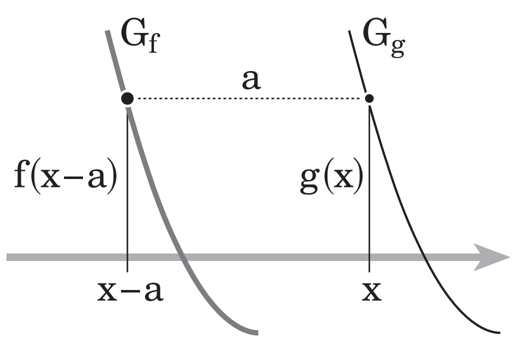
Verschiebt man G_f um b in y-Richtung, so entsteht G_g. Im Beispiel ist $b = -3$, also liegt G_g 3 Einheiten unter G_f.



Verschieben um a in x-Richtung

$$g(x) = f(x - a)$$

g hat bei x den y-Wert, den f bei $x-a$ hat. Verschiebt man also G_f um a in x-Richtung, so entsteht G_g. Im Beispiel ist $a = -2$, also verschiebt man G_f um -2 in x-Richtung, das heißt um 2 Einheiten nach links.



Verschieben in x- und y-Richtung

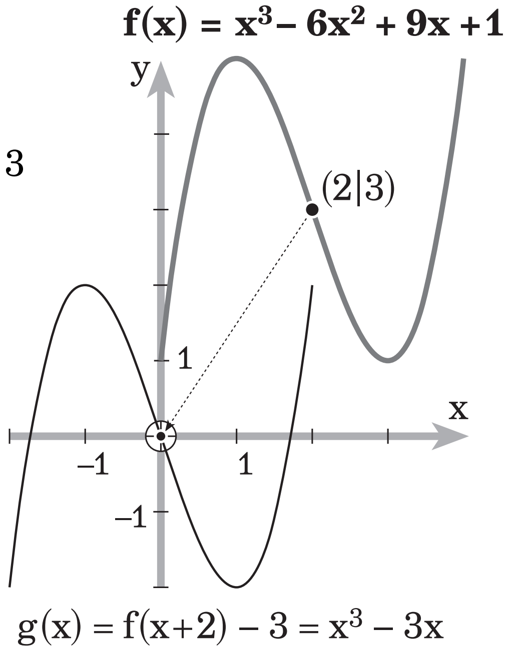
$$\mathbf{g(x) = f(x - a) + b}$$

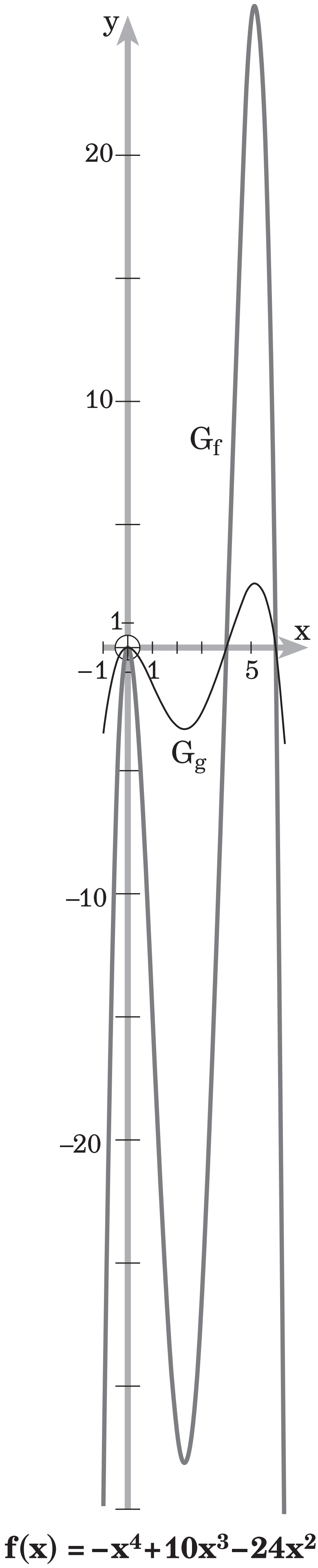
Als Beispiel verschieben wir die Kurve von f mit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ so, dass ihr Symmetriezentrum (2|3) in den Ursprung fällt:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 6x^2 + 9x + 1 \\ &= x(x^2 - 6x + 9) + 1 \\ &= x(x - 3)^2 + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x + 2) - 3 \\ &= (x+2)(x-1)^2 + 1 - 3 \\ &= x^3 - 3x \end{aligned}$$

Im letzten Term sieht man sofort die Symmetrie von G_g zum Ursprung.



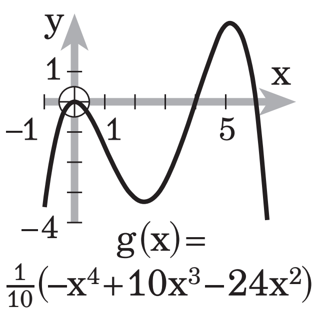


Strecken aufs c-fache in y-Richtung

$$\mathbf{g(x) = c \cdot f(x)}$$

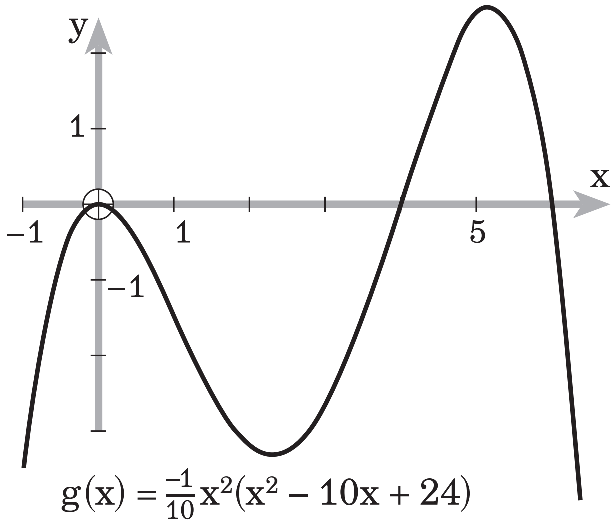
Polynomkurven höheren Grades haben oft so große Ausschläge, dass sie bei gewohntem Maßstab nicht aufs Blatt passen. Man bändigt sie, indem man den Term f(x) mit einem geeigneten Faktor c multipliziert.

$|c| > 1$: Streckung in y-Richtung
$0 < |c| < 1$: Stauchung in y-Richtung
$c < 0$: der Faktor –1 bewirkt noch eine Spiegelung an der x-Achse.



Die neue Kurve G_g hat aber jetzt nicht mehr dieselbe Gestalt wie G_f: Die Stauchung auf ein 10tel quetscht das Koordinatensystem auf Briefmarkengröße.

Passende Änderung des Maßstabs bringt das Bild auf gewohnte Größe.



$g(x) = \frac{-1}{10}x^2(x^2 - 10x + 24)$

Strecken aufs k-fache in x-Richtung

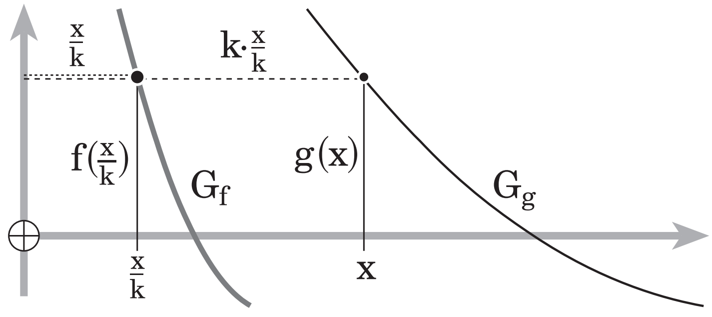
$$\mathbf{g(x) = f(\tfrac{x}{k})}$$

g hat bei x den y-Wert, den f bei $\frac{x}{k}$ hat.

G_g ist der in x-Richtung

mit k gestreckte Graph G_f.

G_g hat nicht mehr die Gestalt von G_f.

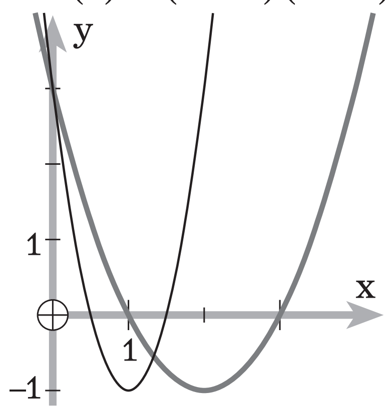


$|k| > 1$: Streckung in x-Richtung

$0 < |k| < 1$: Stauchung in x-Richtung

$k < 0$: der Faktor –1 bewirkt noch eine Spiegelung an der y-Achse.

f(x) = (x – 1) (x – 3)



$g(x) = f(2x) = f(\frac{x}{1/2})$

$= 4x^2 - 8x + 3$

$k = 1/2$

Stauchung auf die Hälfte

Durch geeignetes Schieben und Strecken lässt sich jede Parabel G_f umformen in eine Normalparabel G_g mit dem Scheitel im Ursprung.

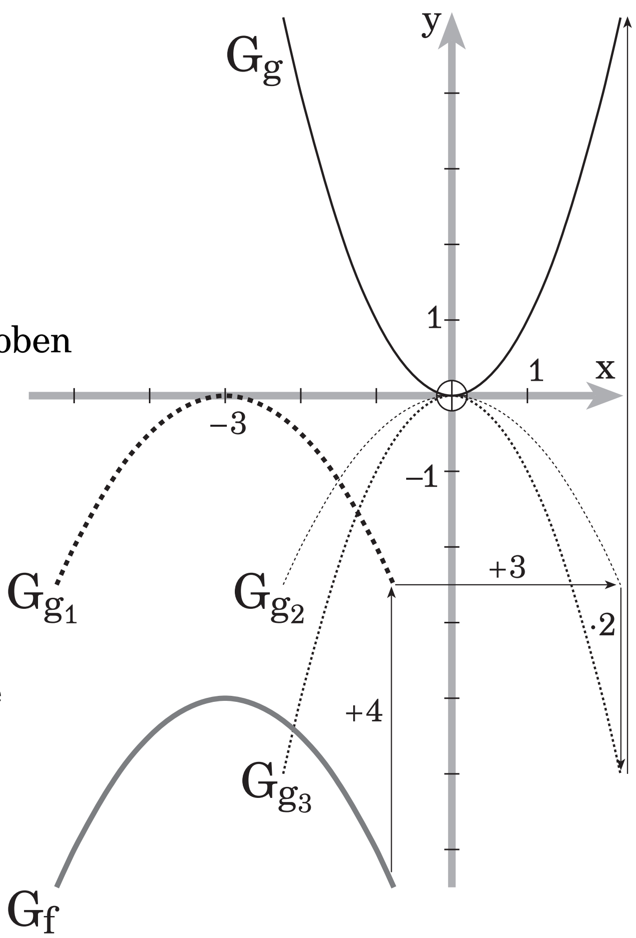
Beispiel: $f(x) = -\frac{1}{2}(x+3)^2 - 4$

$g_1(x) = f(x) + 4 = -\frac{1}{2}(x+3)^2$
Verschiebung von G_f um 4 nach oben

$g_2(x) = g_1(x-3) = -\frac{1}{2}x^2$
Verschiebung von G_{g_1}
um 3 nach rechts

$g_3(x) = 2g_2(x) = -x^2$
Streckung von G_{g_2} aufs Doppelte
in y-Richtung

$g(x) = -g_3(x) = x^2$
Spiegelung von G_{g_3}
an der x-Achse



Aufgaben

1 $f(x) = x^2 - 2x + 3$; durch Verschieben von G_f entsteht G_g. Bestimme $g(x)$.

a) Verschiebe G_f in y-Richtung so, dass G_g durch den Ursprung geht.

b) Verschiebe G_f in x-Richtung so, dass G_g symmetrisch zur y-Achse ist.

c) Verschiebe G_f so, dass der Scheitel von G_g imUrsprung liegt.

2 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}$; durch Verschieben von G_f entsteht G_g.Verschiebe G_f in x-Richtung so, dass G_g durch den Ursprung geht. Bestimme $g(x)$.

3 Wie muss man die Parabel mit $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{11}{2}$ verschieben, um sie zur Deckung zubringen mit der Parabel mit $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + x$?

4 $f(x) = x^3 - 4x$; durch Verschieben von G_f entsteht G_g. Bestimme $g(x)$.

a) Zeige: G_f ist symmetrisch zum Ursprung.

b) Verschiebe G_f so, dass G_g das Symmetriezentrum (2|−1) hat.

5 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x$
Durch Strecken oder Stauchen von G_f entsteht eine Normalparabel.
a) Stauche G_f in x-Richtung so, dass die Normalparabel oben offen ist.
b) Strecke G_f in y-Richtung so, dass die Normalparabel oben offen ist.
c) Strecke G_f in y-Richtung so, dass die Normalparabel unten offen ist.

•6 Beschreibe den Zusammenhang zwischen G_f und G_g , wenn gilt:
a) $g(x) = f(x) + 3$ **b)** $g(x) = f(x + 3)$ **c)** $g(x) = f(2(x+3))$
d) $g(x) = f(\frac{1}{2}x - 2)$ **e)** $g(x) = \frac{1}{2}f(3x + 6) - 1$

•7 a) $g(x) = u \cdot f(v \cdot x)$
Welche Beziehung gilt zwischen u und v, wenn G_g durch zentrische Streckung aus G_f entsteht ? Wo ist das Zentrum ?
b) Zeige: Alle Parabeln sind ähnlich.
Tip: Bilde die Parabel mit $f(x) = ax^2 + bx + c$ durch zentrische Streckung ab auf die (verschobene) Normalparabel mit $g(x) = x^2 + dx + e$.
Gib d und e an in Abhängigkeit von a, b und c.

2.4 Nullstellen und Faktorisierung

Die Nullstellen geben uns den ersten Überblick über die Lage einer Kurve im Koordinatensystem. Bei quadratischen und affinen Funktionen findet man sie ohne Weiteres. Für Polynome höheren Grades haben wir (in der Schule) keine praktikablen Formeln mehr. Schon bei einem Term wie $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$ ist eine Nullstelle deshalb nur mit einem neuen Verfahren zu finden. Wäre der Term faktorisiert, dann könnte man eine Nullstelle womöglich direkt ablesen; so hat die Funktion g mit $g(x) = (x-a) \cdot h(x)$ mit Sicherheit die Nullstelle a, denn $g(a) = (a-a) \cdot h(a) = 0$. Ist der Term aber nicht faktorisiert, wie im Beispiel oben, so hilft vorerst nur noch Raten: sind +1 oder –1 Nullstellen?
$f(1) = 1 + 1 - 4 - 4 = -6$, 1 ist keine Nullstelle
$f(-1) = -1 + 1 + 4 - 4 = 0$, –1 ist eine Nullstelle
Welche Zahlen kommen für sinnvolles Probieren noch infrage? Man sucht freilich nur unter den ganzen Zahlen. Dafür ist ein einfacher Satz recht nützlich:

Hat die Gleichung $c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0 = 0$
nur ganzzahlige Koeffizienten $c_n, c_{n-1}, \ldots, c_1, c_0$,
dann ist jede ganzzahlige Lösung ein Teiler von c_0.

Beweis: a sei eine ganzzahlige Nullstelle:
$c_n a^n + c_{n-1} a^{n-1} + \ldots + c_n a + c_0 = 0$, also ist
$c_0 = -(c_n a^n + c_{n-1} a^{n-1} + \ldots + c_n a) = -a(c_n a^{n-1} + c_{n-1} a^{n-2} + \ldots + c_n)$,
also ist a ein Teiler von c_0, qed.

Im Beispiel ist $c_0 = -4$. Teiler von -4 sind ± 1, ± 2 und ± 4.
Nur mit diesen sechs Zahlen ist Probieren sinnvoll. Wir probieren weiter:

$f(2) = 8 + 4 - 8 - 4 = 0$, 2 ist eine Nullstelle
$f(-2) = -8 + 4 + 8 - 4 = 0$, -2 ist eine Nullstelle
$f(4) = 64 + 16 - 16 - 4 = 60$, 4 ist keine Nullstelle
$f(-4) = -64 + 16 + 16 - 4 = -36$, -4 ist keine Nullstelle.

Dieses Probieren kann recht mühsam werden, und außerdem ist nicht sicher, ob man so alle Nullstellen erwischt. Es gibt ein einfaches Verfahren, das weiterhilft, wenn eine Nullstelle bekannt ist.
Wir haben gesehen, dass der Term $g(x) = (x-a)\cdot h(x)$ die Nullstelle a hat.
Jetzt zeigen wir davon die Umkehrung:

Hat ein Polynom f(x) vom Grad n die Nullstelle a,
dann lässt es sich faktorisieren zu $f(x) = (x-a)\cdot k(x)$.
$k(x)$ ist ein Polynom vom Grad $n-1$.

Beweis: Division eines Polynoms $f(x)$ durch den Faktor $(x-a)$:
$\frac{f(x)}{x-a} = k(x) + \frac{r}{x-a}$, der Rest r ist eine reelle Zahl,
also ist $f(x) = (x-a)\cdot k(x) + r$,
für eine Nullstelle a gilt dann $0 = f(a) = (a-a)\cdot k(x) + r \Rightarrow r = 0$ qed.

Im Beispiel ist 2 eine Nullstelle; deshalb muss sich das Polynom als Produkt mit dem Faktor $(x-2)$ schreiben lassen: $f(x) = (x-2)\cdot k(x)$.
Den 2. Faktor $k(x)$ finden wir mit der Polynomdivision $k(x) = f(x):(x-2)$.

$$
\begin{array}{l}
(x^3 + x^2 - 4x - 4):(x - 2) = x^2 + 3x + 2 \\
\underline{x^3 - 2x^2} \\
\quad 3x^2 - 4x - 4 \\
\quad \underline{3x^2 - 6x} \\
\qquad\quad 2x - 4 \\
\qquad\quad \underline{2x - 4} \\
\qquad\qquad\ 0
\end{array}
$$

Produktform: $f(x) = (x-2)(x^2 + 3x + 2)$

Die Faktorisierung von $k(x) = x^2 + 3x + 2$ erledigen wir mit VIETA
oder mit der Formel für die quadratische Gleichung: $x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$.
Im vollständig zerlegten Term $f(x) = (x-2)(x+1)(x+2)$ sieht man alle Nullstellen auf einen Blick: 2, -1 und -2.
Ein Faktor der Form $(x-a)$ heißt **Linearfaktor**; er zeigt die Nullstelle.
Im Beispiel haben wir ein Polynom vom Grad **3** in **3** Linearfaktoren zerlegt und **3** Nullstellen bekommen. Mehr Nullstellen kann es nicht geben, weil mehr Linearfaktoren nicht möglich sind. Allgemein gilt:

Ein Polynom vom Grad n hat höchstens n Linearfaktoren,
also höchstens n Nullstellen.

Zum Nachdenken

Der 22jährige Carl Friedrich GAUß hat 1799 in seiner Doktorarbeit bewiesen: Jedes Polynom mit reellen Koeffizienten vom Grad n lässt sich soweit faktorisieren, dass die Faktoren entweder linear oder quadratisch sind.

Die Linearfaktoren liefern die reellen Nullstellen. Die quadratischen Faktoren haben alle negative Diskriminanten, liefern also keine reellen Nullstellen.
So hat das Polynom $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ die Produktform $f(x) = (x + 1)(x^2 + x + 1)$ und damit die einzige Nullstelle –1.

Ist der Grad eines Polynoms ungerade, dann muss es mindestens eine Nullstelle geben, weil mindestens ein Linearfaktor in der Zerlegung vorkommt. Das ist auch anschaulich plausibel, denn die Kurve läuft für $x \to \pm\infty$ in entgegengesetzten Richtungen ins Unendliche und schneidet deshalb mindestens einmal die x-Achse.

Aufgaben

◊1 Gib die möglichen ganzzahligen Nullstellen an und suche durch Probieren, welche davon Nullstellen sind:

a) $f(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9$ **b)** $f(x) = x^3 - 8x^2 + 5x + 14$
c) $f(x) = x^5 - 1$ **d)** $f(x) = x^5 +1$
•e) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 8x$ **f)** $f(x) = x^3 - x - 7$

•2 Gib die möglichen ganzzahligen Nullstellen an und suche durch Probieren, welche davon Nullstellen sind:

a) $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 2$ **b)** $f(x) = x^3 - \frac{2}{3}x^2 + x - \frac{2}{3}$

3 Bestimme k(x) und r:

a) $x^3 - x^2 + 2x - 3 = (x-2)\cdot k(x) + r$ **b)** $3x^4 - 4x^2 - 12 = (x+1)\cdot k(x) + r$
c) $x^5 = (x-1)\cdot k(x) + r$

◊4 a ist eine Nullstelle von f. Faktorisiere f(x) und bestimme die übrigen Nullstellen:

a) $a = 2,\ f(x) = x^3 - x^2 - 3x + 2$ **b)** $a = -5,\ f(x) = 4x^3+20x^2-8x-40$

◊5 Errate eine Nullstelle und berechne die übrigen

a) $f(x) = x^3 + x^2 - 9x - 9$ **b)** $f(x) = x^3 - 9x^2 + 26x - 24$
c) $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x - 2$ **d)** $f(x) = x^4 - 12x^3 + 21x^2 + 98x$

6 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Bestimme a, b und c so, dass f die Nullstellen hat:

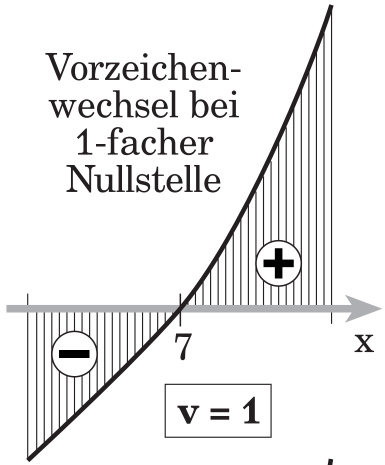
a) 1, 2 und 3 **b)** –1, 2 und –3 **c)** 0, 10 und 100

:7 Ist G_f symmetrisch zum Koordinatensystem, dann liegen alle Nullstellen symmetrisch zu 0. Begründe oder widerlege mit einem Gegenbeispiel:

a) Liegen alle Nullstellen von f so, dass mit jeder Nullstelle a auch –a eine Nullstelle ist, dann ist G_f symmetrisch zum Koordinatensystem.

b) Liegen die n Nullstellen eines Polynoms vom Grad n so, dass mit jeder Nullstelle a auch –a eine Nullstelle ist, dann ist G_f symmetrisch zum Koordinatensystem.

8 Vom Polynom $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ist bekannt, dass es 4 Nullstellen hat. Was kann man daraus schließen ? (Beachte: Es heißt nicht »genau 4 Nullstellen«)

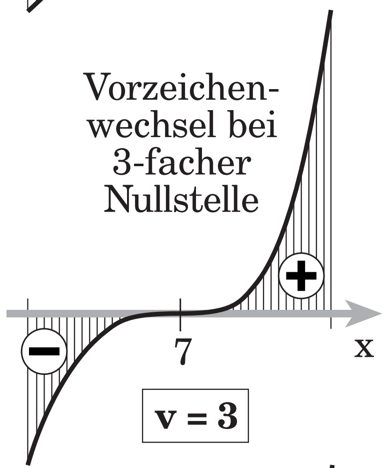


2.5 Mehrfache Nullstellen

Ist ein Polynom f(x) soweit wie möglich faktorisiert, so sind Linearfaktoren manchmal gleich – Beispiel

$$f(x) = (x-1)(x-1)(x-1)(x-2) = (x-1)^{\mathbf{3}}(x-2)^{\mathbf{1}}$$

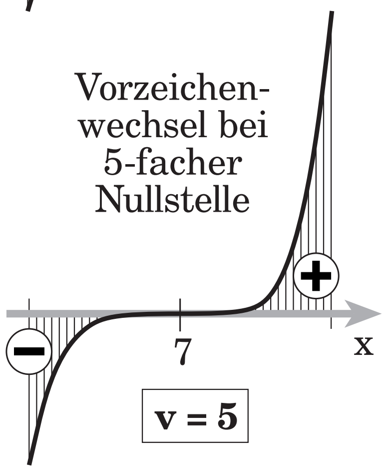
1 heißt hier **3**-fache Nullstelle
2 heißt dann **1**-fache Nullstelle

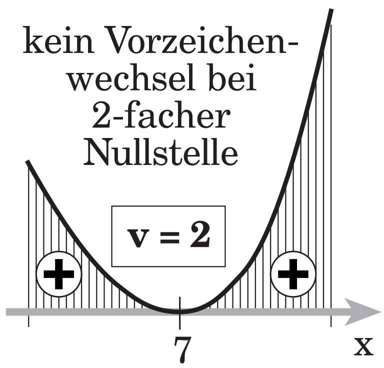


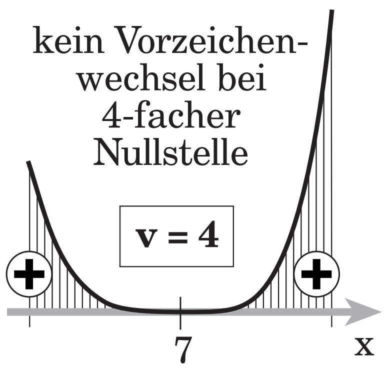
Definition: a heißt **v-fache Nullstelle** von f(x), wenn gilt $f(x) = (x-a)^v \cdot k(x)$ und $k(a) \neq 0$, $v \in \mathbb{N}$.

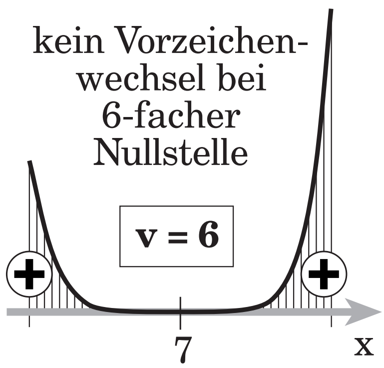
Die Vielfachheit v sagt uns, wie G_f bei a verläuft. In den Bildern ist $f(x) = 0{,}125(x-7)^v \cdot (x^2-12x+40)$.

- **Ist v ungerade, dann wechselt das Vorzeichen von f(x) bei a. G_f wechselt bei a auf die andere Seite der x-Achse.**
- **Ist v gerade, dann wechselt das Vorzeichen von f(x) bei a nicht. G_f bleibt bei a auf derselben Seite der x-Achse.**
- **Je größer v ist, desto mehr schmiegt sich G_f bei a an die x-Achse.**









Kennen wir die Nullstellen und ihre Vielfachheit, so wissen wir schon im Groben den Kurvenverlauf: Wir bestimmen das Vorzeichen der Funktion entweder für x=0 oder für $x \to +\infty$. Beim Passieren einer Nullstelle gibt es dann – je nach ihrer Vielfachheit – einen Vorzeichenwechsel oder keinen Vorzeichenwechsel der Funktion.

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{8}(x+2)^2(x-1)^3(x-3)$

Nullstellen $x = -2$ doppelt (= zweifach)

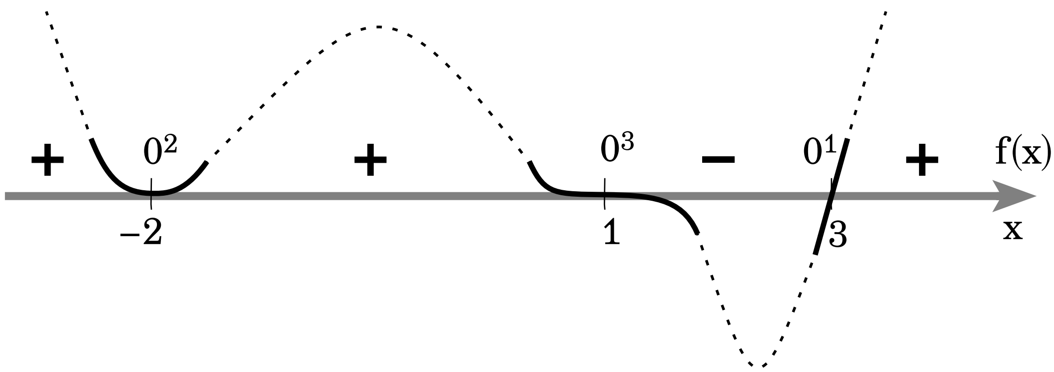
$x = 1$ dreifach

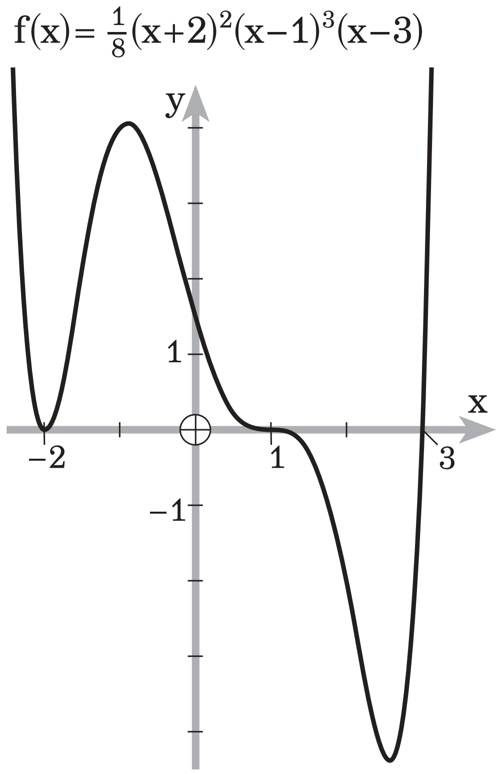
$x = 3$ einfach

$f(0) = 1{,}5$ bedeutet: die Funktion ist positiv im Intervall $]-2;1[$

Vorzeichenübersicht (Skizze genügt!)

Skizzierter Kurvenverlauf





Tatsächlicher Kurvenverlauf

Bei mehrfachen Nullstellen haben wir gesehen, dass sich die Kurve an die x-Achse schmiegt; man sagt dazu auch: Kurve und x-Achse berühren sich.

Definition: Die x-Achse heißt **Tangente von G_f in (a|0)**, wenn a zwei- oder mehrfache Nullstelle von f ist.

Tangente heißt Berührende (tangere = berühren). Diese Definition verallgemeinert den aus der Mittelstufe bekannten Tangentenbegriff: Die x-Achse heißt jetzt auch Tangente, wenn sie die Kurve durchdringt, wie beispielsweise in einer 3-fachen Nullstelle.

Aufgaben

◊1 Gib die Nullstellen mit ihrer Vielfachheit an und skizziere die Kurve:

a) $f(x) = (x + 2)^2$ **b)** $f(x) = (x + 2)^3$ **c)** $f(x) = -(x - 1)^3$

◊2 Gib die Nullstellen mit ihrer Vielfachheit an und skizziere die Kurve:

a) $f(x) = (x + 1)(x - 2)$ **b)** $f(x) = (x + 1)^2(x - 2)$
c) $f(x) = (x + 1)(x - 2)^3$ **d)** $f(x) = (x + 1)^3(x - 2)^2$

3 Gib die Nullstellen mit ihrer Vielfachheit an und skizziere die Kurve:

a) $f(x) = x^2(x + 4)^2(x - 4)(x + 8)$ **b)** $f(x) = x(x + 4)^2(x - 4)^3(x + 8)$
c) $f(x) = x^3(x + 4)^3(x - 4)^3(x + 8)^3$ **d)** $f(x) = x^2(x + 4)^2(x - 4)^2(x + 8)^2$

4 Faktorisiere und skizziere:

a) $f(x) = (x^2 - 4)^2$ **b)** $f(x) = x^2 - 4^2$ **c)** $f(x) = (x^2 - 4^2)^3$
d) $f(x) = x^4 - 2^4$ **e)** $f(x) = x^4 + 27x$ **f)** $f(x) = x^6 - 64x^4$
g) $f(x) = x^6 - 64x^3$ **h)** $f(x) = x^6 - 64x^2$ **i)** $f(x) = x^6 - 64$

◊5 Faktorisiere und skizziere:

a) $f(x) = x^3 + x^2 - 12$ **b)** $f(x) = x^4 + 6x^3 + 9x^2$
c) $f(x) = -x^5 + 13x^3 - 36x$ **d)** $f(x) = x^4 + x^3 - 9x^2 + 11x - 4$
e) $f(x) = -x^5 + 9x^3 - 4x^2 - 12x$ **f)** $f(x) = 0{,}1x^5 - 1{,}5x^3 - x^2 + 6x + 7{,}2$

6 Bestimme einen möglichst einfachen Term einer Polynomfunktion f mit den Eigenschaften:

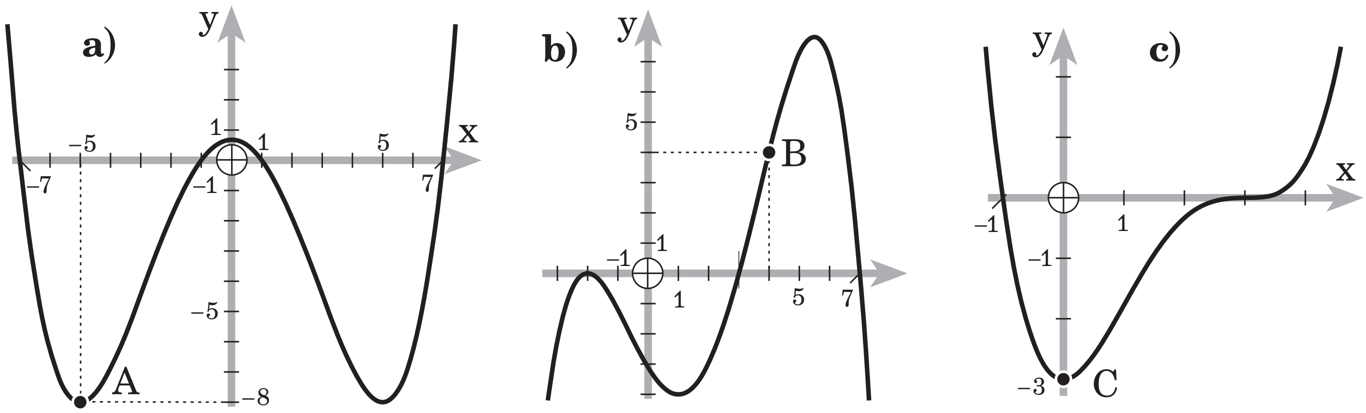
a) 2 ist einfache Nullstelle, −3 ist doppelte Nullstelle und $f(0) = -9$

b) 1 ist einfache, −2 ist doppelte, 3 ist 3-fache Nullstelle und $f(0) = 9$

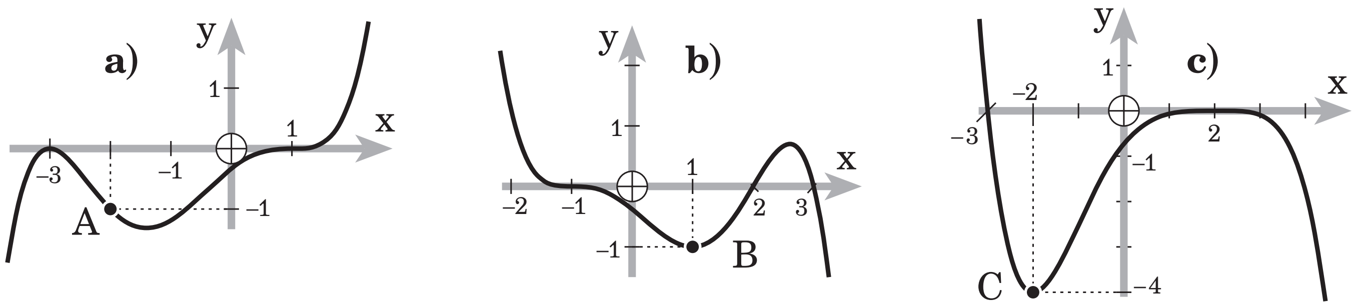
c) 2 ist 3-fache, 3 ist 2-fache, 0 ist einfache Nullstelle und $f(1) = -4$

d) 1 ist 100-fache Nullstelle und $f(0) = 1$

7 Die 3 Bilder zeigen Kurven von Polynomfunktionen 4. Grades.
Die Nullstellen und die Koordinaten der markierten Kurvenpunkte sind ganzzahlig. Bestimme die Funktionsterme.



8 Die 3 Bilder zeigen Kurven von Polynomfunktionen 5. Grades.
Die Nullstellen und die Koordinaten der markierten Kurvenpunkte sind ganzzahlig. Bestimme die Funktionsterme.



9 $f_c(x) = (x - c)(x - c + 1)(x + c - 2),\ c \in \mathbb{R}$
Für welche Werte von c ist die x-Achse Tangente der Kurve von f_c ?

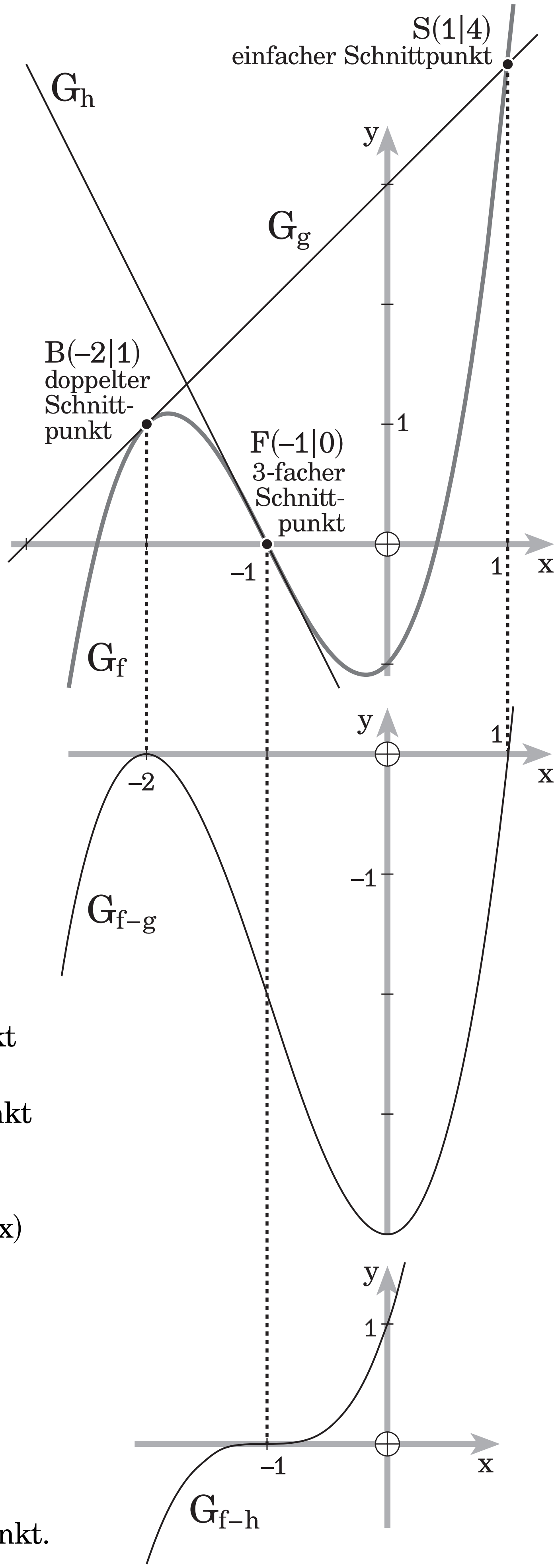
•10 $f_c(x) = x^3 - (c + 1)x^2 + cx,\ c \in \mathbb{R}$

a) Für welche Werte von c ist die x-Achse Tangente der Kurve von f_c ?

b) Für welche Werte von c hat f_c 3 verschiedene Nullstellen ?

c) Für welche Werte von c hat f_c genau eine Nullstelle ?

2.6 Schnittstellen



Schneiden sich 2 Kurven in einem Punkt S(a|b), so heißt S **Schnittpunkt** und a **Schnittstelle** der beiden Kurven. Die Schnittstelle zweier Graphen G_f und G_g findet man durch Lösen der Gleichung $f(x) - g(x) = 0$. Die Schnittstellen von f und g sind also die Nullstellen der **Differenzfunktion** f–g. Eine Schnittstelle a heißt v-fach, wenn die zugehörige Nullstelle der Differenzfunktion v-fach ist.

Beispiel: $f(x) = x^3 + 3x^2 + x - 1$
$g(x) = x + 3$
Schnitt von G_f und G_g
$f(x) = g(x)$
Differenzfunktion
$f(x) - g(x) = x^3 + 3x^2 - 4$
Schnittstellen (=Nullstellen der Differenzfunktion)
$x^3 + 3x^2 - 4 = 0$
$(x-1)(x+2)^2 = 0$
1 ist einfache Schnittstelle
–2 ist doppelte Schnittstelle
Schnittpunkte
$g(1) = 4$
(1|4) ist einfacher Schnittpunkt
$g(-2) = 1$
(–2|1) ist doppelter Schnittpunkt

$h(x) = -2x - 2$
Schnitt von G_f und G_h $f(x) = h(x)$
Differenzfunktion
$f(x) - h(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
Schnittstellen
$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$
$(x+1)^3 = 0$
–1 ist dreifache Schnittstelle
Schnittpunkt $h(-1) = 0$
(–1|0) ist dreifacher Schnittpunkt.

Wie das Beispiel zeigt, ist die Vielfachheit der Schnittstellen eng verwandt mit der der Nullstellen. Ist die Differenz $f(x)-g(x)>0$, so ist $f(x)>g(x)$ und G_f liegt über G_g; für $f(x)-g(x)<0$ liegt G_f unter G_g.
Also gilt für einen Schnittpunkt der Vielfachheit v:

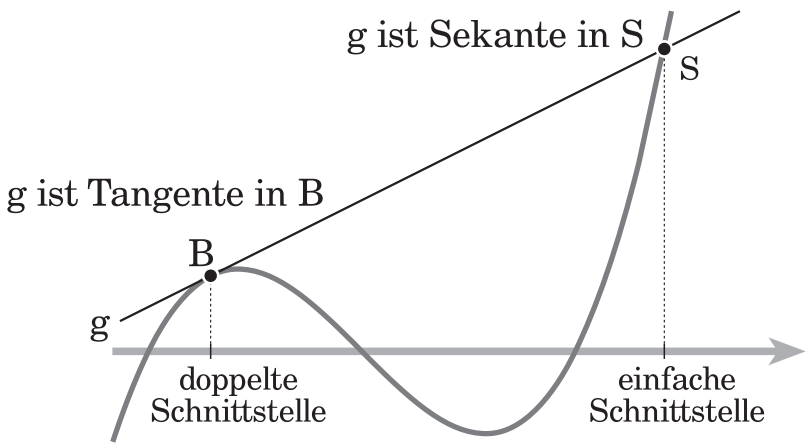
- **Ist v ungerade, so durchdringen sich die Kurven im Schnittpunkt.**
- **Ist v gerade, so durchdringen sich die Kurven nicht.**
- **Je größer v ist, desto mehr schmiegen sich die Kurven aneinander.**

Definition:	Eine Gerade g heißt **Tangente von G_f im Punkt B(a|f(a))**, wenn a zwei- oder mehrfache Schnittstelle von f und g ist; B heißt **Berührpunkt**.

Mit der Vielfachheit einer Schnittstelle präzisieren wir den Begriff Sekante :

Definition:	Eine Gerade g heißt **Sekante von G_f im Punkt B(a|f(a))**, wenn a eine genau einfache Schnittstelle von f und g ist.

Die Begriffe Tangente und Sekante beziehen sich immer nur auf einen bestimmten Kurvenpunkt. Ein und dieselbe Gerade kann Tangente und zugleich auch Sekante sein, wenn auch in verschiedenen Kurvenpunkten.



Es gibt Tangenten, denen sich Kurven besonders innig anschmiegen; auch für solche Fälle haben wir eigene Bezeichnungen:

Definition:	Ein Berührpunkt B(a|f(a)) einer Tangente heißt **Flachpunkt** der Kurve, wenn a mindestens dreifache Schnittstelle ist. Ist die Vielfachheit dieser Schnittstelle ungerade, so heißt der Berührpunkt B **Wendepunkt**, und die Tangente g heißt **Wendetangente** von G_f in B.

Im vorigen Beispiel sind die Punkte B(–2|1) und F(–1|0) beide Berührpunkte. Der Berührpunkt F ist zudem noch Flachpunkt; dieser Begriff beschreibt den flachen (tangentennahen) Verlauf von G_f dort. F ist auch ein Wendepunkt; dieser Begriff beschreibt die wechselseitige Durchdringung von G_f und Tangente; G_f wendet sich von einer Rechtskurve in eine Linkskurve. h ist Wendetangente von G_f in W.

Ein vierfacher Schnittpunkt ist ein Berührpunkt, ist ein Flachpunkt, ist aber kein Wendepunkt. Die Tangente ist Flachpunkt-Tangente.

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{256}(x^4 + 16x^3 + 96x^2)$

$g(x) = -x - 1$

Schnitt von G_f und G_g : $f(x) - g(x) =$

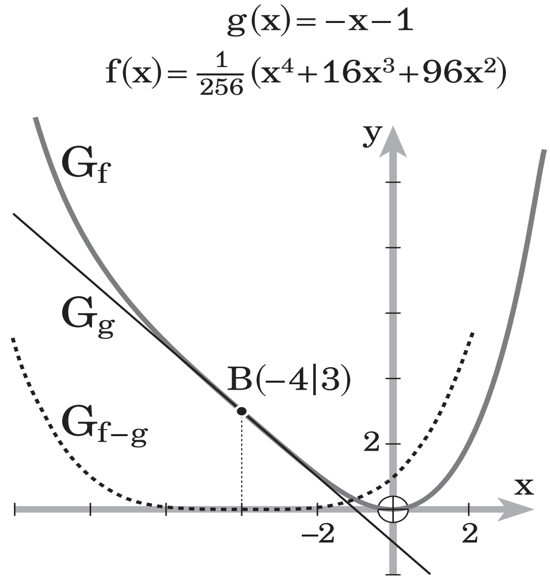
$= \frac{1}{256}(x^4 + 16x^3 + 96x^2 + 256x + 256)$

$= \frac{1}{256}(x + 4)^4$

-4 ist 4-fache Schnittstelle

$g(-4) = 3$

$B(-4|3)$ ist 4-facher Schnittpunkt, das heißt Flachpunkt von G_f (kein Wendepunkt!),



G_g ist Flachpunkt-Tangente von G_f (keine Wendetangente!).

Auch 2 Kurven berühren sich, wenn die Vielfachheit v ihres Schnittpunkts mindestens 2 ist. Und auch dann gilt: bei ungeradem v durchdringen sich die Kurven, bei geradem v berühren sie sich ohne Durchdringung.

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{8}(x^6 - 2x^5 - 8x^4 + 12x^3 + 25x^2 - 12x - 28)$

$g(x) = -\frac{1}{8}(x^4 - 9x^2 - 4x + 12)$

Schnitt von G_f und G_g:

$f(x) - g(x) =$

$= \frac{1}{8}(x^6 - 2x^5 - 7x^4 + 12x^3 + 16x^2 - 16x - 16)$

$= \frac{1}{8}(x + 2)(x + 1)^2(x - 2)^3$

-2 ist einfache Schnittstelle,

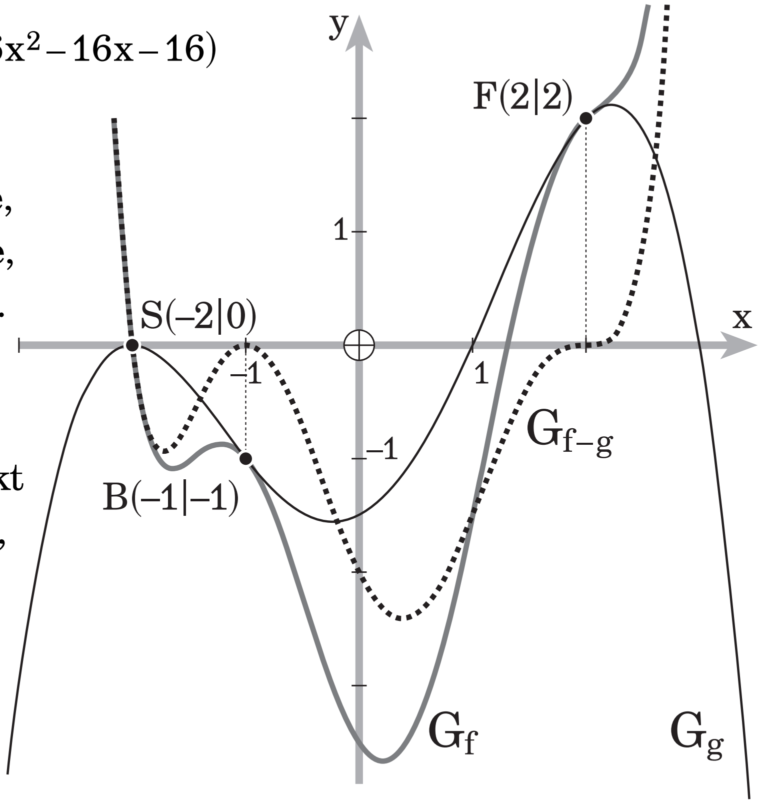
-1 ist doppelte Schnittstelle,

2 ist dreifache Schnittstelle.

$S(-2|0)$ ist einfacher Schnittpunkt (Durchdringung),

$B(-1|-1)$ ist doppelter Schnittpunkt (Berührung ohne Durchdringung),

$F(2|2)$ ist 3-facher Schnittpunkt (Berührung mit Durchdringung).



Kurvenverlauf nahe der y-Achse

Im Kapitel II 2.1 haben wir das Verhalten von Polynomkurven im Unendlichen untersucht und festgestellt, dass dafür die höchste x-Potenz ausschlaggebend ist. Der Graph von f mit $f(x) = x^3 + 3x^2 + x - 1$ verläuft im Unendlichen wie der Graph von g mit $g(x) = x^3$. Ähnlich einfach sieht man am Funktionsterm, wie eine Kurve für betragkleine x, das heißt nahe der y-Achse, verläuft:
Hier entscheiden die niedrigen x-Potenzen.

$$f(x) = x^3 + \underbrace{3x^2 + \underbrace{x \overbrace{-\ 1}^{h_0(x)}}_{h_1(x)}}_{h_2(x)}$$

Grad 0: $h_0(x) = -1$

Die Graphen von h_0 und f haben auf der y-Achse den einfachen Schnittpunkt (0|–1).

$f(x) - h_0(x) = x^3 + 3x^2 + x = x(x^2 + 3x + 1)$

Grad 1: $h_1(x) = x - 1$

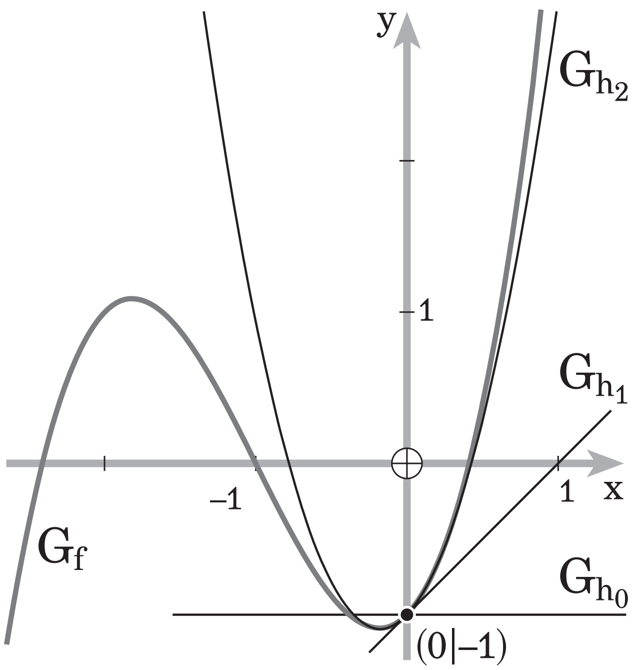
Die Graphen von h_1 und f haben auf der y-Achse den doppelten Schnittpunkt (0|–1). Die Gerade $y = x - 1$ ist Tangente von G_f in (0|–1).

$f(x) - h_1(x) = x^3 + 3x^2 = x^2(x + 3)$

Grad 2: $h_2(x) = 3x^2 + x - 1$

Die Graphen von h_2 und f haben auf der y-Achse den dreifachen Schnittpunkt (0|–1). Die Parabel $y = 3x^2 + x - 1$ berührt G_f in (0|–1) durchdringend.

$f(x) - h_2(x) = x^3$



Aufgaben

◊1 Bestimme die Schnittpunkte und ihre Vielfachheit.
Zeichne die Parabel und die Gerade.

a) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 3x$ $\quad g(x) = -2x + \frac{1}{2}$

b) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$ $\quad g(x) = \frac{1}{2}x + 2$

•2 Bestimme die Tangente mit Steigung −3 der Parabel $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$.
Berechne den Berührpunkt

•3 Durch den Ursprung gehen Tangenten der Parabel $y = -\frac{1}{4}(x-4)^2 + 3$.
Bestimme ihre Gleichungen und die Berührpunkte.

◊4 Bestimme die Schnittpunkte und ihre Vielfachheit.
Skizziere Kurve und Gerade nahe ihrem Schnittpunkt.

a) $f(x) = x(x-2)(x-4)$ $\quad g(x) = -x$

b) $f(x) = (1-x)(x+2)^2$ $\quad g(x) = \frac{9}{4}x + 4$

c) $f(x) = (2-x)(x+1)^2$ $\quad g(x) = 3x + 2$

5 Bestimme die Schnittpunkte und ihre Vielfachheit.
Skizziere Kurve und Geraden nahe ihrem Schnittpunkt.

$f(x) = \frac{1}{2}(x^3 + 6x^2 + 7x)$ $\quad g_0(x) = -x$ $\quad g_{-1}(x) = -x-1$ $\quad g_{-2}(x) = -x-2$

•6 $f(x) = x^3 - 4x$

Zeige: $W(0|0)$ ist Symmetriezentrum und Wendepunkt von G_f.

Bestimme die Wendetangente und skizziere G_f.

7 Bestimme die Schnittpunkte und ihre Vielfachheit.
Skizziere Kurve und Gerade nahe ihrem Schnittpunkt.

a) $f(x) = x^4 - 2x^2 - x$ $\quad g(x) = -x-1$

b) $f(x) = x(x-1)(x^2 - 3x + 1)$ $\quad g(x) = -x+1$

•8 Welchen Grad muss eine Polynomfunktion mindestens haben,
deren Graph einen Flachpunkt hat, der kein Wendepunkt ist ?

9 Bestimme die Schnittpunkte und ihre Vielfachheit.
Skizziere Kurve und Gerade nahe ihrem Schnittpunkt.

$f(x) = -\frac{1}{6}(x+2)^2(x^2+2)$ $\quad g(x) = -\frac{2}{3}x - \frac{7}{6}$

10 Bestimme u so, dass sich die Parabeln berühren. Zeichnung!

a) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$ $\quad g_u(x) = (x-u)^2 - 1$

b) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$ $\quad g_u(x) = (x-1)^2 - u$

11 Bestimme die Schnittpunkte und ihre Vielfachheit.
Skizziere Kurve und Parabel nahe ihrem Schnittpunkt.

a) $f(x) = \frac{1}{2}x(x-1)^2(x+1)^2$ $\quad g(x) = 2 - \frac{1}{2}x^2$

b) $f(x) = x(x^2-3)$ $\quad g(x) = (x-1)^2 - 2$

c) $f(x) = x(x^2-3)$ $\quad g(x) = 3(x-1)^2 - 2$

12 Bestimme die Schnittpunkte und ihre Vielfachheit.
Skizziere Kurve und Parabel nahe ihrem Schnittpunkt.

a) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ $\quad g(x) = 1 - 2x^2$

b) $f(x) = (x-1)^2(x+1)^2$ $\quad g(x) = 2x^2 - 3$

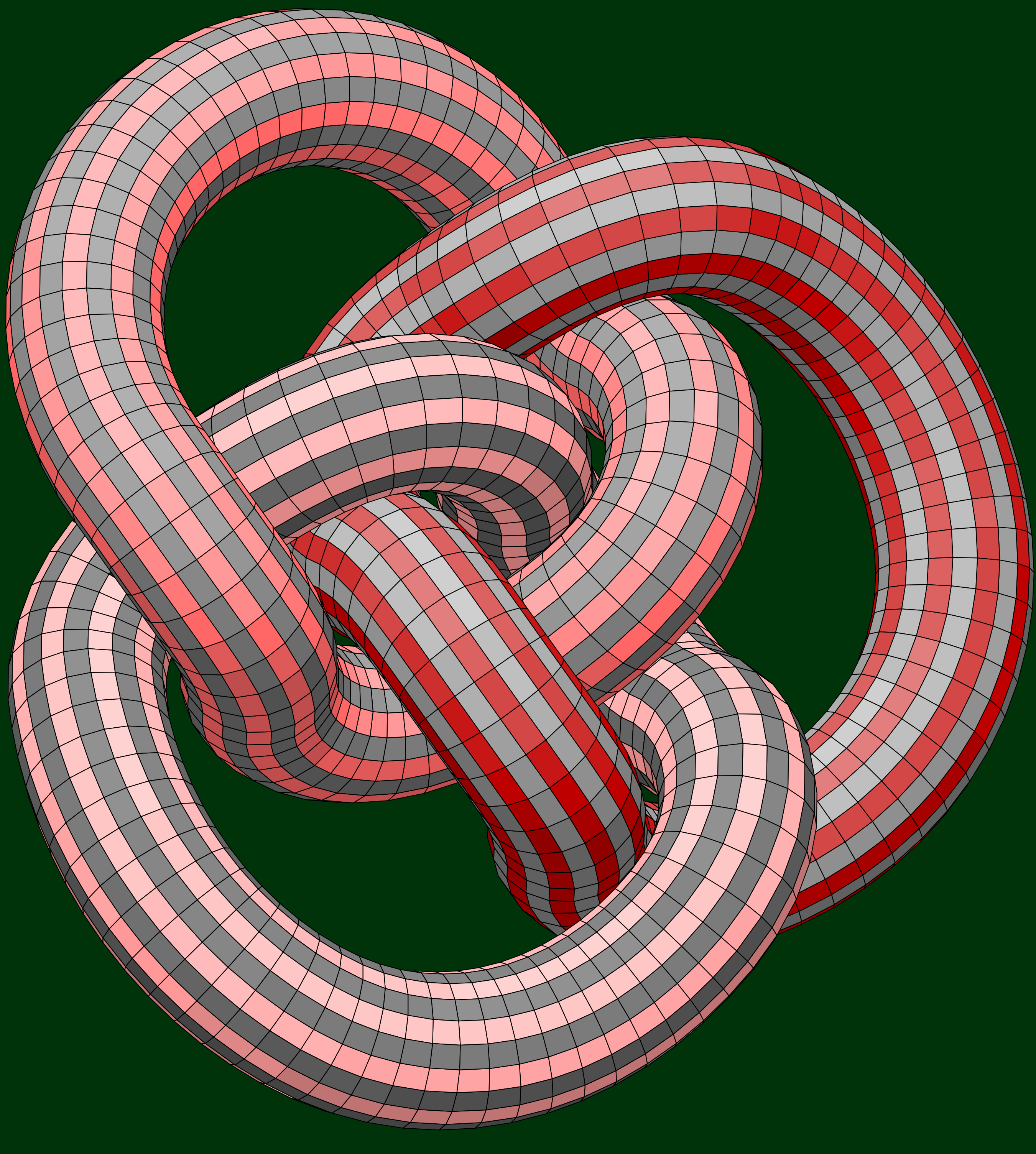
c) $f(x) = (x-1)^2(x+1)^2$ $\quad g(x) = 4(x+1)^2$

:13 Wie müssen die Terme zweier Polynomfunktionen 3. Grades gebaut sein, damit ihre Graphen genau 2 einfache Schnittpunkte haben ?
Gib ein Beispiel an.

:14 Bestimme die Schnittpunkte und ihre Vielfachheit.
Skizziere die Kurven nahe ihren Schnittpunkten.

$f(x) = \frac{1}{120}(x^4 - 15x^3 + 26x^2 + 168x - 216)$

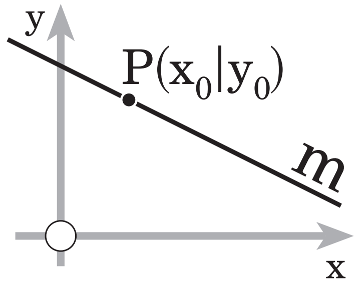
$g(x) = \frac{1}{120}(-x^4 + 5x^3 + 24x^2)$



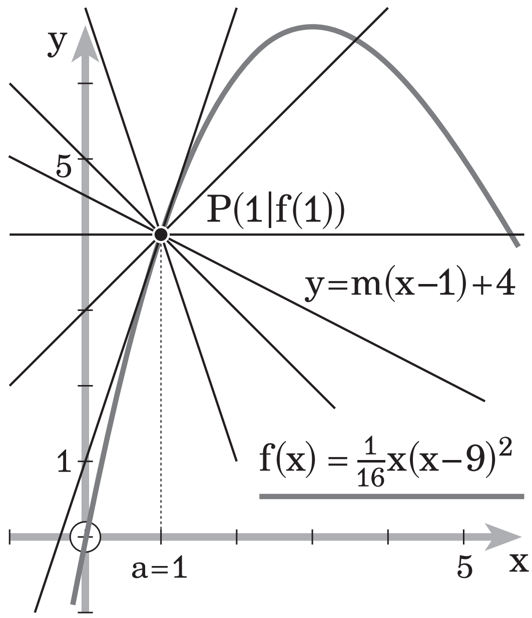
III. Ableitung der Polynomfunktion

1. Tangentensteigung – Kurvensteigung

Im vorigen Kapitel haben wir die Tangente in (a|f(a)) als Gerade eingeführt, die den Graphen in einem mindestens doppelten Schnittpunkt trifft. Wir werden jetzt sehen, wie man die Steigung der Tangente in (a|f(a)) findet – und damit auch die Gleichung der Tangente.



Zur Erinnerung:
Eine Gerade mit Steigung m durch einen Punkt $P(x_0|y_0)$ hat die Gleichung $y = m(x - x_0) + y_0$.
(Punkt-Steigungsform, I. Kapitel)



Eine Gerade mit Steigung m durch den Punkt P(a|f(a)) einer Polynomkurve der Funktion f hat die Gleichung $y = m(x-a) + f(a)$.
Das Bild zeigt die zugehörige Sekantenschar: Alle gehen durch den Kurvenpunkt (a|f(a)) und unterscheiden sich nur in der Steigung m.
Eine dieser Geraden hat eine Sonderstellung: Sie ist Tangente, bei ihr ist der Punkt (a|f(a)) mindestens doppelter Schnittpunkt.
Welche Steigung m hat sie?

Schnitt der Graphen von
$y = f(x)$ und $y = g(x) = m(x - a) + f(a)$:

$$f(x) - g(x) = 0$$
$$f(x) - [m(x-a) + f(a)] = 0$$
$$f(x) - f(a) - m(x-a) = 0$$

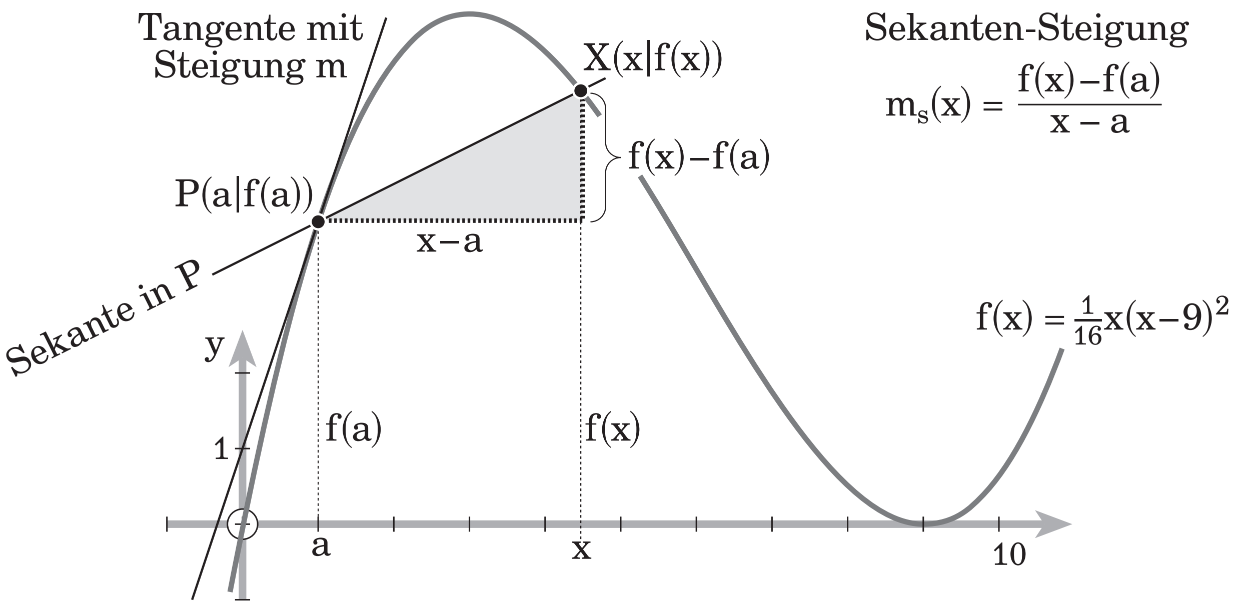
Das Polynom $f(x) - g(x)$ soll bei a eine mindestens doppelte Nullstelle haben, es muss sich also schreiben lassen als Produkt: $f(x) - g(x) = (x-a)^2 \cdot r(x)$,

also gilt: $f(x) - f(a) - m(x-a) = (x-a)^2 \cdot r(x)$ oder
$$f(x) - f(a) = m(x-a) + (x-a)^2 \cdot r(x),$$

für $x \neq a$: $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = m + (x-a) \cdot r(x)$

Das Zählerpolynom $f(x) - f(a)$ hat für $x=a$ den Wert $f(a)-f(a)=0$.
a ist also Nullstelle von $f(x)-f(a)$. Deshalb kann man den Zähler faktorisieren:
$$f(x)-f(a)=(x-a) \cdot m_s(x)$$

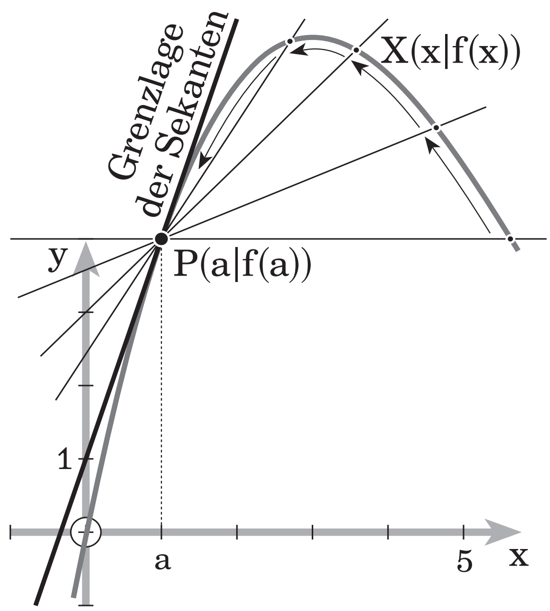
Für $x \neq a$ hat der Bruch $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ und damit $m_s(x)$ eine anschauliche Bedeutung:



Die Gleichung $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = m + (x-a)\cdot r(x)$ beschreibt einen Zusammenhang zwischen der Tangentensteigung m und der Sekantensteigung $m_s(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$; für $x \neq a$ gilt also $m_s(x)=m+(x-a)\cdot r(x)$. Die rechte Seite $m+(x-a)\cdot r(x)$ ist auch für $x=a$ definiert, aber dann keine Sekantensteigung mehr. Wegen $m+(a-a)\cdot r(a) = m$ ergibt sich die gesuchte Tangentensteigung m beim Einsetzen von a für x. Die Funktion s der Sekantensteigung, die nur für $x \neq a$ definiert ist, haben wir damit ergänzt durch den Wert bei a, der sich als Tangentensteigung entpuppt!

Geometrische Vorstellung:

Der Kurvenpunkt X(x|f(x)) läuft auf der Kurve auf den Punkt P(a|f(a)) zu. Dabei dreht sich die Sekante um P. Wenn im Grenzfall (Limes!) X in P landet, dann verschmelzen die beiden Schnittpunkte X und P zu einem mindestens doppelten Schnittpunkt, dann geht die Sekante über in die Tangente. Man sagt deshalb: Die Tangente ist die Grenzlage von Sekanten.



Wir haben ausführlich einen Weg geschildert, wie man die Steigung m der Tangente in einem Punkt (a|f(a)) einer Polynomkurve findet. Eine knappe, symbolische Schreibweise fasst diesen Vorgang kurz zusammen:

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Sprechweise: Limes (=Grenzwert) für x gegen a von $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

> Definition: Tangentensteigung bei a: $\lim\limits_{x \to a}$ (Sekantensteigung bei a)
>
> $$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Wie errechnet sich bei Polynomfunktionen die Tangentensteigung als Grenzwert der Sekantensteigung?

- In einer Nebenrechnung beseitigt man den Nenner (x–a):
  Man bildet die Differenz f(x)–f(a),
  klammert (x–a) aus und kürzt oder macht die Polynomdivision durch (x–a).
- Man berechnet von dieser umgeformten Sekantensteigung den Grenzwert.
  Bei Polynomfunktionen setzt man a für x ein.

1.Beispiel: Gegeben ist $f(x) = \frac{1}{16}x(x-9)^2$.

Gesucht ist die Gleichung der Gerade, die G_f bei 1 berührt.

$$m = \lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{16}x(x-9)^2-4}{x-1}$$

Nebenrechnung $\frac{\frac{1}{16}x(x-9)^2-4}{x-1} = \frac{x^3-18x^2+81x-64}{16(x-1)}$

Polynomdivision (muss aufgehen!)

$(x^3 - 18x^2 + 81x - 64):(x - 1) = x^2 - 17x + 64$

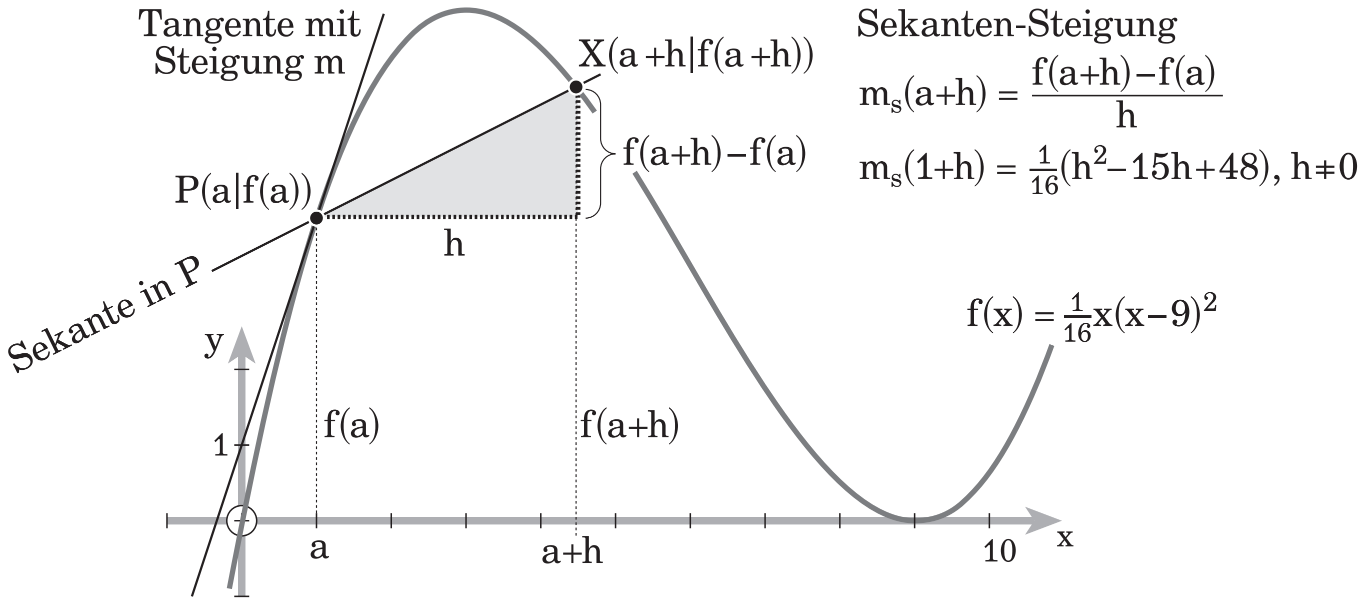
Sekantensteigung $m_s(x) = \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{1}{16}(x^2-17x+64)$,

Tangentensteigung $m = \lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{16}(x^2-17x+64) = 3$

Punkt-Steigungsform $y = m(x - x_0) + y_0 = 3(x-1) + 4 = 3x + 1$

Tangentengleichung $y = 3x + 1$

Wir verwenden künftig die h-Methode, sie vereinfacht die Rechnung:
Man zählt von Punkt P aus und setzt $x-a=h$ oder $x=a+h$.



Symbolisch: $m = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{16}(h^2-15h+48) = 3$

Kurvensteigung

Mit dem Sekantenverfahren ist es also möglich, für jeden Punkt einer Polynomkurve die Tangentensteigung zu berechnen. Mit der Tangentensteigung definiert man die Kurvensteigung:

Definition:	Die Steigung m eines Graphen G_f im Punkt $(a\|f(a))$ ist gleich der Steigung der Tangente in diesem Punkt.

Im vorigen Beispiel gilt: Die Kurve zur Gleichung $y = \frac{1}{16}x(x-9)^2$ hat im Punkt $(1|4)$ die Steigung $m = 3$.

Bei einer Polynomfunktion kann man jeder definierten Stelle x die Steigung im Kurvenpunkt $(x|f(x))$ zuordnen: Damit erzeugt man eine neue Funktion, die Steigungsfunktion von f. Diese heißt auch Ableitungsfunktion von f oder kurz Ableitung von f; man schreibt dafür f'.

Definition:	Die Steigungsfunktion einer Funktion f heißt **Ableitung f'**. Für sie gilt $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

2. Beispiel: Ableitungsterm f'(x) von $f(x) = \frac{1}{16}x(x-9)^2$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{16}(x+h)(x+h-9)^2 - \frac{1}{16}x(x-9)^2}{h}$$

Nebenrechnung

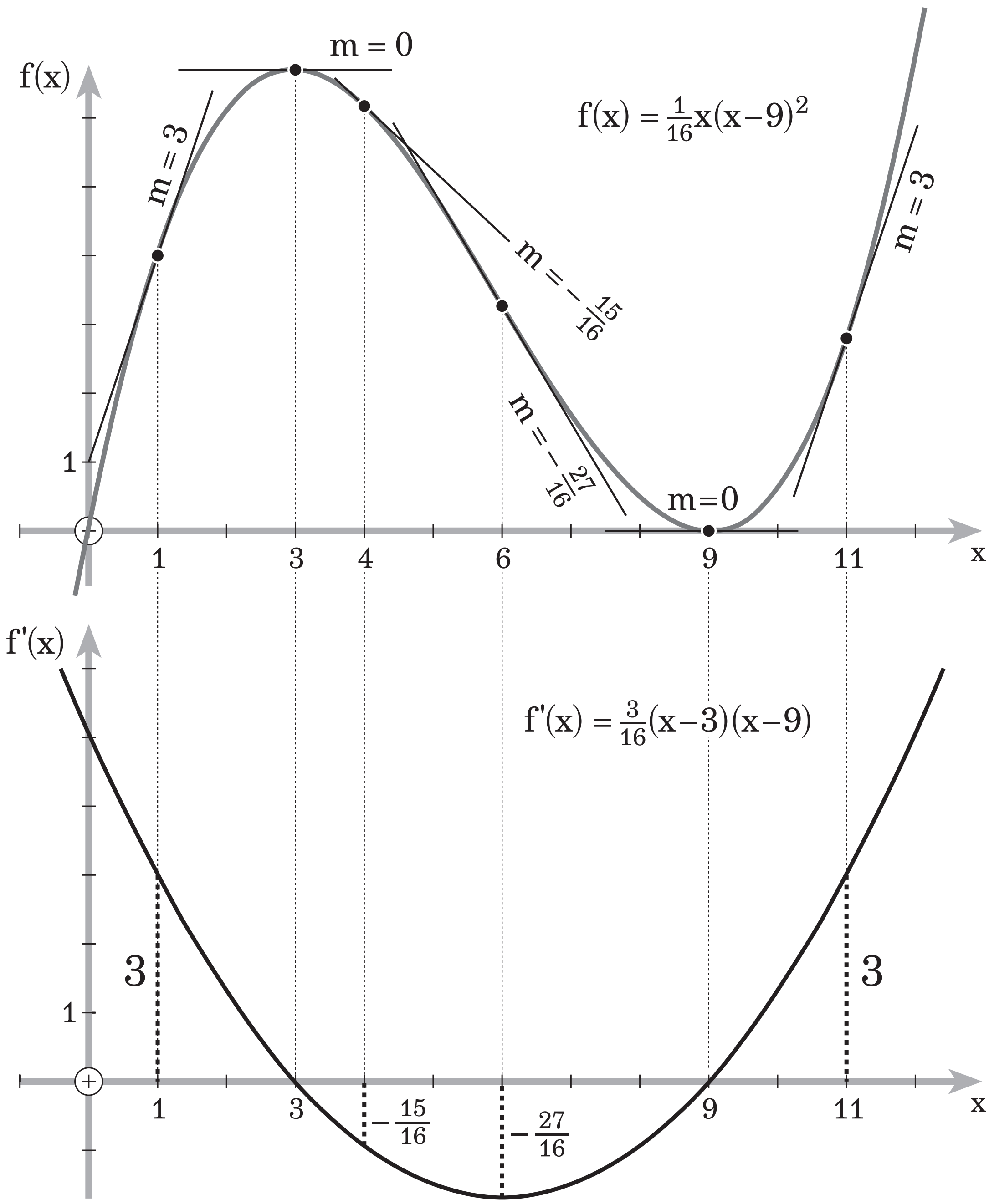
$$\frac{1}{16h}\left[(x+h)(x^2+h^2+81+2xh-18x-18h) - x(x^2-18x+81)\right]$$

$$= \frac{1}{16h}(3xh^2 + 3x^2h - 36xh + h^3 + 81h - 18h^2)$$

$$= \frac{1}{16}(3xh + 3x^2 - 36x + h^2 + 81 - 18h)$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{16}(3x^2 - 36x + 81 + h^2 - 18h + 3xh)$$

$$f'(x) = \frac{1}{16}(3x^2 - 36x + 81) = \frac{3}{16}(x^2 - 12x + 27) = \frac{3}{16}(x-3)(x-9)$$



Mit $f'(x) = \frac{3}{16}(x-3)(x-9)$ können wir zu jedem x sofort die Kurven- oder Tangentensteigung im Punkt $(x|f(x))$ berechnen.
So hat die Kurve im Punkt $(1|4)$ die Steigung $f'(1) = \frac{3}{16}(-2)(-6) = 3$.
$x=9$ ist doppelte Nullstelle von f, also ist dort die x-Achse Tangente von G_f. Demnach muss die Ableitung bei $x=9$ den Wert 0 haben, was man durch Einsetzen leicht bestätigt: $f'(9) = \frac{3}{16}\cdot 6\cdot 0 = 0$.
Auch bei $x=3$ hat die Ableitung den Wert 0, denn $f'(3) = 0$.
G_f hat also im Punkt $(3|\frac{27}{4})$ noch eine waagrechte Tangente.

Tangentengleichung

Die Punkt-Steigungsform einer Gerade mit Steigung m durch einen Punkt $P(x_0|y_0)$ ist $y = m(x-x_0) + y_0$. Daraus ergibt sich die Tangentengleichung so:

$P(x_0|y_0)$ ist der Berührpunkt $P(a|f(a))$,
$m = f'(a)$ ist die Steigung der Kurve,
Gleichung der Tangente in $P(a|f(a))$: $\mathbf{y = f'(a)\cdot(x-a) + f(a)}$

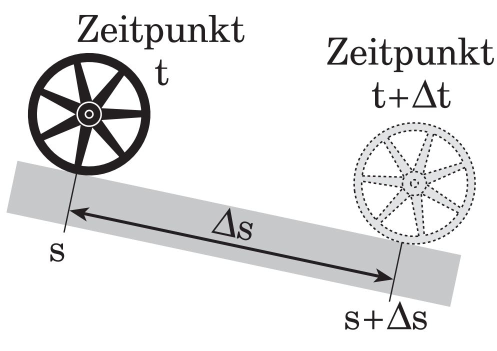
Bezeichnungen

Die Sekantensteigung $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ nennt man wegen ihrer Bauart auch **Differenzenquotient**.

Die Tangentensteigung $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ nennt man auch **Differentialquotient**.

f'(x) bestimmen heißt auch **ableiten** oder **differenzieren**. Der Teil der Mathematik, der von all dem handelt, heißt **Differentialrechnung**.

Differenzenquotient und Differentialquotient in der Bewegungslehre

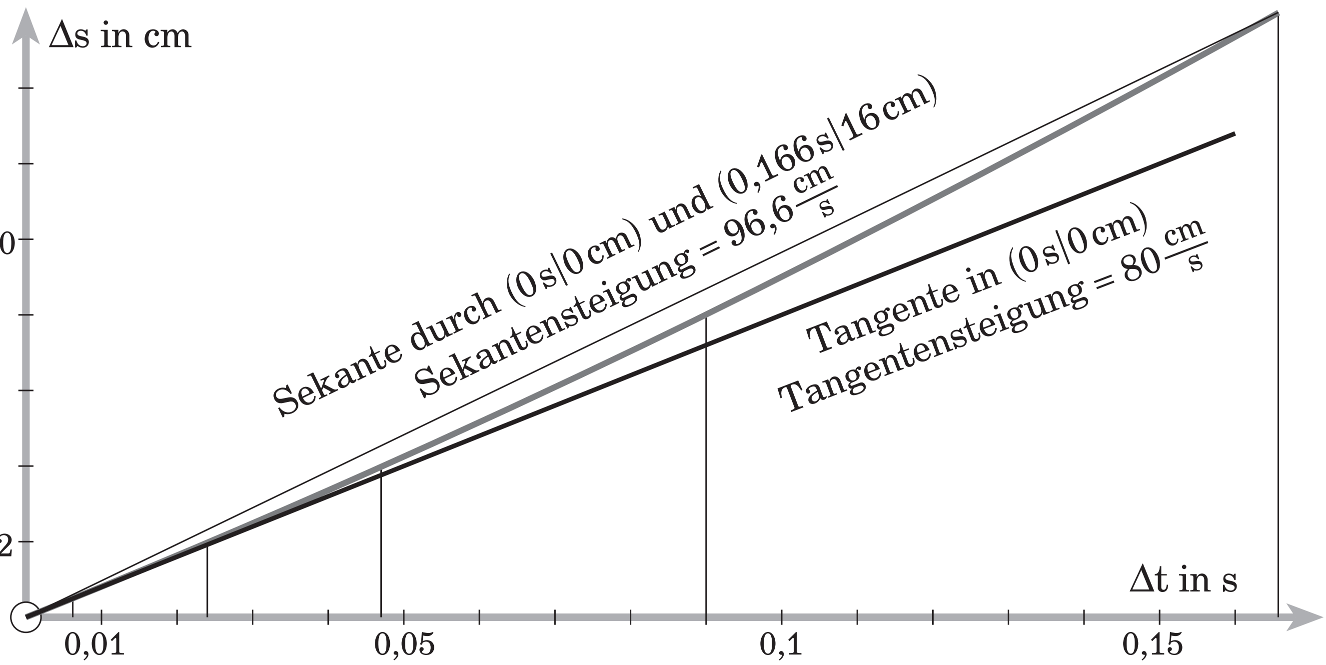


Ein Rad rollt eine Rampe runter. Seine Geschwindigkeit wird von Moment zu Moment größer. Was aber soll man sich unter einer »Momentangeschwindigkeit« vorstellen, wie kann man sie messen? Messen kann man nur eine Wegstrecke Δs und eine Zeitspanne Δt; dabei ergibt sich aber die **mittlere Geschwindigkeit** $\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$.
Der Ort s, wo das Rad gerade ist, hängt ab von der Zeit t, ist also eine Funktion von t. $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ ist ein Differenzenquotient dieser Funktion. Im Zeit-Ort-Diagramm entspricht $\bar{v}$ der Sekantensteigung m_s im x-y-Diagramm. Um $\bar{v}$ zu bestimmen, legt man Δs fest und misst Δt zum Beispiel mit 2 Lichtschranken: Die eine steht am momentanen Ort s des Rads, die andre am Ort $s+\Delta s$. Die Momentangeschwindigkeit v in s ist hier sicher kleiner als die mittlere Geschwindigkeit $\bar{v}$, weil das Rad auf Δs ja schneller wird. Durch Verkleinerung von Δs hofft man, dem Wert v näher

zu kommen. Eine Messwert-Tabelle könnte so aussehen:

Δs in cm	16	8	4	2	1	0,5
Δt in s	0,1657	0,0899	0,0472	0,0243	0,0123	0,00620
$\bar{v}$ in $^{cm}/_{s}$	96,6	89,0	84,7	82,3	81,3	80,6

Mit Δs wird auch Δt immer kleiner; der Differenzenquotient aber ändert sich immer weniger und scheint auf einen Grenzwert zuzulaufen, hier wohl in der Gegend von 80 cm/s. Es liegt nahe, die Momentangeschwindigkeit v zu definieren als $v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$. Die Momentangeschwindigkeit ist also der Differentialquotient der Ort-Zeit-Funktion bei s. Im Zeit-Ort-Diagramm entspricht v der Tangentensteigung im x-y-Diagramm.

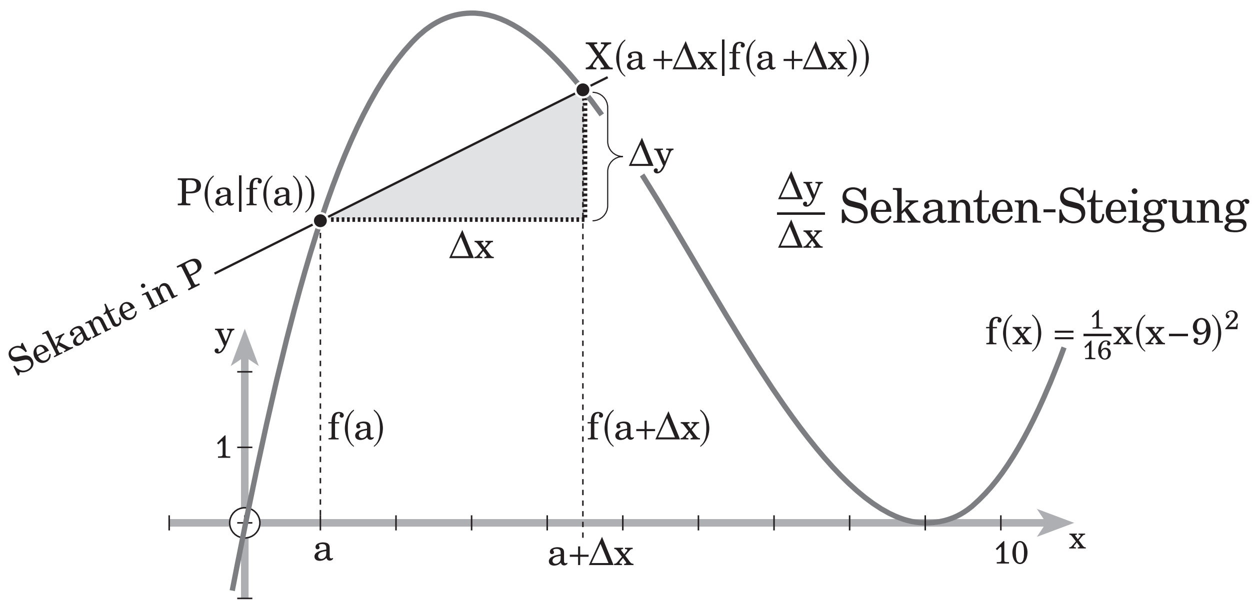


Geschichtliches

Das »Tangentenproblem«, nämlich Tangenten einer Kurve zu definieren und zu berechnen, haben die Mathematiker erst im 17. Jahrhundert angegangen. René DESCARTES (1596 bis 1650) nennt es das nützlichste und allgemeinste Problem, das er kenne. Als einer der ersten kommt Pierre DE FERMAT (1601 bis 1665) zu einer befriedigenden Lösung; er verwendet ein Verfahren, dem das unsre nachempfunden ist. Isaac NEWTON (1642 bis 1727) und Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1646 bis 1716) präzisieren und vervollkommnen die Differentialrechnung unabhängig voneinander. Newton kennzeichnet die Ableitung mit einem Punkt, schreibt also $\dot{f}$ oder $\dot{y}$ (wie es die Physiker heute noch tun). Die Mathematiker dagegen schreiben heute die 1797 von Joseph Louis de LAGRANGE (1736 bis 1813) stammenden Symbole f' und y'. Bei ihm findet man statt f'(x) auch die schon von Leibniz eingeführten und heute noch üblichen Ausdrücke

$\frac{dy}{dx} = \frac{d\,f(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\,f(x)$ $\qquad$ $\frac{d}{dx}(\ldots)$ heißt »leite (…) nach x ab«

Das erinnert an $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, wobei der Quotient der Differenzen Δy und Δx die Sekantensteigung beschreibt.



$\frac{dy}{dx}$ sieht zwar aus wie ein Quotient – dieses Gebilde heißt auch Differentialquotient – bedeutet aber in Wirklichkeit den Term der Ableitungsfunktion.

Deshalb hat sich dafür eine seltsame Sprechweise eingebürgert:

»dy nach dx« — oder für $\frac{d}{dx}\,f(x)$ die Sprechweise »d nach dx von f(x)«.

Die Ableitung von $f(x) = \frac{1}{16}x(x-9)^2$ ist $f'(x) = \frac{3}{16}(x-3)(x-9)$,

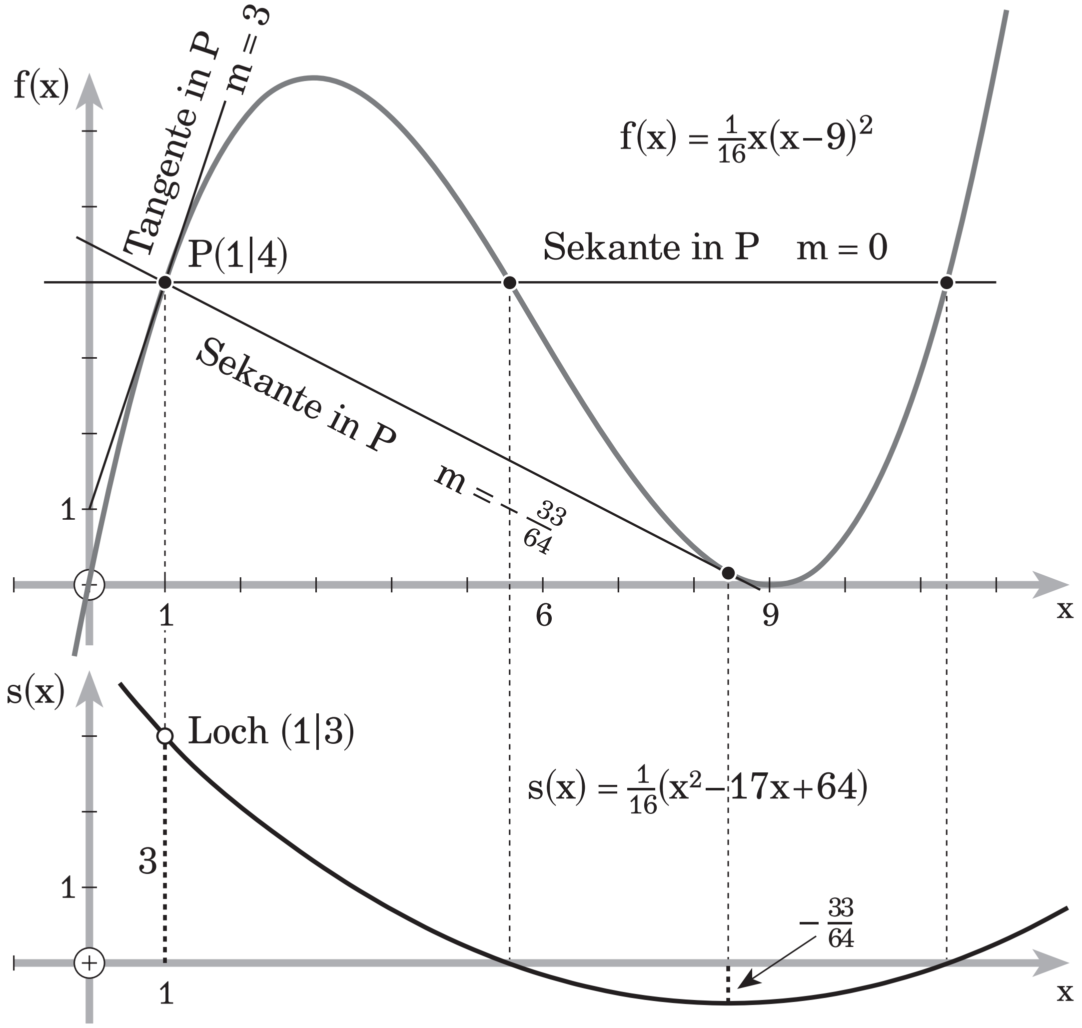
oder anders ausgedrückt $\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{16}x(x-9)^2\right] = \frac{3}{16}(x-3)(x-9)$

Zum Nachdenken

Beim Berechnen der Tangentensteigung haben wir die Funktion s der Sekantensteigung eingeführt $m_s(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Ist f(x) ein Polynom, so lässt sich der Bruch kürzen mit (x–a); $m_s(x)$ ist dann auch ein Polynom, sein Grad ist um 1 kleiner als der von f(x). Weil der Term $m_s(x)$ für x=a nicht definiert ist, hat der Graph von m_s ein Loch bei x=a. Wir illustrieren das mit der Funktion vom 1. Beispiel:

$f(x) = \frac{1}{16}x(x-9)^2$, $D_f = \mathbb{R}$

für a=1 ist $m_s(x) = \frac{1}{16}(x^2-17x+64)$, $D_s = \mathbb{R}\setminus\{1\}$



$m_s(x)$ gibt für jedes x die Steigung der Sekante durch P(1|4) an.

Wir interessieren uns für die Steigung der Tangente in P.

Den Wert m=3 haben wir mit dem Grenzwert $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{16}(x^2 - 17x + 64)$ berechnet.

Im Bild zeigt sich m=3 als y-Wert des Punkts, der in das Loch passt.

Formal geht man so vor: Weil man in $m_s(x)$ den Wert x=1 nicht einsetzen darf, definiert man eine neue Funktion $\tilde{m}_s$, die für $x \neq 1$ mit s übereinstimmt, aber für x=1 so ergänzt ist, dass der zugehörige Graphenpunkt das Loch füllt.

$\tilde{m}_s$ heißt auch **stetige Ergänzung** (oder stetige Fortsetzung) von m_s bei 1.

$$\tilde{m}_s(x) = \begin{cases} m_s(x) = \frac{1}{16}(x^2 - 17x + 64), \text{ für } x \neq 1 \\ 3, \text{ für } x = 1 \end{cases}$$

Bei Polynomfunktionen ergibt sich der gesuchte Wert $m = \tilde{m}_s(a)$ einfach durch Einsetzen von a in den gekürzten Term $m_s(x)$. Bei komplizierteren Funktionen ist das nicht mehr so einfach, wie wir später sehen werden.

Aufgaben

◊1 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+3x$ $P(1|y_P)$ $A(2|y_A)$ $B(1{,}5|y_B)$ $C(0{,}5|y_C)$

a) Berechne die Steigungen der Sekanten PA, PB und PC.

b) Berechne die Steigung der Tangente im Punkt P.

2 $f(x) = x^2-2x-3$ Berechne die Gleichungen der Tangenten in:

a) $A(1|y_A)$ **b)** $B(-1|y_B)$ **c)** $C(2|y_C)$

3 $p(x) = c_nx_n + \ldots + c_1x + c_0$ g: $y = f(x) = c_1x + c_0$
Zeige durch Berechnung der Tangentensteigung:
g ist Tangente von G_p in $(0|c_0)$.

4 Bestimme die Gleichung der Tangente im Kurvenpunkt T:

a) $f(x) = 3x^3 - 4x$ $T(0|?)$ **b)** $f(x) = x^3 - 6x^2 - x + 6$ $T(1|?)$

c) $f(x) = x^4 - x^3$ $T(2|?)$

5 Bestimme f'(x):

a) $f(x) = 3x^3 - 4x$ **b)** $f(x) = x^3 - 6x^2 - x + 6$ **c)** $f(x) = x^4 - x^3$

6 Bestimme f'(x):

a) $f(x) = ax^2 + bx + c$ **b)** $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

•7 a sei eine mindestens doppelte Nullstelle von f.
Zeige durch Berechnung der Kurvensteigung in $(a|0)$,
dass die x-Achse dort Tangente ist.

2. Ableitungsregeln für Polynome

Potenz $f(x) = x^n$

Berechnet man die Ableitungen der ersten Potenzen von x,
so zeigt sich eine auffällige Regelmäßigkeit:

f(x)	$1 = x^0$	$x = x^1$	x^2	x^3	x^4
f'(x)	0	1	$2x$	$3x^2$	$4x^3$

Man vermutet die allgemeine Regel: $\mathbf{\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}}$ für $n \in \mathbb{N}_0$

Beweis: Sekantensteigung $m_s(x) = \dfrac{(x+h)^n - x^n}{h}$, $h \neq 0$

Nebenrechnung

$(x+h)^n = (x+h)\cdot(x+h)\cdot \ldots \cdot(x+h)$
$= x^n + n\cdot hx^{n-1} + h^2\cdot$Restpolynom

x^n entsteht, wenn man aus jeder Klammer nur den 1. Summanden nimmt. nx^{n-1} entsteht, wenn man aus einer Klammer den 2. Summanden h und aus den restlichen (n–1) Klammern das x nimmt; das geht n-mal, weil n Klammern da stehen. Alle andern Faktoren enthalten mindestens zweimal den Faktor h.

$$m_s(x) = \frac{x^n + nhx^{n-1} + h^2\cdot\text{Restpolynom} - x^n}{h}, \; h \neq 0$$

$$m_s(x) = nx^{n-1} + h\cdot\text{Restpolynom} \;, \; h \neq 0$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} s(x) = \lim_{h\to 0}(nx^{n-1} + h\cdot\text{Restpolynom}) = nx^{n-1} \quad \text{q.e.d.}$$

Zahlenfaktor $\dfrac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}\mathbf{(ax^n)} = \mathbf{a\cdot nx^{n-1}}$ für $n \in \mathbb{N}_0$

Beweis: Sekantensteigung $m_s(x) = \dfrac{a(x+h)^n - ax^n}{h} = a\dfrac{(x+h)^n - x^n}{h}$, $h \neq 0$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} a\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = a\cdot nx^{n-1}$$

Sonderfall: Für n=0 ergibt sich f(x)=a und f'(x)=0.
Die Ableitung einer Konstante ist 0.

Summe $\dfrac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}\mathbf{(ax^n + bx^m)} = \mathbf{a\cdot nx^{n-1} + b\cdot mx^{m-1}}$ für $m, n \in \mathbb{N}_0$

Beweis: Sekantensteigung $m_s(x) = \dfrac{a(x+h)^n + b(x+h)^m - ax^n - bx^m}{h}$, $h \neq 0$

$$m_s(x) = a\frac{(x+h)^n - x^n}{h} + b\frac{(x+h)^m - x^m}{h}, \; h \neq 0$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\left[a\frac{(x+h)^n - x^n}{h} + b\frac{(x+h)^m - x^m}{h}\right] = \mathbf{a\cdot nx^{n-1} + b\cdot mx^{m-1}}$$

Mit diesen 3 Regeln kann man jedes Polynom schnell ableiten:
- Man leitet jeden Summanden für sich ab.
- Konstante Faktoren bei x-Potenzen bleiben stehen.
- $(x^n)' = nx^{n-1}$

3. Beispiel: $\dfrac{d}{dx}[x^4 + 5x^2 - \sqrt{2}x + \frac{3}{4}] = 4x^3 + 10x - \sqrt{2}$

Aufgaben

◊**1** Berechne die Ableitung

a) $f(x) = x^2 - 2x + 1$ **b)** $f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}$ **c)** $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$

d) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + \sqrt{3}$ **e)** $f(x) = \frac{3}{4}x^4 + x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x + 3$

f) $f(x) = 5x^7 - 5x^4 + 5x^2 - 5(x+5)$

◊**2** Berechne die Ableitung

a) $f(x) = 4(x^3 + 3x - 1)$ **b)** $f(x) = -\frac{1}{12}(3x^4 - 4x^3)$

c) $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x - 1}{3}$ **d)** $f(x) = \dfrac{\sqrt{6}x^4 - 2\sqrt{3}x}{\sqrt{2}}$

e) $f(x) = x^4 - 4^4$ **f)** $f(x) = (x-2)(x^2-3)$

3 Berechne

a) $\frac{d}{dx}(ax^2 + a^2x - a^3)$ **b)** $\frac{d}{da}(ax^2 + a^2x - a^3)$

c) $\frac{d}{dt}(ax^2 + a^2x - a^3)$

•**4** Berechne

a) $\frac{d}{dx}(x^3 - 3x^2 + 2x)(a-x)$ **b)** $\frac{d}{da}(x^3 - 3x^2 + 2x)(a-x)$

c) $\dfrac{d}{dx}\,\dfrac{2ax^2 - 2a^2x - 1}{2a}$

3. Schnittwinkel

Im I. Kapitel haben wir den (spitzen) Schnittwinkel φ

zweier Geraden berechnet: $\tan\varphi = \left|\dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}\right|$.

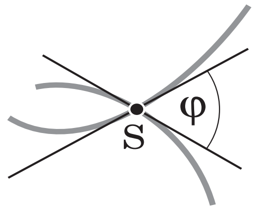
Für senkrechte Geraden (φ=90°) gilt $m_2 = -\dfrac{1}{m_1}$.

Mit diesen Formeln berechnet man auch den Schnittwinkel zweier Graphen. Bei einer Gerade liest man die Steigung m direkt ab. Im Allgemeinen ändert sich jedoch bei Graphen die Steigung von Punkt zu Punkt. Um den Schnittwinkel zu definieren, ersetzt man die Kurve durch ihre Tangente im Schnittpunkt. Man muss also zuerst die Schnittstelle berechnen.

Definition: Ist S(a|b) Schnittpunkt zweier Graphen G_f und G_g, dann heißt der Winkel φ Schnittwinkel von G_f und G_g, den die Tangenten in S(a|b) bilden.
Für den Schnittwinkel $0° \leqq \varphi < 90°$ gilt

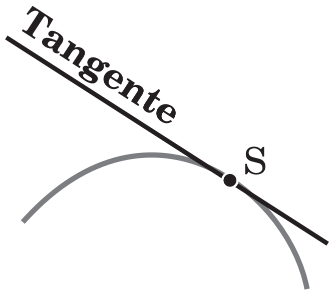
$$\tan\varphi = \left| \frac{g'(a) - f'(a)}{1 + g'(a) \cdot f'(a)} \right|$$

Für $\varphi = 90°$ gilt $g'(a) = -\dfrac{1}{f'(a)}$

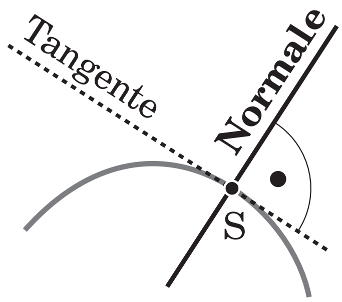


Beim Schnitt von Gerade-Kurve gibt es 2 wichtige Sonderfälle:

$\varphi = 0°$
Die Gerade ist Tangente in S.



$\varphi = 90°$
Die Gerade heißt Normale in S.



4. Beispiel: Gerade-Kurve

$g(x) = 2x - 6f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 5x + \frac{17}{2}$

Schnittpunkt

Gleichsetzen g(x)=f(x) führt zu $x^2 - 6x + 5 = 0$
aus der faktorisierten Form
$(x-1)(x-5) = 0$ liest man die Lösungen 1 und 5 ab.
Schnittpunkte: S(1|–4), T(5|4).

Die Kurvensteigungen holt man sich aus $f'(x) = -x+5$.
Wenn nichts anderes gesagt ist, geben wir die Schnittwinkel auf Zehntel Grad gerundet an.

Schnittwinkel σ in S(1|–4)

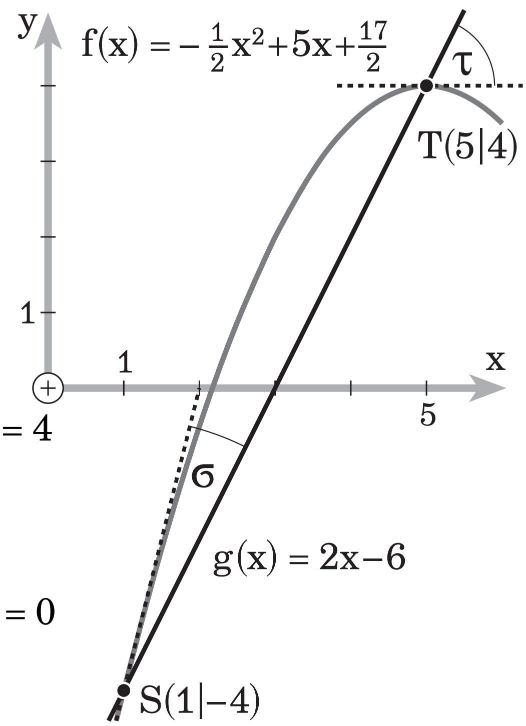
Gerade: $m_1 = 2$ Kurve: $m_2 = f'(1) = 4$

$$\tan\sigma = \left| \frac{4-2}{1+8} \right| = \frac{2}{9}, \qquad \sigma = 12{,}5°$$

Schnittwinkel τ in T(5|4)

Gerade: $m_1 = 2$ Kurve: $m_2 = f'(5) = 0$

$$\tan\tau = \left| \frac{0-2}{1+0} \right| = 2, \qquad \tau = 63{,}4°$$



5. Beispiel: Kurve-Kurve $g(x) = \frac{1}{56}(2x^3 - 23x^2 + 60x)$ $f(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 4x)$

Schnittpunkte: $g(x) - f(x) = 0$ führt zu $\frac{1}{56}(2x^3 - 51x^2 + 172x) = 0$

faktorisiert: $\frac{1}{56}x(x-4)(2x-43) = 0$

$R(0|0)$, $S(4|0)$, $T(21{,}5|188{,}125)$

$g'(x) = \frac{1}{28}(3x^2 - 23x + 30)$ $f'(x) = x - 2$

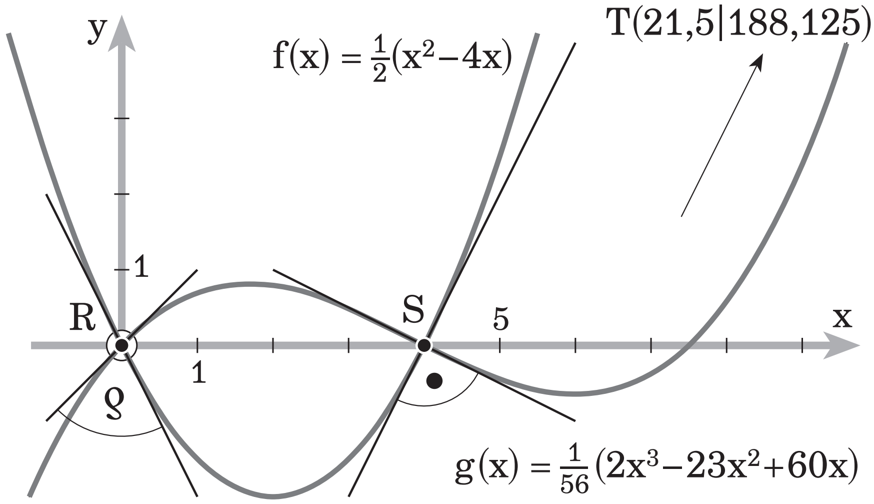
Schnittwinkel ϱ in $R(0|0)$: $g'(0) = \frac{15}{14}$ $f'(0) = -2$

$$\tan\varrho = \left| \frac{\frac{15}{4} - (-2)}{1 + \frac{15}{4}\cdot(-2)} \right| = \frac{23}{26}\ , \text{ also } \varrho = 41{,}5°$$

Schnittwinkel s in $S(4|0)$: $g'(4) = -\frac{1}{2}$ $f'(4) = 2$, also $\sigma = 90°$

Schnittwinkel t in $T(21{,}5|188{,}125)$: $g'(21{,}5) = \frac{527}{16}$ $f'(21{,}5) = \frac{39}{2}$

$$\tan\tau = \left| \frac{\frac{527}{16} - \frac{39}{2}}{1 + \frac{527}{16}\cdot\frac{39}{2}} \right| = \frac{86}{4117} = 0{,}021\ , \text{ also } \tau = 1{,}2°$$



6. Beispiel: **Kurvennormale**

Bestimme eine Gleichung der Normale im Schnittpunkt

von y-Achse und G_f mit $f(x) = \frac{1}{9}(x+3)^2(x-1)^2$.

$f(x) = \frac{1}{9}(x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9)$

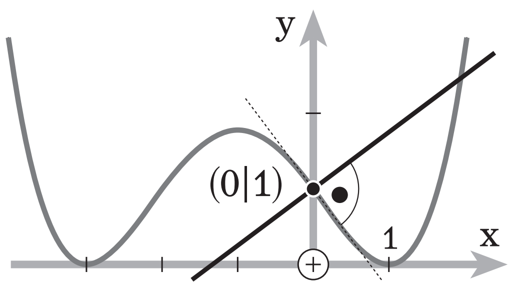
$f'(x) = \frac{1}{9}(4x^3 + 12x^2 - 4x - 12)$

Steigung bei der y-Achse $f'(0) = -\frac{4}{3}$

Steigung der Normale $m = \frac{3}{4}$

Normale durch $(0|f(0)) = (0|1)$:

$y = \frac{3}{4}x + 1$



Aufgaben

◊1 Berechne die Schnittwinkel von Kurve-Koordinatenachsen

a) $f(x) = x^2 - 2x - 15$ **b)** $f(x) = -\frac{2}{27}x^3 - \frac{2}{3}x^2$

c) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ **d)** $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - x - 2)$

◊2 Berechne die Schnittwinkel von Kurve-Gerade

a) $f(x) = \frac{1}{4}(x-3)^2$ $g(x) = x$

b) $f(x) = \frac{x}{8}(x^2 + 2x - 15)$ $g(x) = -\frac{3}{2}x$

c) $f(x) = \frac{x}{108}(5x^2 - 60x + 216)$ $g(x) = \frac{x}{3}$

•3 Bestimme die Gleichung der Gerade g, die durch den Punkt P der Kurve G_f geht und mit der Kurve den Winkel φ bildet.

a) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 6x - 20$ P(–4|?) $\varphi = 90°$

b) $f(x) = \frac{1}{12}(x^3 - 9x^2 + 33x - 21)$ P(1|?) $\varphi = 0°$

c) $f(x) = \frac{1}{4}(x^2 + 2x - 3)$ P(–3|?) $\varphi = 45°$

d) $f(x) = \frac{1}{4}(x^2 + 2x - 3)$ P(5|?) $\varphi = 45°$

•4 Gib die Gleichung einer Parabel G_f an, die folgende Eigenschaften hat:

a) Scheitel S(0|–1), G_f schneide die x-Achse unter 45°

b) Scheitel S(–1|0), G_f schneide die y-Achse unter 45°

c) Scheitel S(0|t), die Normalparabel G_f schneide die x-Achse unter 45°

5 Berechne die Schnittwinkel von Kurve-Kurve

a) $f(x) = x^2$ $g(x) = x^2 + x - 1$

b) $f(x) = x^2 - 2$ $g(x) = -2x^2 - 2x + 2$

c) $f(x) = x(1 - x)$ $g(x) = x(1 + x)$

d) $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x$ $g(x) = \frac{1}{7}x^2 - 2x$

6 Berechne die Schnittwinkel von Kurve-Kurve

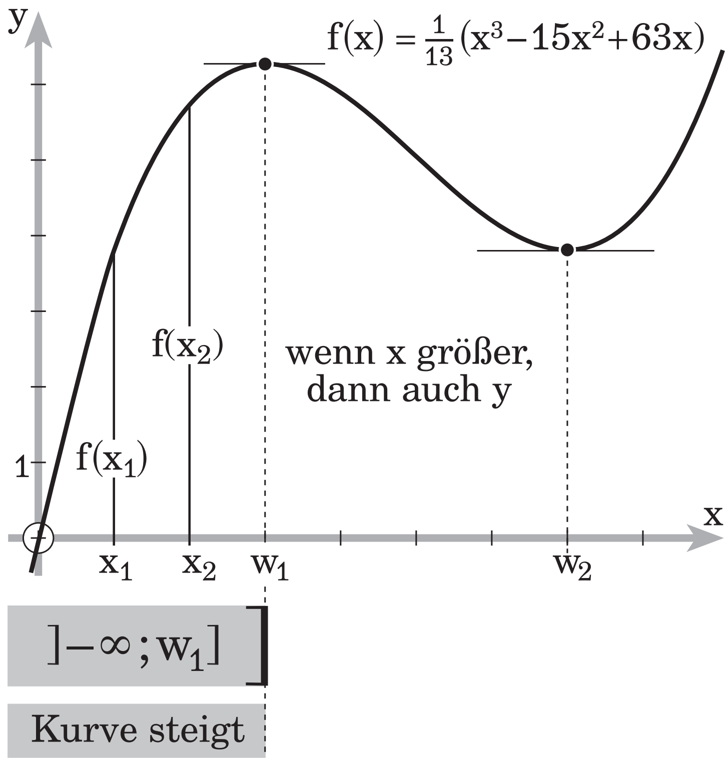
a) $f(x) = \frac{1}{6}x(x^2 - 13)$ $g(x) = -\frac{1}{6}x(x - 7)$

b) $f(x) = \frac{1}{6}x(7 - x^2)$ $g(x) = \frac{1}{6}x(x - 5)$

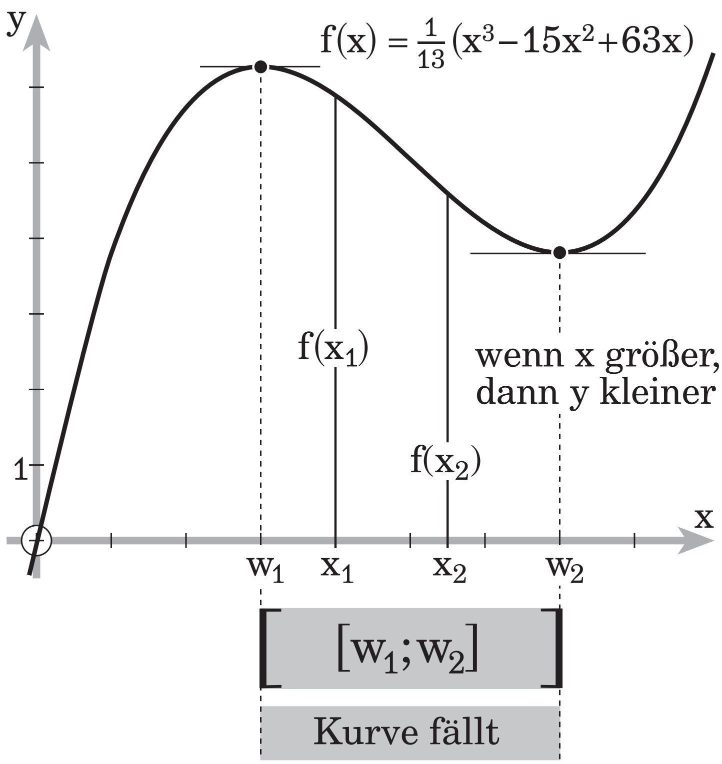
c) $f(x) = -x(x^2 - 1)$ $g(x) = x(x - 1)$

4. Monotonie und Extrema

Läuft man auf dem Graphen nach rechts (in Richtung zunehmender x-Werte), so stellt man fest:



– Bis $x=w_1$ nehmen die y-Werte zu; man sagt: die Kurve steigt im Intervall $]-\infty;w_1]$.
  Ist x_2 rechts von x_1, dann ist $f(x_2)$ höher als $f(x_1)$, das heißt, für beliebige $x_1, x_2 \in\ ]-\infty;w_1]$ mit $x_1<x_2$ ist auch $f(x_1)<f(x_2)$



– Von $x=w_1$ bis $x=w_2$ nehmen die y-Werte ab; man sagt: die Kurve fällt im Intervall $[w_1;w_2]$.
  Ist x_2 rechts von x_1, dann ist $f(x_2)$ tiefer als $f(x_1)$, das heißt, für beliebige $x_1, x_2 \in [w_1;w_2]$ mit $x_1<x_2$ ist $f(x_1)>f(x_2)$

– Ab $x=w_2$ steigt die Kurve wieder so wie vor $x=w_1$.

Solches Steigen und Fallen der Kurve heißt Monotonie der Funktion oder auch Monotonie der Kurve. Wir verwenden die Definitionen:

Definition:	Eine Funktion f heißt **echt monoton zunehmend** im Intervall I bzw. ein Graph G_f heißt **echt monoton steigend** im Intervall I, wenn für alle x_1, $x_2 \in I$ gilt: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
Definition:	Eine Funktion f heißt **echt monoton abnehmend** im Intervall I bzw. ein Graph G_f heißt **echt monoton fallend** im Intervall I, wenn für alle x_1, $x_2 \in I$ gilt: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Folgerung: **Ist eine Funktion f in einem Intervall echt monoton, dann ist sie dort umkehrbar.**

Statt »echt monoton« liest man gelegentlich auch »streng monoton«.
Die Monotonie einer Funktion f (oder einer Kurve) hängt eng zusammen mit der Ableitung f' der Funktion. Anschaulich ist klar, und es lässt sich auch mit einiger Mühe beweisen:

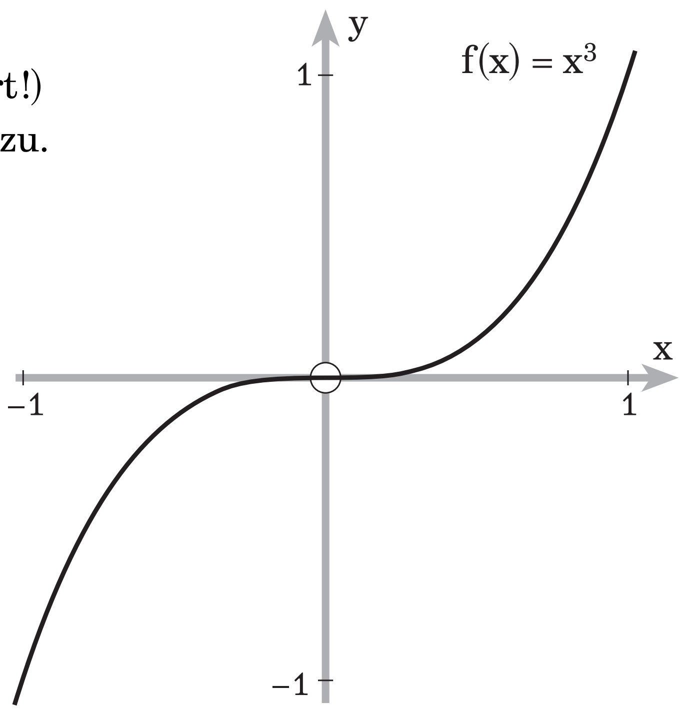
Monotoniekriterium

$$\mathbf{f'(x) > 0 \text{ für } x \in I} \Rightarrow \begin{cases} \textbf{f ist in I echt monoton zunehmend} \\ \mathbf{G_f} \textbf{ ist in I echt monoton steigend} \end{cases}$$

$$\mathbf{f'(x) < 0 \text{ für } x \in I} \Rightarrow \begin{cases} \textbf{f ist in I echt monoton abnehmend} \\ \mathbf{G_f} \textbf{ ist in I echt monoton fallend} \end{cases}$$

Die Sätze bleiben auch richtig, wenn für einzelne Werte $x \in I$ gilt $f'(x)=0$.

7. Beispiel: $f(x) = x^3$
$f'(x) = 3x^2$
$f'(x) > 0$ für $x \neq 0$
$f'(0) = 0$ (einzelner Wert!)
f nimmt echt monoton zu.
f ist umkehrbar.



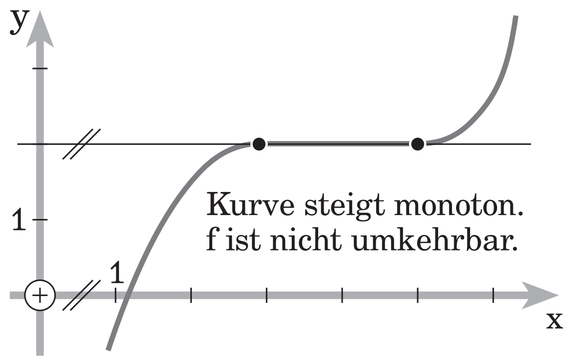
Zum Nachdenken

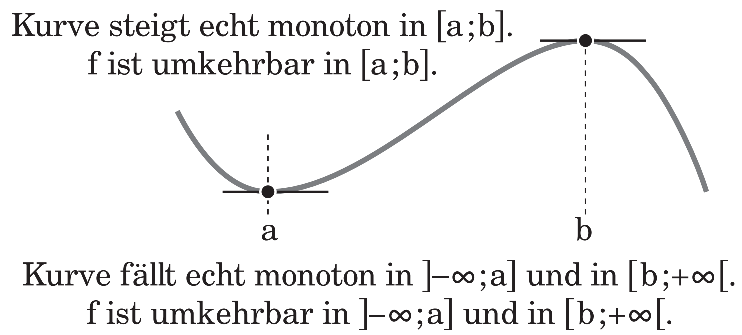
❶ Was heißt »monoton« ?

Bei Kurven haben wir die Eigenschaft »echt monoton steigend« definiert: Geht man auf dem Graphen nach rechts, dann geht es bergauf. Lässt man das Wort »echt« weg, so bedeutet »monoton steigend« eine abgeschwächte Form dieser Eigenschaft.

Definition:	Eine Funktion f heißt **monoton zunehmend** im Intervall I bzw. ein Graph G_f heißt **monoton steigend** im Intervall I, wenn für alle $x_1, x_2 \in I$ gilt: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqq f(x_2)$

Anschaulich bedeutet das: Geht man auf dem Graphen nach rechts, dann geht es nicht bergab. Im Unterschied zu »echt monoton steigend« dürfen jetzt auch waagrechte Strecken im Graphen vorkommen, siehe Bild links unten: Die Kurve steigt monoton, aber nicht echt monoton; ihre Funktion ist nicht umkehrbar.
Für »monoton fallend« gilt das Entsprechende.





Für einen einzelnen Waagrechtpunkt der Kurve gilt das Monotonieverhalten seiner Umgebung: er gehört also zu seinem Monotonie-Intervall, auch wenn er am Rand des Intervalls liegt – siehe Bild rechts oben.

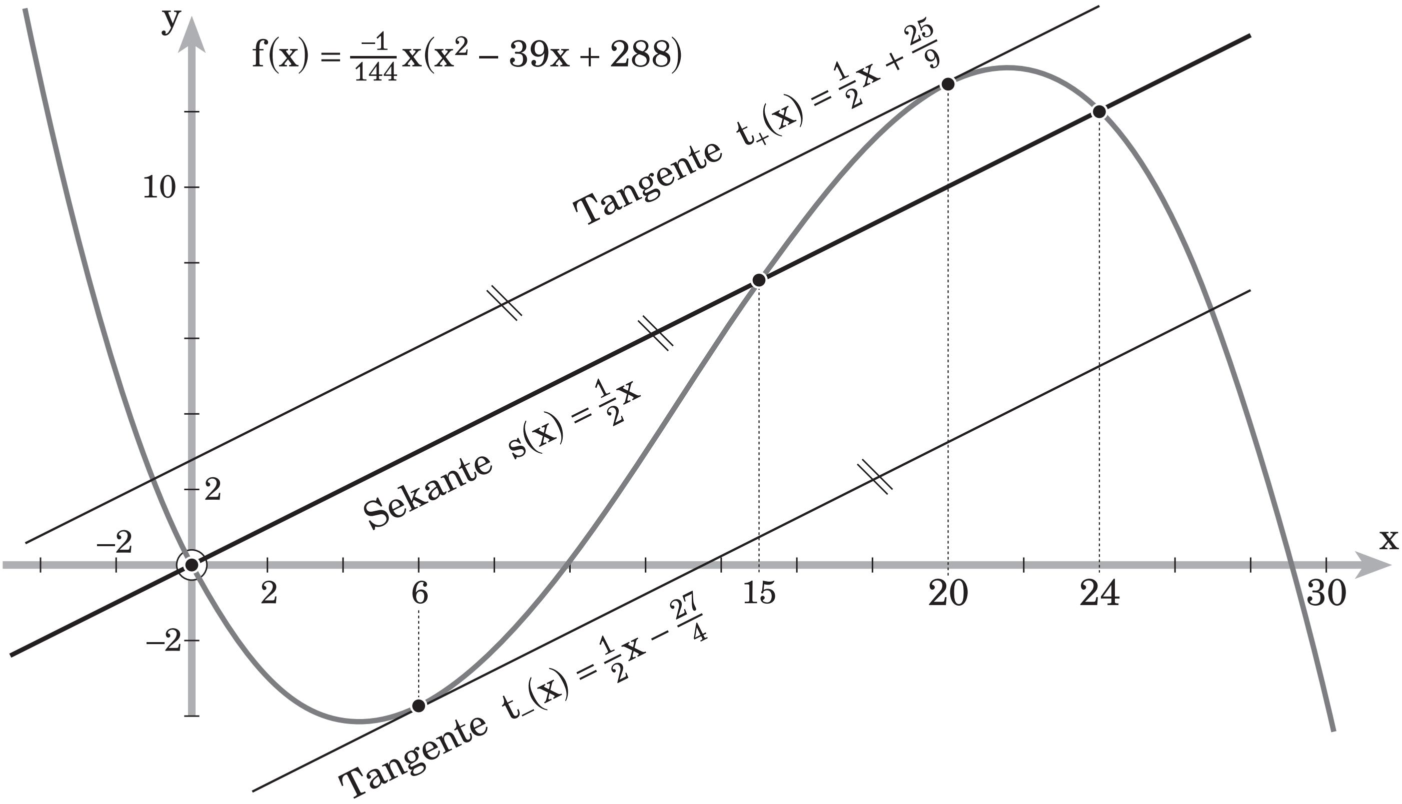
❷ Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Beim Monotonie-Kriterium (vorige Seite) haben wir geschlossen von der Ableitung in den Punkten eines Intervalls I aufs Verhalten der Funktion in diesem Intervall.
Die mathematische Rechtfertigung dafür gibt der **Mittelwertsatz der Differentialrechnung**.
Anschaulich bedeutet er: Zu jeder Kurvensehne gibt es einen Kurvenpunkt zwischen den Endpunkten dieser Sehne, in dem die Tangente parallel ist zu der Sehne.
Genauer: Ist f eine Polynomfunktion, dann gibt es in jedem Intervall $]u;v[$ mindestens einen x-Wert a so, dass gilt

$$f'(a) = \frac{f(v)-f(u)}{v-u}$$

das heißt, die Tangente in $(a|f(a))$ ist parallel zu der Sehne, die durch $U(u|f(u))$ und $V(v|f(v))$ geht.

Man kann diesen Satz auch für andere Funktionen beweisen, wenn diese nur 2 Bedingungen erfüllen:
– in jedem Kurvenpunkt $(a|f(a))$ mit $a \in]u;v[$ gibt es eine Tangente,
– die Kurve darf an den Intervallrändern keine Sprünge haben.



Aus dem Mittelwertsatz folgt sofort das Monotonie-Kriterium:
Ist $f'(x)>0$ in $]u;v[$ und sind r, s zwei Zahlen aus $[u;v]$ mit $r<s$, so ist zu zeigen $f(r)<f(s)$.
Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein a aus $]r;s[$ so, dass gilt $f'(a) = \frac{f(s)-f(r)}{s-r}$
Weil $f'(a)$ und $s-r$ positiv sind, muss auch $f(s)$ größer als $f(r)$ sein.

Monotonieverhalten

Das Vorzeichen von $f'(x)$ gibt Auskunft über Steigen und Fallen der Kurve.
Unter dem »Monotonieverhalten einer Funktion« versteht man eine Auflistung der Intervalle, in denen G_f steigt oder fällt.

Für eine übersichtliche Darstellung des Monotonieverhaltens verwenden wir wieder die x-Achse. So wie wir früher von einer Polynomfunktion f die Nullstellen (mit Vielfachheit) und die Vorzeichen über der x-Achse eingetragen haben, so markieren wir jetzt von der Ableitungsfunktion f' die Nullstellen (mit Vielfachheit) und die Vorzeichen über der x-Achse. Man geht so vor:

- Nullstellen (mit Vielfachheit) von f' berechnen
  und auf der x-Achse markieren.
- Vorzeichen von f' zwischen diesen Nullstellen bestimmen
  und über der x-Achse vermerken.
- Deutung dieser Vorzeichen:
  »–« bedeutet echt monoton fallend (emf)
  »+« bedeutet echt monoton steigend (ems)
  »0« bedeutet waagrechte Tangente (WAT).

8. Beispiel: $f(x) = \frac{1}{16}x(x-9)^2$ $f'(x) = \frac{3}{16}(x-3)(x-9)$

$f'(x)$	+	0^1	−	0^1	+
x	ems	3	emf	9	ems
	/	WAT	\	WAT	/

Monotonie-Intervalle: G_f steigt für $x \in]-\infty;3]$ und für $x \in [9;+\infty[$,
G_f fällt für $x \in [3;9]$

Markante Kurvenpunkte

Die Punkte, die die Gestalt einer Kurve wesentlich prägen, sind die mit waagrechter Tangente. Wir nennen sie Waagrechtpunkte W(a|f(a)).

> Definition: W(a|f(a)) heißt **Waagrechtpunkt** einer Kurve, wenn f'(a)=0 ist.

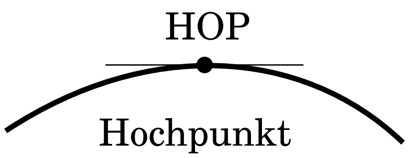
Je nach Vorzeichenwechsel von f' bei a unterscheidet man bei den Waagrechtpunkten Extrempunkte und Terrassenpunkte.

■ Extrempunkte

Das sind Waagrechtpunkte **mit** Vorzeichenwechsel der Steigung.
a ist Nullstelle von f' mit ungerader Vielfachheit.

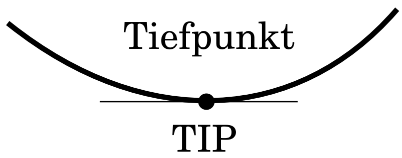
$f'(x)$	+	0	−
x	ems	a	emf
	/	WAT	\

Die Kurve steigt vor a und fällt danach. W(a|f(a)) ist Hochpunkt.



$f'(x)$	−	0	+
x	emf	a	ems
	\	WAT	/

Die Kurve fällt vor a und steigt danach. W(a|f(a)) ist Tiefpunkt.



Im vorigen Beispiel ist (3|4) Hochpunkt und (9|0) Tiefpunkt.

Extrema

Der y-Wert eines Hochpunkts ist im Vergleich zu den y-Werten seiner benachbarten Kurvenpunkte der größte; man nennt ihn deshalb lokales (oder auch relatives) Maximum.
Wir präzisieren, was wir unter »benachbarten Kurvenpunkten« verstehen:

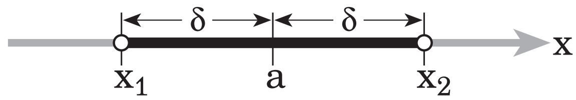
> Definition: Jedes offene Intervall I, das a enthält,
> heißt **Umgebung von a**, symbolisch U(a).

$U_\delta(a)$ bedeutet eine symmetrisch um a gelegene Umgebung der Länge 2δ.

$U(a) =]x_1; x_2[$

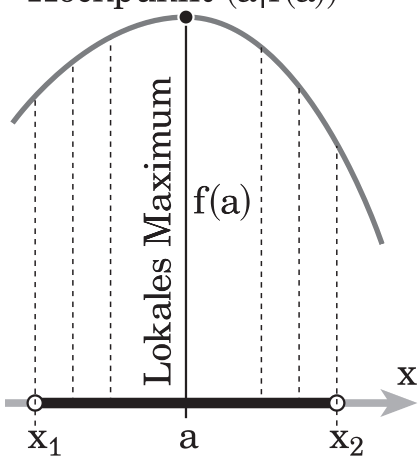
Umgebung von a

$U_\delta(a) =]x_1; x_2[$

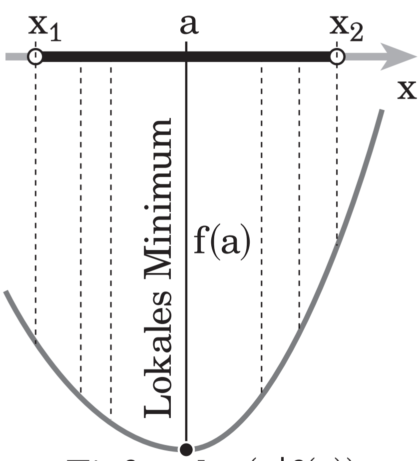


Symmetrische Umgebung von a

Hochpunkt $(a|f(a))$



Definition:	f(a) heißt lokales Maximum von f, wenn es eine Umgebung von a gibt, so dass die Funktionswerte in dieser Umgebung nicht größer sind als f(a). Symbolisch: $x \in U(a) \Rightarrow f(x) \leqq f(a)$ $(a\|f(a))$ heißt **Hochpunkt**, kurz HOP.



Tiefpunkt $(a|f(a))$

Definition:	f(a) heißt lokales Minimum von f, wenn es eine Umgebung von a gibt, so dass die Funktionswerte in dieser Umgebung nicht kleiner sind als f(a). Symbolisch: $x \in U(a) \Rightarrow f(x) \geqq f(a)$ $(a\|f(a))$ heißt **Tiefpunkt**, kurz TIP.

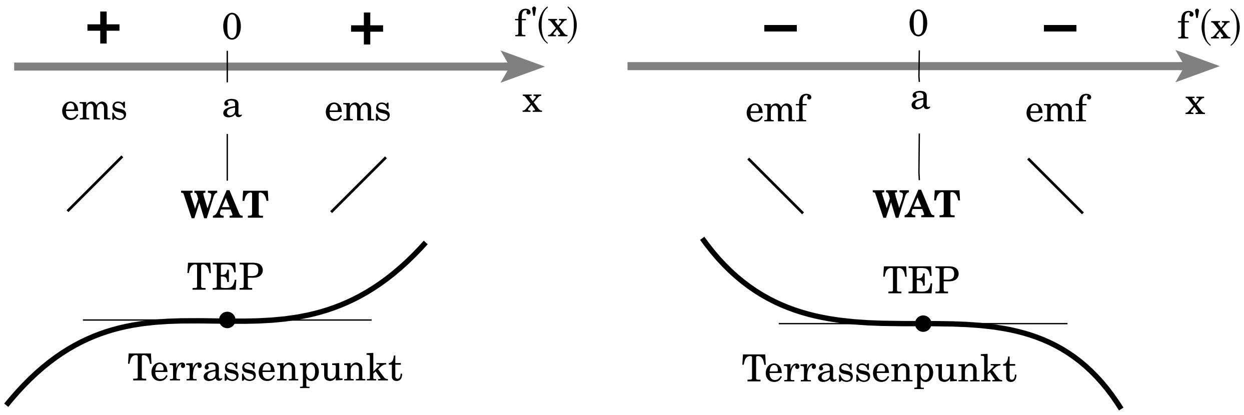
Statt »lokal« sagt man auch »relativ«.
Der Oberbegriff von Maximum und Minimum heißt Extremum oder auch Extremwert.
Der Oberbegriff von Hoch- und Tiefpunkt heißt Extrempunkt. Beachte die Sprechweise: Die Funktion f hat Extrema (Maxima, Minima), ihr Graph Gf hat Extrempunkte (Hochpunkte, Tiefpunkte).
Ist der y-Wert eines Hochpunkts der größte vorkommende Funktionswert überhaupt, so nennt man ihn globales (oder auch absolutes) Maximum.

■ Terrassenpunkte

Das sind Waagrechtpunkte ohne Vorzeichenwechsel der Steigung.
a ist Nullstelle von f' mit gerader Vielfachheit.

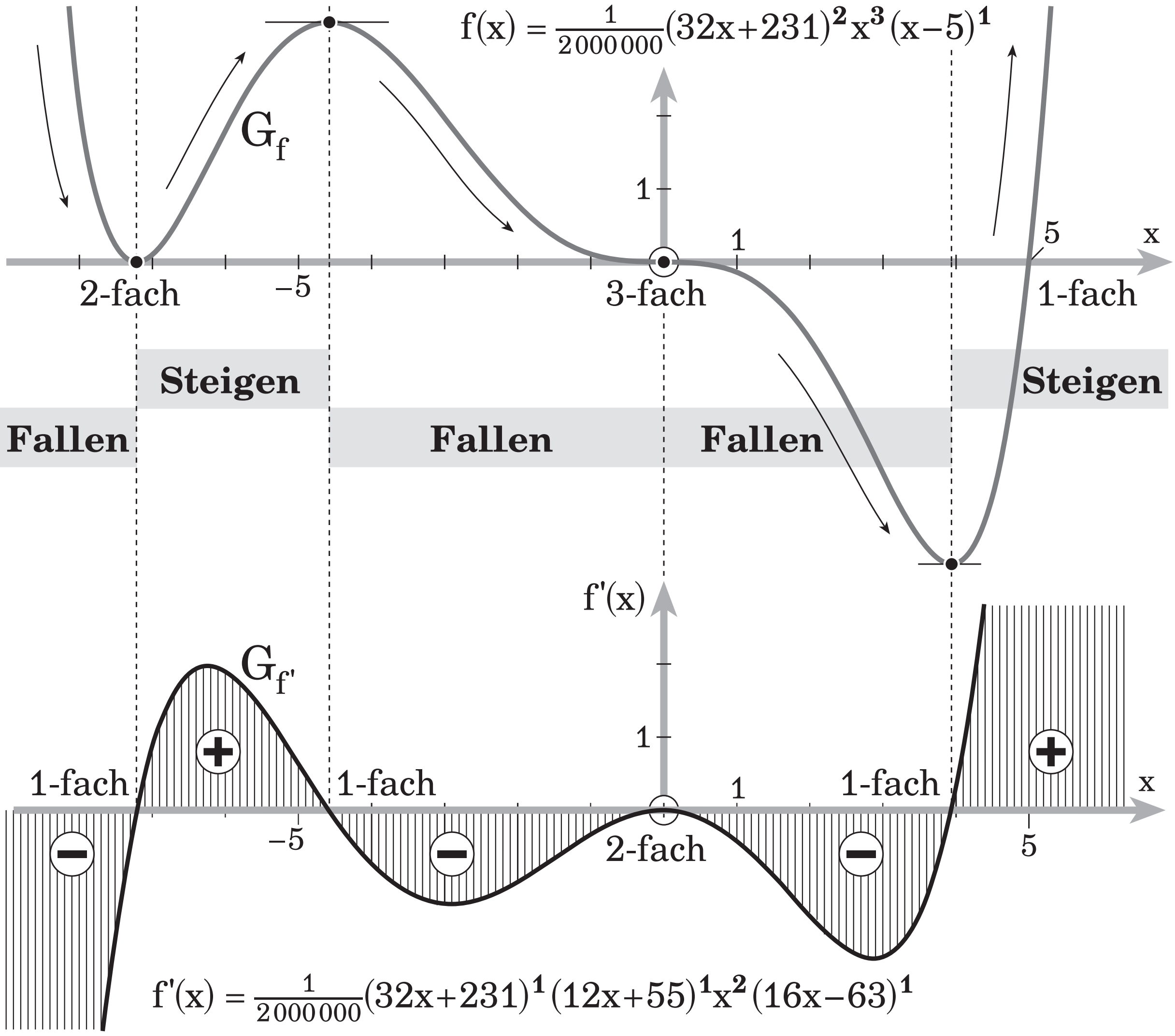
Definition:	$T(a\|f(a))$ heißt **Terrassenpunkt** von G_f, wenn T Waagrechtpunkt ist und f' links und rechts von a dasselbe Vorzeichen hat.

Anschaulich bedeutet das: Die Tangente im Terrassenpunkt ist waagrecht und durchdringt den Graphen.



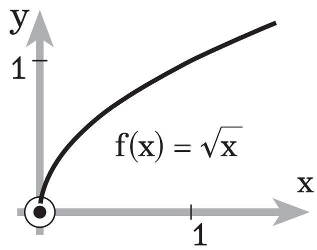
Zusammenhang zwischen den Nullstellen von f(x) und f'(x)

Ist a eine zwei- oder mehrfache Nullstelle von f(x), so ist die x-Achse Tangente von G_f in (a|0). (a|0) ist also Waagrechtpunkt von G_f : f'(a) = 0. Es gilt:
Eine zwei- oder mehrfache Nullstelle von f(x) ist auch Nullstelle von f'(x).
Wir werden später zeigen, dass eine v-fache Nullstelle von f(x) eine (v−1)-fache Nullstelle von f'(x) ist.



Zum Nachdenken

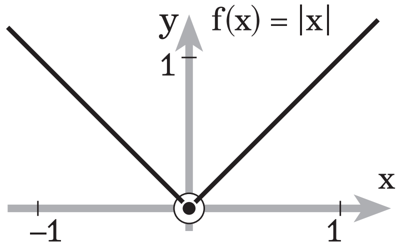
❶ Extrempunkte ohne waagrechte Tangente
Bei Polynomkurven ist jeder Hoch- und Tiefpunkt zugleich auch Waagrechtpunkt. Aber im allgemeinen muss das nicht so sein: Es gibt auch Hoch- und Tiefpunkte ohne waagrechte Tangente – Beispiele:



Randpunkt $f(x) = \sqrt{x}$ $D_f = \mathbb{R}_0^+$

(0|0) ist (absoluter) Tiefpunkt,

die y-Achse ist senkrechte Tangente.

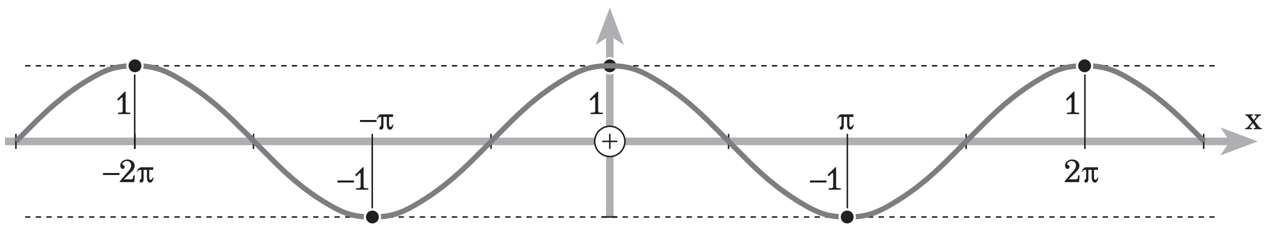


Ecke $f(x) = \sqrt{x^2} = |x|$ $D_f = \mathbb{R}$

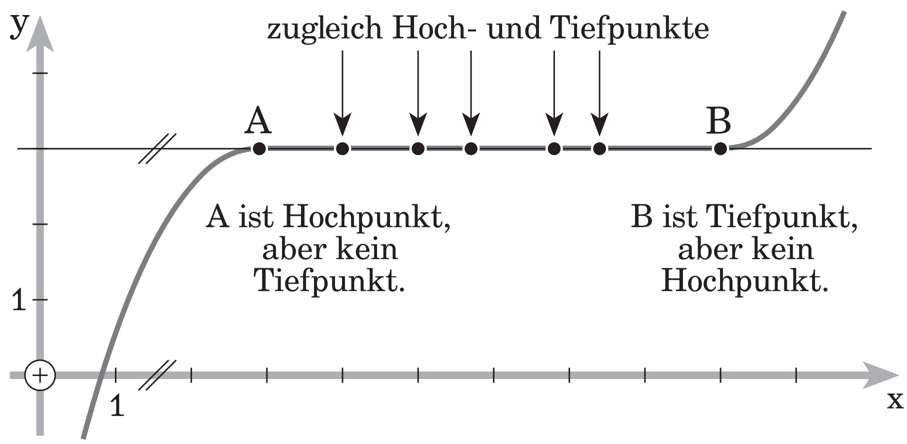
(0|0) ist (absoluter) Tiefpunkt,

G_f hat in (0|0) keine Tangente.

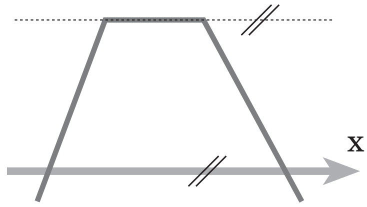
❷ **Unterschied zwischen Extrempunkt und Extremum**
Ein Extrempunkt ist ein Punkt des Graphen. Er hat 2 Koordinaten:
Der x-Wert ist die Extremum-Stelle, der y-Wert ist das Extremum – also Hochpunkt(Maximumstelle|Maximum), Tiefpunkt(Minimumstelle|Minimum).
Die Kosinus-Kurve zeigt den Unterschied recht deutlich:
Sie hat unendlich viele Hochpunkte$(2k\pi|1)$ $k \in \mathbb{Z}$, aber nur das eine Maximum 1;
1 ist das absolute Maximum der Kosinus-Funktion.



❸ »**Unechte Extrempunkte**«
Die Definition von Extrempunkten umfasst auch ungewöhnliche Fälle, an die man bei flüchtigem Lesen nicht denkt. Ein Hochpunkt ist auch dann ein Hochpunkt, wenn seine Nachbarpunkte nicht tiefer liegen, sie dürfen nur nicht höher liegen.
Zur Verdeutlichung ein Beispiel:



Um solche Fälle auszuschließen, könnte man zwar die Definition verschärfen: $(a|f(a))$ heißt echter Hochpunkt und $f(a)$ echtes Maximum, wenn für alle $x \neq a$ einer Umgebung $U(a)$ gilt: $f(x) < f(a)$. Aber diese Definition hätte zum Beispiel den Nachteil, dass der Graph im Bild rechts keinen Hochpunkt hätte.



Aufgaben

◊1 Gib die Bereiche an, in denen die Kurve echt monoton steigt oder fällt.
a) $f(x) = x^2 - 4x$ **b)** $f(x) = x^2 - 4x + 5$ **c)** $f(x) = -x^2 - 4x$
d) $f(x) = -x^2 + 4x - 4$ **e)** $f(x) = -x - 4$ **f)** $f(x) = -4$

◊2 Gib die Bereiche an, in denen die Kurve echt monoton steigt oder fällt.
a) $f(x) = x^3 + 1$ **b)** $f(x) = x^3 + x$ **c)** $f(x) = x^3 + x^2$ **d)** $f(x) = x^3 + x^2 + 1$

•3 Gib die Bereiche an, in denen die Kurve echt monoton steigt oder fällt.

a) $f(x) = x^5 + 3x^4 - 6x^3 - 10x^2 + 21x - 9$

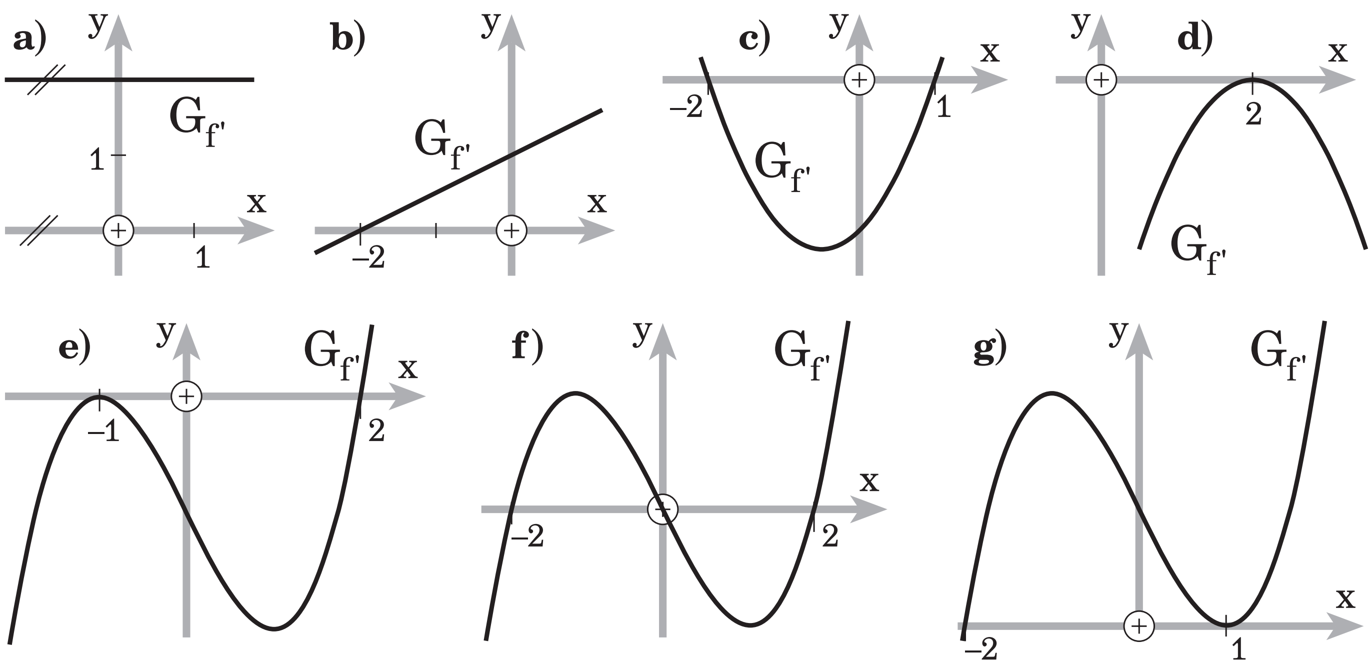
b) $f(x) = -x^5 + 2x^4 + 6x^3 - 4x^2 - 13x - 6$

c) $f(x) = -x^5 + 5x^4 - 40x^2 + 80x - 48$

•4 Gib die Bereiche an, in denen die Kurve echt monoton steigt oder fällt.
a) $f(x) = (x^2 - 49)(x^2 - 1)$ **b)** $f(x) = (x - 1)(x - 3)^3$
c) $f(x) = -(x + 2)^2(x - 3)(x - 7)$

◊5 Bestimme Ort und Art der Waagrechtpunkte.
a) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$ **b)** $f(x) = x^3(x - 5)^2 + 2$ **c)** $f(x) = -x^4 + 18x^2 - 4$

◊6 Lies aus den Bildern die Monotoniebereiche und die Waagrechtstellen von G_f ab und gib die Art der Waagrechtpunkte an.



•**7** Bestimme die Waagrechtpunkte und die Extremwerte; entscheide, ob die Extrema relativ oder absolut sind. Achte auf die Definitionsmenge.

a) $f(x) = x^3 + 6x^2 - 135x$, $D_f = [-9;9]$

b) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$, $D_f = \mathbb{R}_0^+$

c) $f(x) = x^5 + x + 1$, $D_f = [-1;1]$

d) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 52$, $D_f = \mathbb{R}^-$

•**8** $\frac{1}{9}x^3(x-4)$ ist Term der 4 Funktionen f_1 bis f_4, die sich nur in der Definitionsmenge unterscheiden. Skizziere die Kurve von f_1.
Bestimme die Waagrechtpunkte und die Extremwerte und entscheide, ob sie relativ oder absolut sind.

a) $D_1 = \mathbb{R}$ **b)** $D_2 = \mathbb{R}_0^+$ **c)** $D_3 = \mathbb{R}^+$ **d)** $D_4 = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

9 $f(x) = \frac{1}{2}(x^3 - 2x^2 - 5x)$
Berechne die Schnittpunkte der Kurven G_f und $G_{f'}$.
In welcher Besonderheit unterscheiden sich diese Punkte von den restlichen Punkten von G_f?

5. Höhere Ableitungen; Krümmungsart

Die Ableitung f' einer Funktion f ist wieder eine Funktion. Leitet man f' ab, so ergibt sich eine neue Funktion $(f')'$; für diese Ableitung der Ableitung schreibt man einfacher f''. Genauso entsteht f''' aus f'',
f'''' aus f''' … usw.

f'' heißt 2. Ableitung von f.
f''' heißt 3. Ableitung von f.
. . . . .
$f^{(n)}$ heißt n-te Ableitung von f.
(ausgesprochen »f-n-Strich«)

$f''(x)$ ist die Steigung des Graphen von f' bei x.
$f'''(x)$ ist die Steigung des Graphen von f'' bei x.
. . . . .
$f^{(n)}(x)$ ist die Steigung des Graphen von $f^{(n-1)}$ bei x.

9. Beispiel:

$$f(x) = \frac{-3}{16}(x-2)^2(x-8) = \frac{-3}{16}(x^3-12x^2+36x-32)$$

$$f'(x) = \frac{-3}{16}(3x^2-24x+36) = \frac{-9}{16}(x-2)(x-6)$$

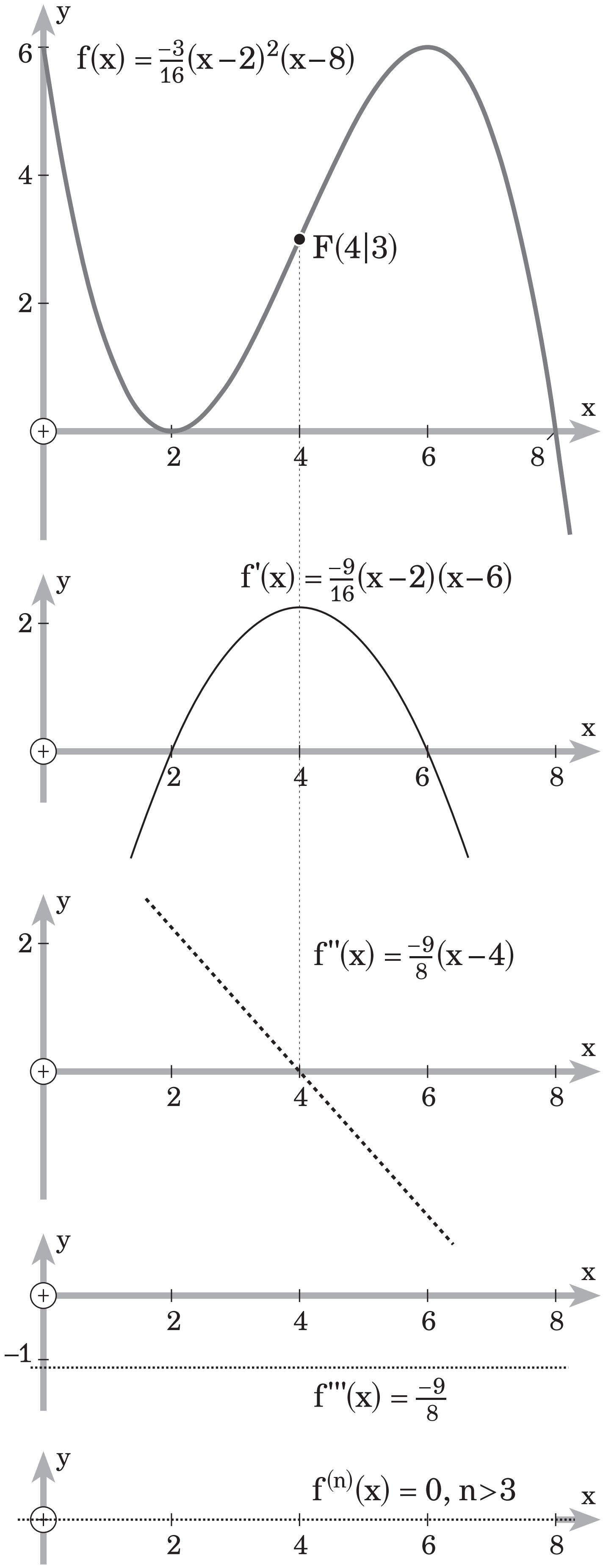
$$f''(x) = \frac{-9}{16}(2x-8) = \frac{-9}{8}(x-4)$$

$$f'''(x) = \frac{-9}{8}$$

$$f^{(4)}(x) = 0$$

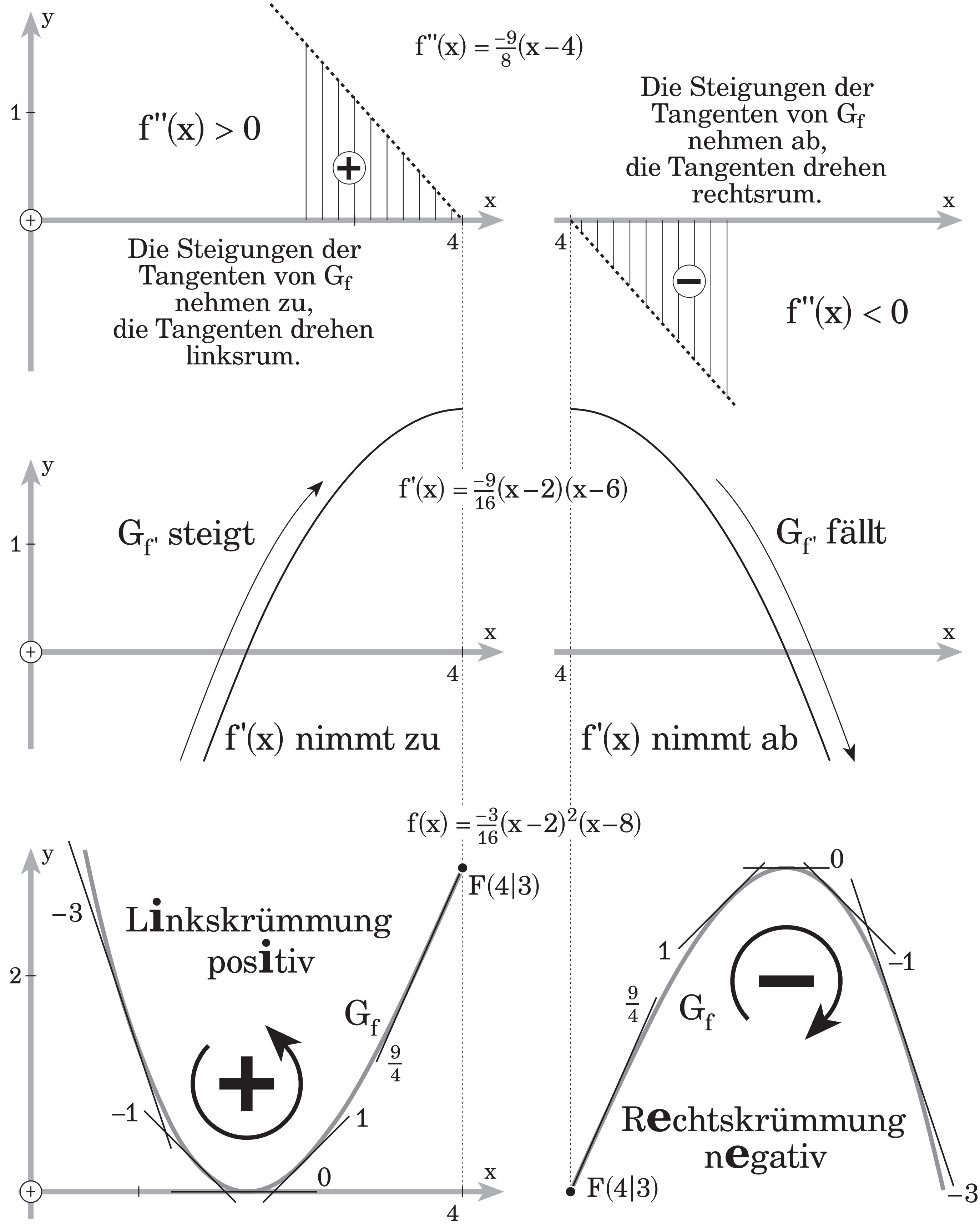
. . . . .

$$f^{(n)}(x) = 0 \text{ für } n>3$$

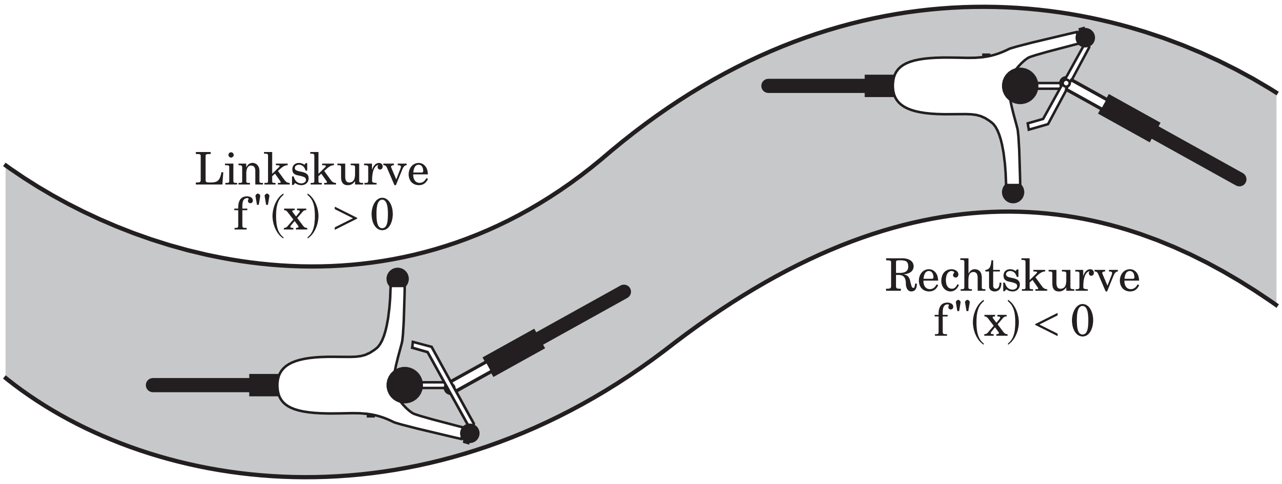


Geometrische Bedeutung der 2. Ableitung

Ist die 1. Ableitung f' in einem Intervall positiv, so nehmen dort die Funktionswerte f(x) zu. Entsprechend nehmen die Funktionswerte f'(x) in einem Intervall zu, in dem die 2. Ableitung f'' positiv ist; für G_f bedeutet das: Die Steigungen der Tangenten vonG_f nehmen zu, die Tangenten drehen sich nach links.



Ein Radler, der G_f von links nach rechts durchfährt,
ist dann in einer Linkskurve — für $f''(x)<0$ in einer Rechtskurve.



Was aber, wenn $f''(x) = 0$ ist ?
Wir kennen schon Funktionen, bei denen an jeder Stelle $f''(x) = 0$ ist, nämlich die affinen Funktionen:

$$\begin{aligned} f(x) &= mx + t \\ f'(x) &= m \\ f''(x) &= 0 \end{aligned}$$

Wir vermuten, dass die Kurven von Funktionen, deren 2. Ableitung bei einer Stelle a gleich 0 ist, dort fast geradlinig, also flach verlaufen.

> Definition: $F(a|f(a))$ heißt **Flachpunkt** einer Kurve, wenn $f''(a)=0$ ist.

Für den Kurvenverlauf sind vor allem diejenigen Flachpunkte von Bedeutung, in denen sich die Art der Krümmung (also das Vorzeichen der 2. Ableitung) ändert; dort muss die 1. Ableitung ein echtes Extremum haben.

> Definition: Ist $F(a|f(a))$ kein Endpunkt des Graphen G_f,
> so heißt F **Wendepunkt** von G_f,
> wenn f' bei a ein echtes Extremum hat.
> Ein Wendepunkt mit waagrechter Tangente
> heißt **Terrassenpunkt**.

Die Definition von Flach- und Wendepunkt mithilfe der Ableitungen sind gleichwertig den Definitionen, die wir im vorigen Kapitel mithilfe der Vielfachheit der Schnittstellen gegeben haben. Mehr darüber am Ende von Kapitel VI.

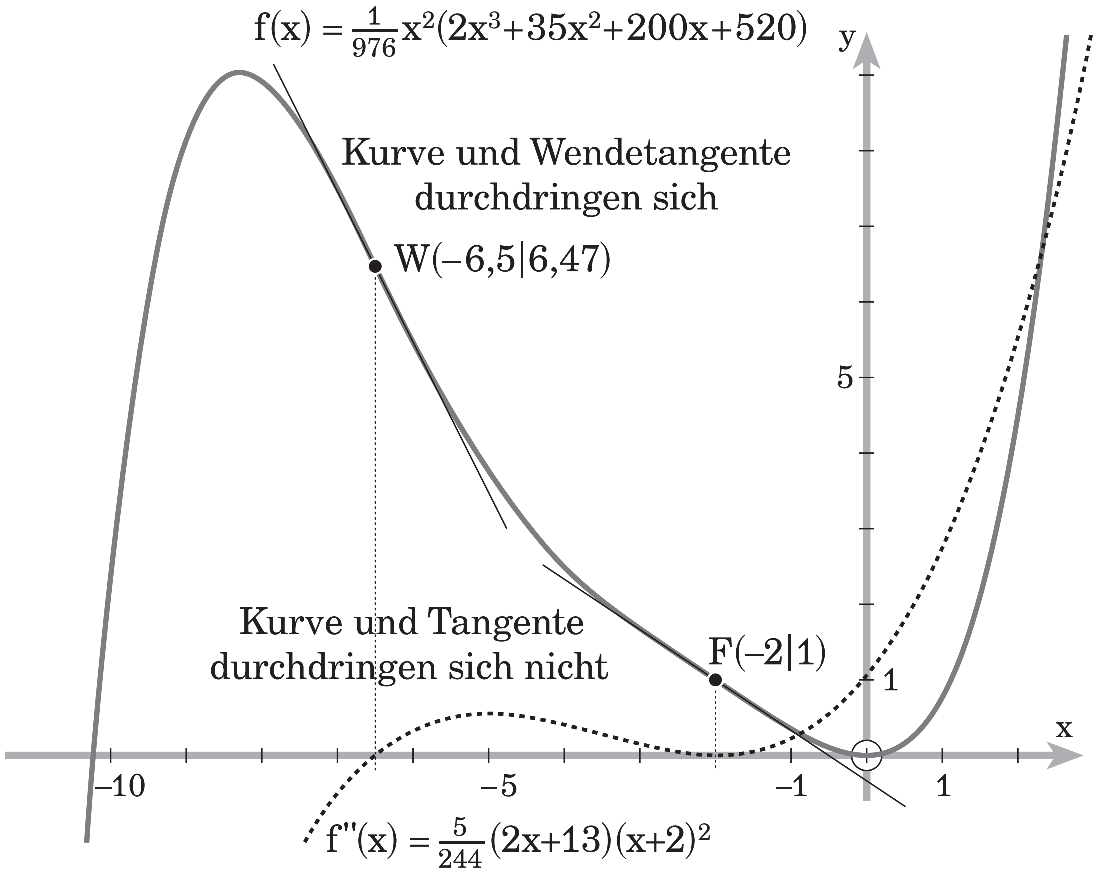
Eine Wendestelle a finden heißt also, eine Extremumstelle a von f' suchen.
Weil f'' die 1. Ableitung von f' ist, muss also an jeder Wendestelle a das Vorzeichen von f'' wechseln. Umgekehrt zeigt der Vorzeichenwechsel von f'' an, dass a Wendestelle ist, wenn die Kurve bei a eine Tangente hat.

Anschaulicher Kern der Definition:
Im Wendepunkt durchdringen sich Kurve und Tangente.

Zusammenfassend können wir sagen:

– Die 1. Ableitung gibt die Steigung einer Kurve an.
– Das Vorzeichen der 2. Ableitung gibt die Krümmungsart der Kurve an.
– Die 3. Ableitung und die höheren Ableitungen sagen nichts Wesentliches mehr über den Kurvenverlauf aus.

10. Beispiel:
$$f(x) = \tfrac{1}{976}x^2(2x^3 + 35x^2 + 200x + 520)$$
$$= \tfrac{1}{976}(2x^5 + 35x^4 + 200x^3 + 520x^2)$$
$$f'(x) = \tfrac{5}{488}(x^4 + 14x^3 + 60x^2 + 104x)$$
$$f''(x) = \tfrac{5}{244}(2x^3 + 21x^2 + 60x + 52)$$
$$= \tfrac{5}{244}(2x + 13)(x + 2)^2$$



Dieses Beispiel macht den Unterschied zwischen Flachpunkt und Wendepunkt sehr deutlich: In W durchdringen sich Kurve und Tangente, W ist Flachpunkt und Wendepunkt. In F durchdringen sich Kurve und Tangente nicht, F ist nur Flachpunkt (also kein Wendepunkt).

Krümmungsverhalten

Das Vorzeichen von f''(x) gibt Auskunft über die Krümmungsart der Kurve.
Unter dem »Krümmungsverhalten einer Kurve G_f« versteht man eine Auflistung der Intervalle, in denen G_f links oder rechts gekrümmt ist.
Für eine übersichtliche Darstellung des Krümmungsverhaltens verwenden wir wieder die x-Achse. So wie wir früher von einer Polynomfunktion f die Nullstellen (mit Vielfachheit) und die Vorzeichen über der x-Achse eingetragen haben, so markieren wir jetzt von der 2. Ableitung f'' die Nullstellen (mit Vielfachheit) und die Vorzeichen über der x-Achse. Man geht so vor:

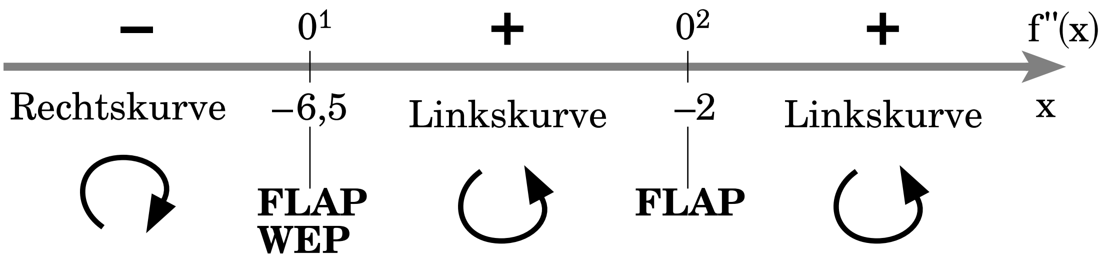
– Nullstellen (mit Vielfachheit) von f'' berechnen
  und auf der x-Achse markieren

– Vorzeichen von f'' zwischen diesen Nullstellen bestimmen
  und über der x-Achse vermerken

– Deutung dieser Vorzeichen:
  »–« bedeutet Rechtskurve
  »+« bedeutet Linkskurve
  »0« bedeutet Flachpunkt

11. Beispiel: Krümmungverhalten der Kurve im vorigen Beispiel

$$f''(x) = \tfrac{5}{244}(2x+13)(x+2)^2$$



»FLAP« steht für Flachpunkt,
»WEP« steht für Wendepunkt
Krümmungsintervalle:
G_f hat eine Rechtskurve für $x \in]-\infty;-6{,}5]$,
G_f hat eine Linkskurve für $x \in [-6{,}5;+\infty[$.

Zum Nachdenken

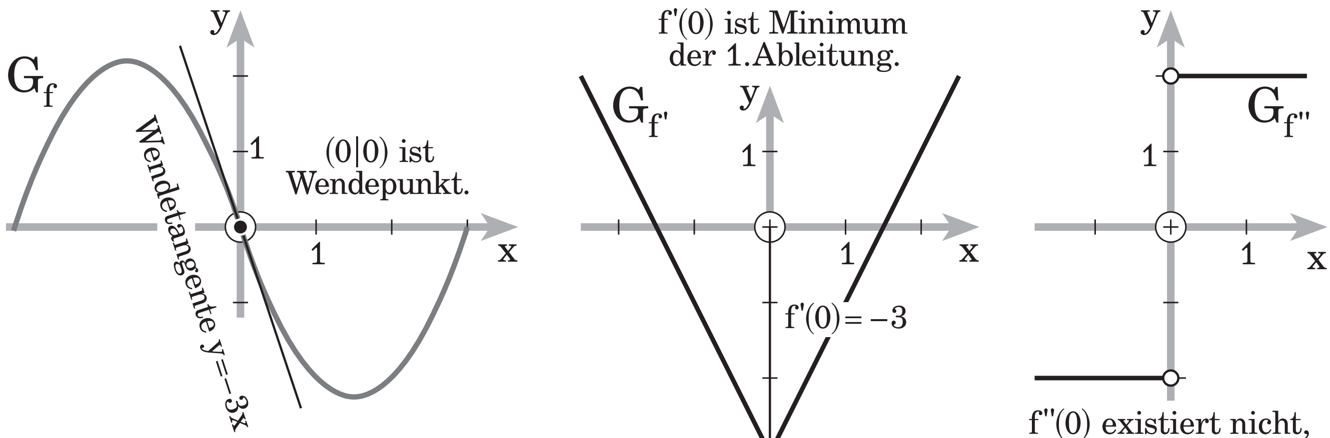
❶ Wendepunkt, aber kein Flachpunkt

Im vorigen Beispiel haben wir einen Flachpunkt gesehen, der kein Wendepunkt ist; denn aus $f''(a)=0$ folgt nicht automatisch, dass a Wendestelle ist.
Umgekehrt gibt es Wendepunkte, die keine Flachpunkte sind; denn eine Wendestelle muss nicht Nullstelle der 2. Ableitung sein.

Beispiel: $f(x) = x(|x|-3) = \begin{cases} x^2-3x, & x \geq 0 \\ -x^2-3x, & x < 0 \end{cases}$

$f'(x) = \begin{cases} 2x-3, & x > 0 \\ -2x-3, & x < 0 \end{cases}$ Damit gilt auch $f'(0)=-3$, wie wir später sehen werden.

$f''(x) = \begin{cases} 2, & x > 0 \\ -2, & x < 0 \end{cases}$ $f''(0)$ existiert nicht, wie wir später sehen werden.

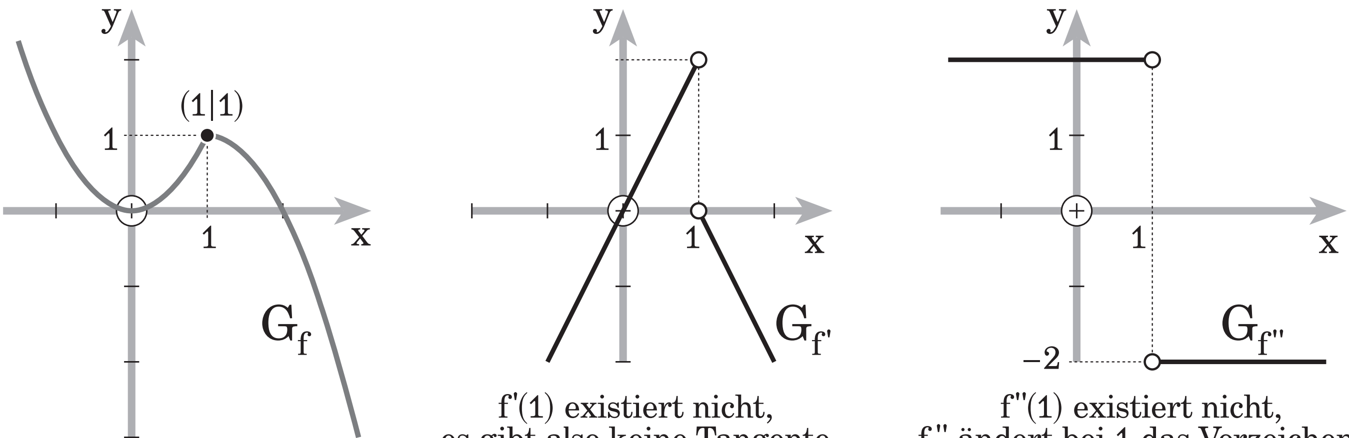


f''(0) existiert nicht, (0|0) ist also kein Flachpunkt.

❷ **Wechsel der Krümmungsart, aber kein Wendepunkt**

An einer Wendestelle a muss die 2. Ableitung das Vorzeichen ändern.
Die Umkehrung gilt aber nicht:
Wechselt $f''(x)$ bei a das Vorzeichen, so muss a keine Wendestelle sein – nämlich dann, wenn es bei a keine Tangente gibt.

Beispiel: $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ -x^2+2x, & x > 1 \end{cases}$ $f'(x) = \begin{cases} 2x, & x < 1 \\ -2x+2, & x > 1 \end{cases}$ $f''(x) = \begin{cases} 2, & x < 1 \\ -2, & x > 1 \end{cases}$



f'(1) existiert nicht, es gibt also keine Tangente von G_f in (1|1), f' hat kein Extremum.

f''(1) existiert nicht, f'' ändert bei 1 das Vorzeichen, 1 ist aber keine Wendestelle von f.

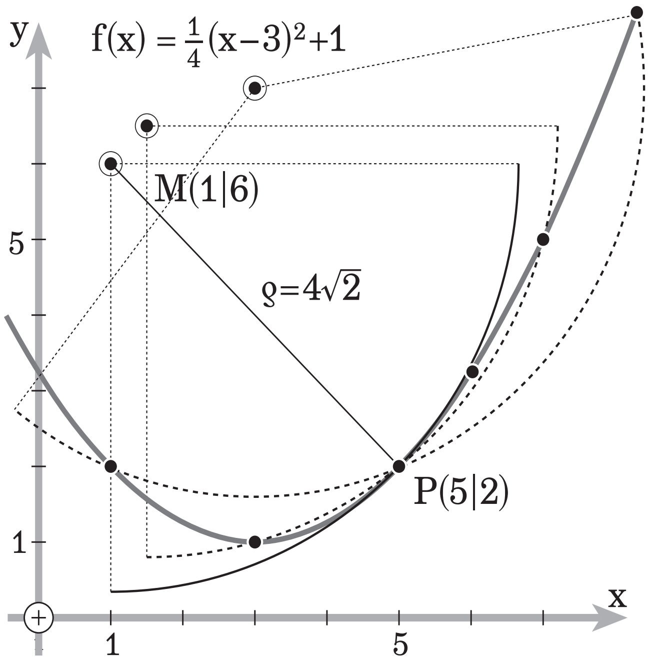
❸ Krümmungsradius – Krümmung

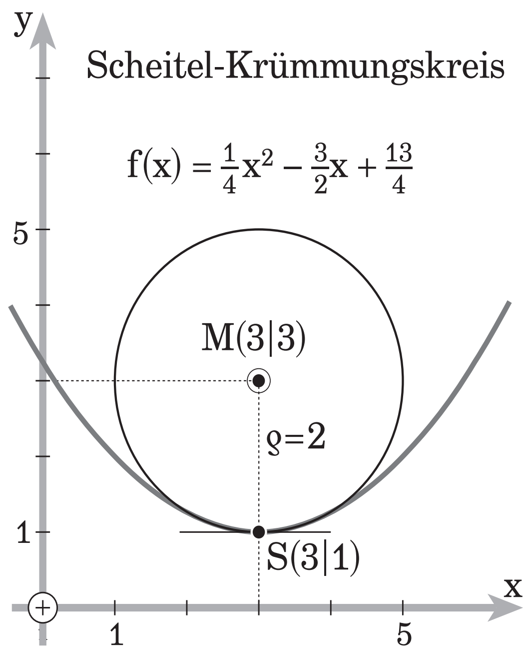
Das Vorzeichen von f'(a) gibt die Art der Steigung in (a|f(a)) an: Steigen oder Fallen.
Der Zahlenwert f'(a) gibt den Grad des Steigens oder Fallens an: $f'(a)=m=\tan\alpha$.
Das Vorzeichen von f''(a) gibt die Art der Krümmung in (a|f(a)) an:
Links- oder Rechtskurve. Was aber bedeutet der Zahlenwert f''(a) ?

So wie man mit der Tangente die Steigung definiert, so definiert man die Krümmung einer Kurve mit dem Krümmungskreis. Die Tangente in einem Kurvenpunkt P ist definiert als Grenzlage der Sekante PX, für $X \to P$. Entsprechend definiert man den Krümmungskreis in P als Grenzlage des Kreises durch die Kurvenpunkte P, X_1 und X_2, für $X_1 \to P$ und $X_2 \to P$. Kurve und Krümmungskreis haben also einen mindestens 3fachen Schnittpunkt. Der Radius dieses Kreises heißt **Krümmungsradius ϱ**; sein Kehrwert k heißt **Krümmung** (bis aufs Vorzeichen). Diese Definition entspricht auch unsrer Anschauung: Eine enge Kurve hat einen kleinen Krümmungsradius und eine starke Krümmung. Krümmungsradius und Krümmung im Kurvenpunkt (a|f(a)) errechnen sich mit den Formeln:

Krümmungsradius $\varrho = \left| \frac{(1+f'(a)^2)^{3/2}}{f''(a)} \right|$ Krümmung $k = \frac{f''(a)}{(1+f'(a)^2)^{3/2}}$

Die Formel für k zeigt, dass das Vorzeichen von f''(a) gleich ist dem Vorzeichen von k und damit die Art Krümmung festlegt. Beim Grad der Krümmung kommt es auch noch auf f'(a) an. Nur im Sonderfall von Waagrechtpunkten, also bei $f'(a)=0$, ist die 2. Ableitung gleich der Krümmung: $k=f''(a)$ und $\varrho = 1/|f''(a)|$. Ist a eine Flachstelle, dann gilt $f''(a)=0$ und damit $k=0$. Die Krümmung ist also in (a|f(a)) gleich 0 –
was den Namen Flachpunkt rechtfertigt.





Aufgaben

◊1 Berechne alle Ableitungen für

a) $f(x) = 6x^3 - 2x + 8$ **b)** $f(x) = x^6$ **c)** $f(x) = x^n$

•◊2 Bestimme den Term f(x)

a) $f''(x) = 0$ **b)** $f''(x) = -3$ **c)** $f''(x) = x$

d) $f''(x) = 24x^2 - 6x + 2$ **e)** $f''(x) = 2x^2 - 4x + 1$

◊3 Gib die Intervalle an, in denen G_f links- oder rechtsgekrümmt ist:

a) $f(x) = x^3 + 1$ **b)** $f(x) = x^3 + x$ **c)** $f(x) = x^3 + x^2$ **d)** $f(x) = x^3 + x^2 + 1$

◊4 Gib die Intervalle an, in denen G_f links- oder rechtsgekrümmt ist:

a) $f(x) = x(x-1)(x-2)$ **b)** $f(x) = (x2-3)^2$

◊5 Bestimme Ort und Art der Flachpunkte

a) $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x + 3$ **b)** $f(x) = x^2(x-6)$

c) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x$ **d)** $f(x) = x^2(x^2-6)$

e) $f(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2$ **f)** $f(x) = x^3(x^2-30)$

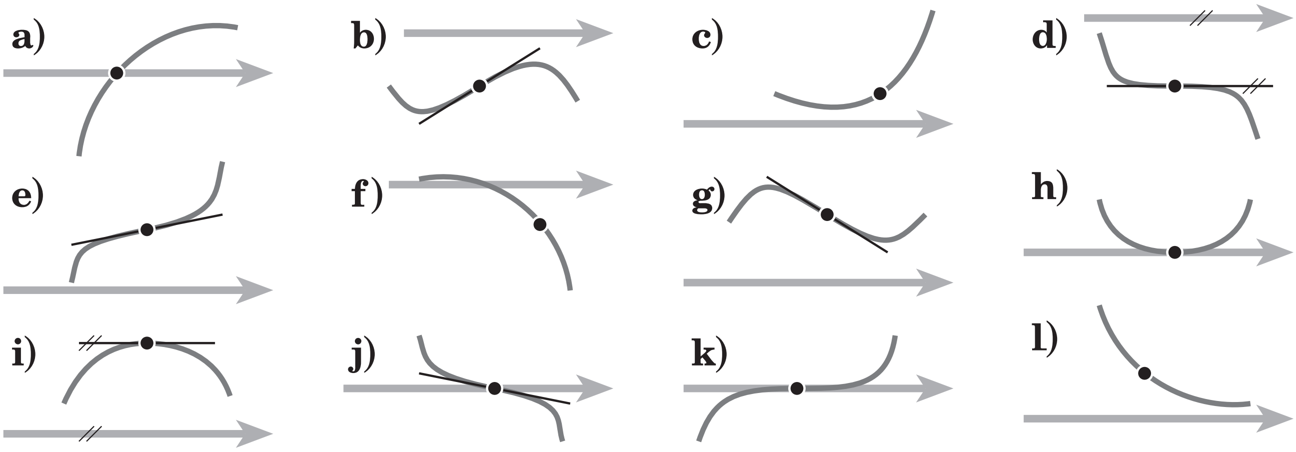
g) $f(x) = 3x^5 - 10x^4 + 10x^3 - 5125x$ **h)** $f(x) = x^2(x^3-10)$

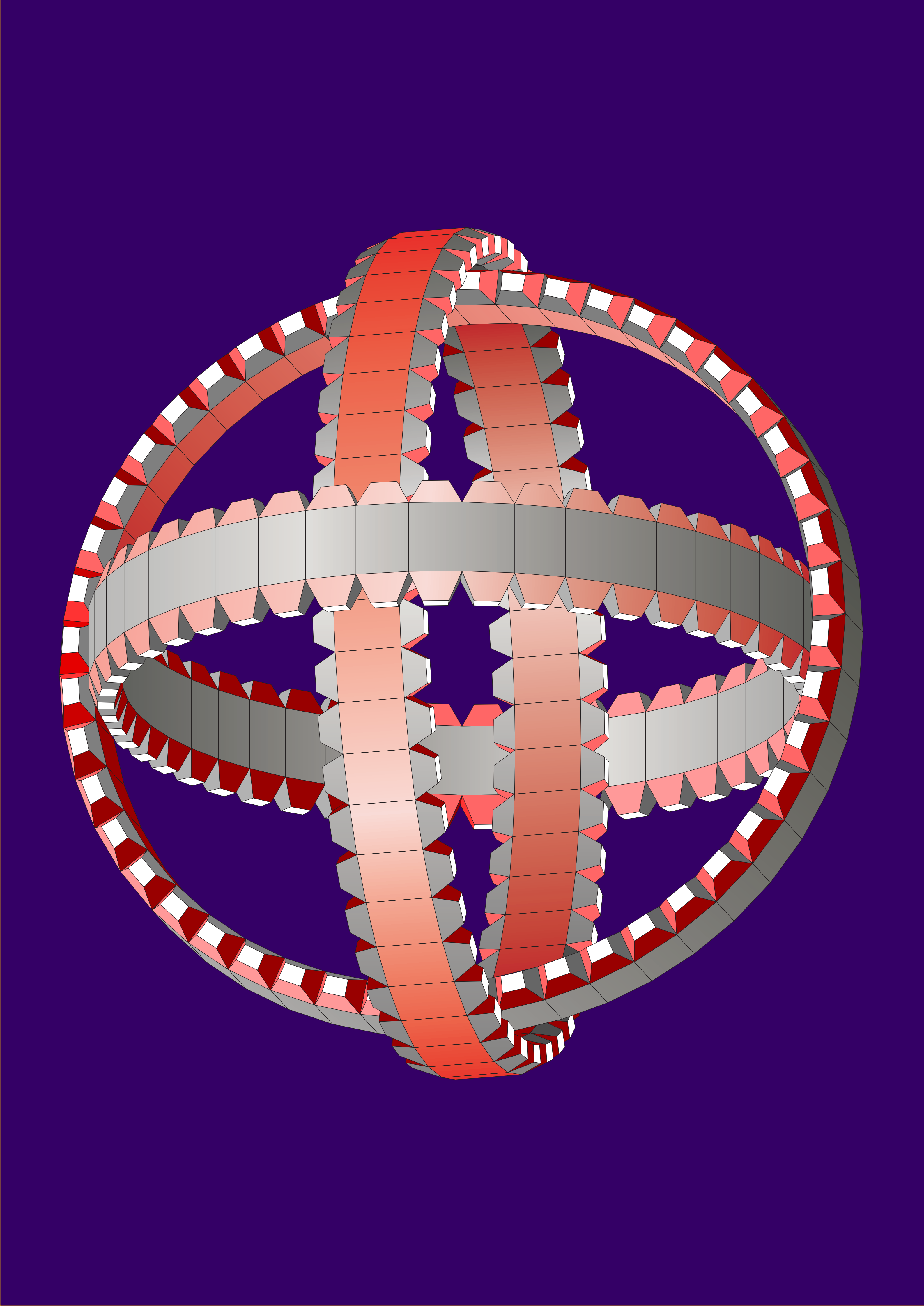
i) $f(x) = -x^6 + 20x^4 - 240x^2$ **j)** $f(x) = (x+5)^3(x-5)^3$

•6 Vom Term f(x) einer Funktion ist bekannt:
$f''(x)>0$ für $x\in]-\infty;1[$; $f''(1)=0$
$f''(x)<0$ für $x\in]1;4[$; $f''(4)=0$ $f''(x)<0$ für $x\in]4;+\infty[$
Skizziere eine passende Kurve, die durch den Ursprung geht.

:7 Zeige: – Jede Polynomkurve vom Grad 3 hat einen Wendepunkt.
– Dieser Wendepunkt ist ihr Symmetriezentrum.

8 Zwölf Bildchen zeigen jeweils einen Kurvenpunkt (a|f(a)) und den Verlauf einer Polynomkurve vom Grad 3 in seiner Umgebung. Lies ab, ob f(a), f'(a) und f''(a) positiv, negativ oder gleich null sind.





IV. Anwendungen

1. Kurvendiskussion

Mit den bisherigen Methoden sind wir jetzt in der Lage, einen klassischen Aufgabentyp der Schulanalysis anzupacken: Kurvendiskussion.
Hier geht es darum, aus dem Funktionsterm alle markanten Eigenschaften der Kurve herauszuarbeiten; die Zeichnung der Kurve ist dann als Krönung eine grafische Zusammenfassung aller Ergebnisse.
Im Allgemeinen läuft die Kurvendiskussion in 3 wesentlichen Schritten ab: Man untersucht der Reihe nach die Terme f(x), f'(x) und f''(x):

f(x)
- Maximale Definitionsmenge des Terms f(x): $D_{f,max}$
  das sind alle reellen Zahlen, für die der Term wieder einen Wert liefert.
- Symmetrie zum Koordinatensystem
  zum Ursprung: $f(-x) = -f(x)$
  zur y-Achse: $f(-x) = f(x)$
- Verhalten am Rand der Definitionsmenge, zum Beispiel $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$
- Achsenpunkte
  $(0|f(0))$ auf der y-Achse
  $f(x)=0$ liefert die Nullstellen (mit Vielfachheit)

f'(x)
- Waagrechtpunkte $f'(x)=0$
- Monotonieverhalten $f'(x) \lesseqgtr 0$
- Art der Waagrechtpunkte: Hoch-, Tief-, Terrassenpunkt
- Tangente in $(a|f(a))$: $y=f'(a)\cdot(x-a)+f(a)$
- Normale in $(a|f(a))$: $y=\frac{-1}{f'(a)}\cdot(x-a)+f(a)$
- Schnittwinkel, zum Beispiel mit den Koordinatenachsen

f''(x)
- Flachpunkte $f''(x)=0$
- Krümmungsverhalten $f''(x) \lesseqgtr 0$
- Art der Flachpunkte: Wendepunkt?
- Wendetangente

Zeichnung des Graphen so, dass er alle Ergebnisse zeigt. Beim Zeichnen entlarven sich falsche Ergebnisse meist sofort, weil sie nicht ins Bild passen. Schließlich kann man noch aus dem Kurvenverlauf die Wertemenge W_f ablesen. Zur Einübung zeigen wir eine ausführliche Kurvendiskussion, die diesem Schema folgt.

1. Beispiel: $\mathbf{f(x) = \frac{1}{162}(x^5 - 30x^3)}$

Faktorisierung $\mathbf{f(x) = \frac{1}{162}x^3(x^2 - 30)}$

- Maximale Definitionsmenge: $D_{f,max} = \mathbb{R}$
- Symmetrie G_f
  G_f ist symmetrisch zum Ursprung (nur ungerade Exponenten)
  oder allgemein: $f(-x) = \frac{1}{162}(-x^5 + 30x^3) = -\frac{1}{162}(x^5 - 30x^3) = -f(x)$
  also Symmetrie zum Ursprung.
- Verhalten am Rand der Definitionsmenge
  $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
- Achsenpunkte
  $f(0) = 0$, y-Achsenpunkt $(0|0)$
  $f(x) = 0 \Rightarrow\ x^3 = 0$ oder $x^2 = 30$
  $x = 0$ eine 3fache Nullstelle
  $x = \pm\sqrt{30}$ zwei 1fache Nullstellen

$\mathbf{f'(x) = \frac{1}{162}(5x^4 - 90x^2) = \frac{5}{162}x^2(x^2 - 18)}$

- Waagrechtstellen
  $f'(x) = 0 \Rightarrow\ x^2 = 0$ oder $x^2 = 18$
  $x = 0$ (doppelt) oder $x = \pm 3\sqrt{2}$ (jeweils einfach)
  $f(0) = 0$ Waagrechtpunkt $W_1(0|0)$
  $f(3\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$ Waagrechtpunkt $W_2(3\sqrt{2}|-4\sqrt{2})$
  für die Zeichnung $W_2(\approx 4{,}2|\approx -5{,}7)$
  wegen Symmetrie zu O ist $W_3(-3\sqrt{2}|4\sqrt{2})$
- Monotonie

+	0^1	−	0^2	−	0^1	+	$f'(x)$
ems	$-3\sqrt{2}$	emf	3	emf	$3\sqrt{2}$	ems	x
↗	$\mathbf{W_3}$	↘	$\mathbf{W_1}$	↘	$\mathbf{W_2}$	↗	

- Art der Waagrechtpunkte
  W_1 ist Terrassenpunkt, W_2 ist Tiefpunkt, W_3 ist Hochpunkt
- Tangente
  zum Beispiel im Achsenpunkt $(\sqrt{30}|0)$: $f'(\sqrt{30}) = \frac{100}{9}$
  Tangentengleichung $y = \frac{100}{9}(x - \sqrt{30}) + 0 = \frac{100}{9}x - \frac{100}{9}\sqrt{30}$
- Schnittwinkel φ, zum Beispiel von Kurve und x-Achse bei $x = \sqrt{30}$
  $\tan\varphi = \frac{100}{9} \Rightarrow \varphi = 84{,}9°$

$$\mathbf{f''(x) = \frac{1}{162}(20x^3 - 180x) = \frac{10}{81}x(x^2 - 9)}$$

- Flachstellen

  $f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ oder $x^2 = 9$

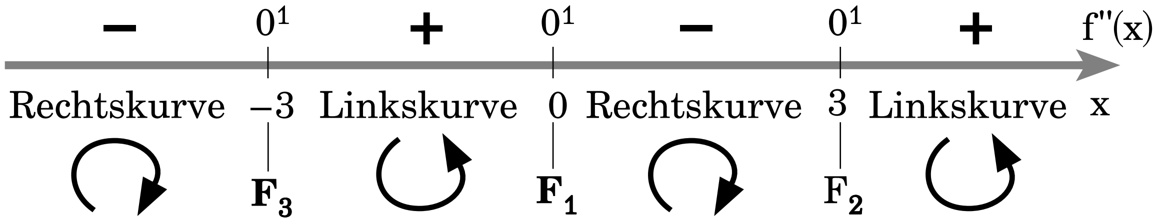
  $x = 0$ (einfach) oder $x = \pm 3$ (jeweils einfach)

  $f(0) = 0$ Flachpunkt $F_1(0|0) = W_1$

  $f(3) = -\frac{7}{2}$ Flachpunkt $F_2(3|-3{,}5)$

  wegen Punktsymmetrie Flachpunkt $F_3(-3|3{,}5)$

- Krümmung

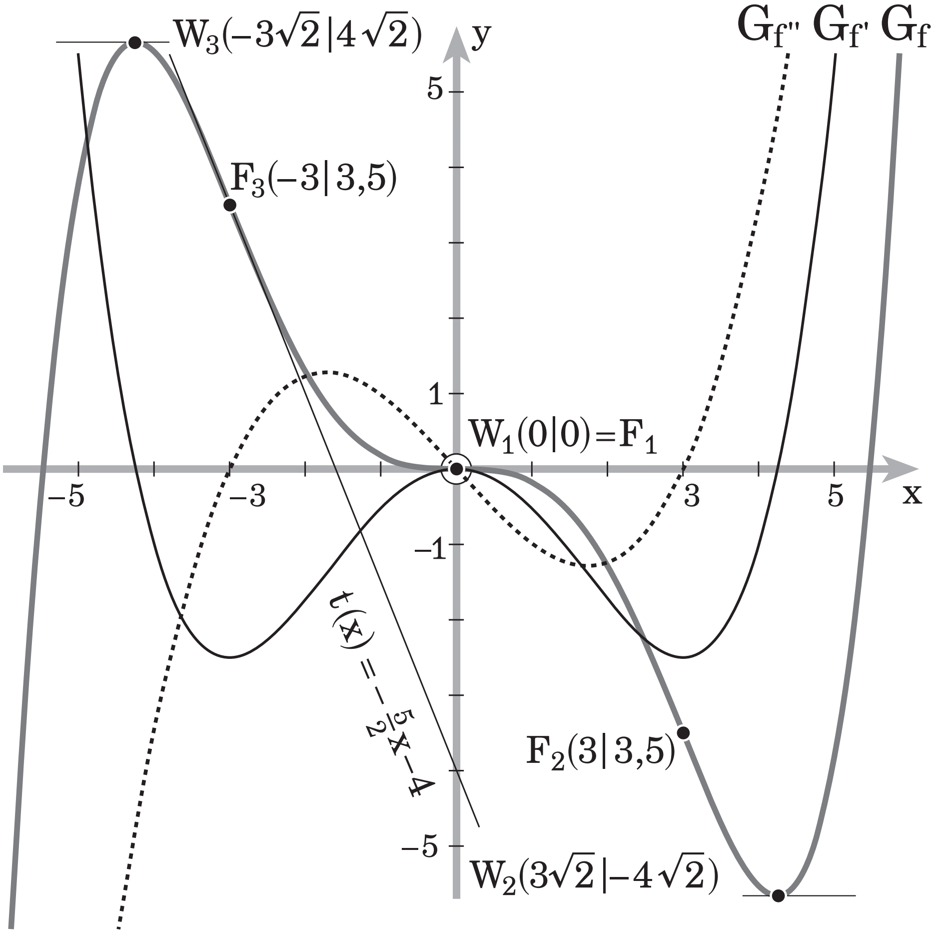


- Art der Flachpunkte: alle Flachpunkte sind Wendepunkte.
- Wendetangente

  zum Beispiel in $F_3(-3|3{,}5)$: Steigung in F_3 : $f'(-3) = -\frac{5}{2}$

  $y = -\frac{5}{2}(x+3) + \frac{7}{2}$

  $y = -\frac{5}{2}x - 4$



Aus dem Bild lesen wir ab:

- $W_f = \mathbb{R}$
- Wie oft treten bestimmte Funktionswerte auf:
  jedes y mit $-4\sqrt{2} < y < 4\sqrt{2}$ kommt 3mal vor,
  jeder der beiden Werte $y = \pm 4\sqrt{2}$ kommt zweimal vor,
  jedes y mit $y < -4\sqrt{2}$ oder $y > 4\sqrt{2}$ kommt genau einmal vor.
- Beim Ableiten entsteht Achsensymmetrie aus Punktsymmetrie und umgekehrt. Diese Beobachtung gilt allgemein (wie wir noch sehen werden).

Bisher haben wir die Art der Waagrechtpunkte mit dem Monotonieverhalten, die Art der Flachpunkte mit dem Krümmungsverhalten gefunden. Manchmal hilft auch ein Satz, der hinreichende Bedingungen für solche Punkte angibt:

Gilt $f'(a)=0$ und $f''(a)<0$, dann ist $(a|f(a))$ Hochpunkt.

Gilt $f'(a)=0$ und $f''(a)>0$, dann ist $(a|f(a))$ Tiefpunkt.

Gilt $f''(a)=0$ und $f'''(a)\neq 0$, dann ist $(a|f(a))$ Wendepunkt.

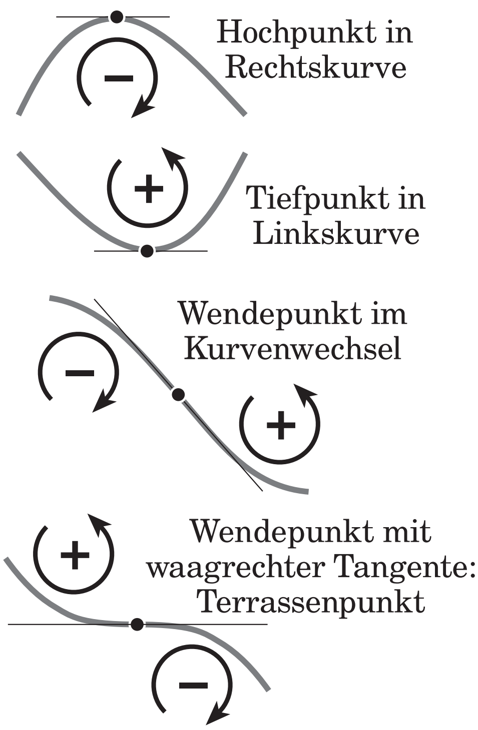
Gilt $f'(a)=0$ und $f''(a)=0$ und $f'''(a)\neq 0$, dann ist $(a|f(a))$ Terrassenpunkt.

Man kann sich das so klar machen:

– Eine waagrechte Tangente in einer Rechtskurve ist nur bei einem Hochpunkt möglich.

– Eine waagrechte Tangente in einer Linkskurve ist nur bei einem Tiefpunkt möglich.

– Bei einem Flachpunkt mit $f'''(a) \neq 0$ wechselt das Vorzeichen der Krümmungsart, durchdringen sich Kurve und Tangente, ist der Flachpunkt also Wendepunkt; ist dort auch noch die Steigung gleich 0, dann hat der Wendepunkt eine waagrechte Tangente, ist also Terrassenpunkt.



Wir wenden den Satz im Beispiel der Kurvendiskussion an:

$f'(-3\sqrt{2}) = 0$

$f''(-3\sqrt{2}) = -\frac{10}{81} \cdot 3\sqrt{2}(18-9) = -\frac{10}{3}\sqrt{2} < 0$, also ist $(-3\sqrt{2}\,|\,4\sqrt{2})$ Hochpunkt

$f'(3\sqrt{2}) = 0$

$f''(3\sqrt{2}) = \frac{10}{3}\sqrt{2} > 0$, also ist $(3\sqrt{2}\,|\,-4\sqrt{2})$ Tiefpunkt.

Im folgenden brauchen wir f'''(x):

$f'''(x) = \frac{1}{162}(60x^2 - 180) = \frac{10}{27}(x^2 - 3)$

$f'(0) = 0$ und $f''(0) = 0$ und $f'''(0) = -\frac{10}{9} \neq 0$, also ist $(0|0)$ Terrassenpunkt

$f''(\pm 3) = 0$ und $f'''(\pm 3) = \frac{20}{9} \neq 0$, also sind $(\pm 3|\mp 3{,}5)$ Wendepunkte.

Man muss beachten, dass der Satz nur hinreichende Bedingungen enthält. Es sind keine notwendigen Bedingungen wie die Beispiele auf Seite ••100 und ••108 zeigen. Außerdem ist er nutzlos, wenn auch noch die 3. Ableitung gleich 0 ist. So gilt zum Beispiel für die Funktion f mit

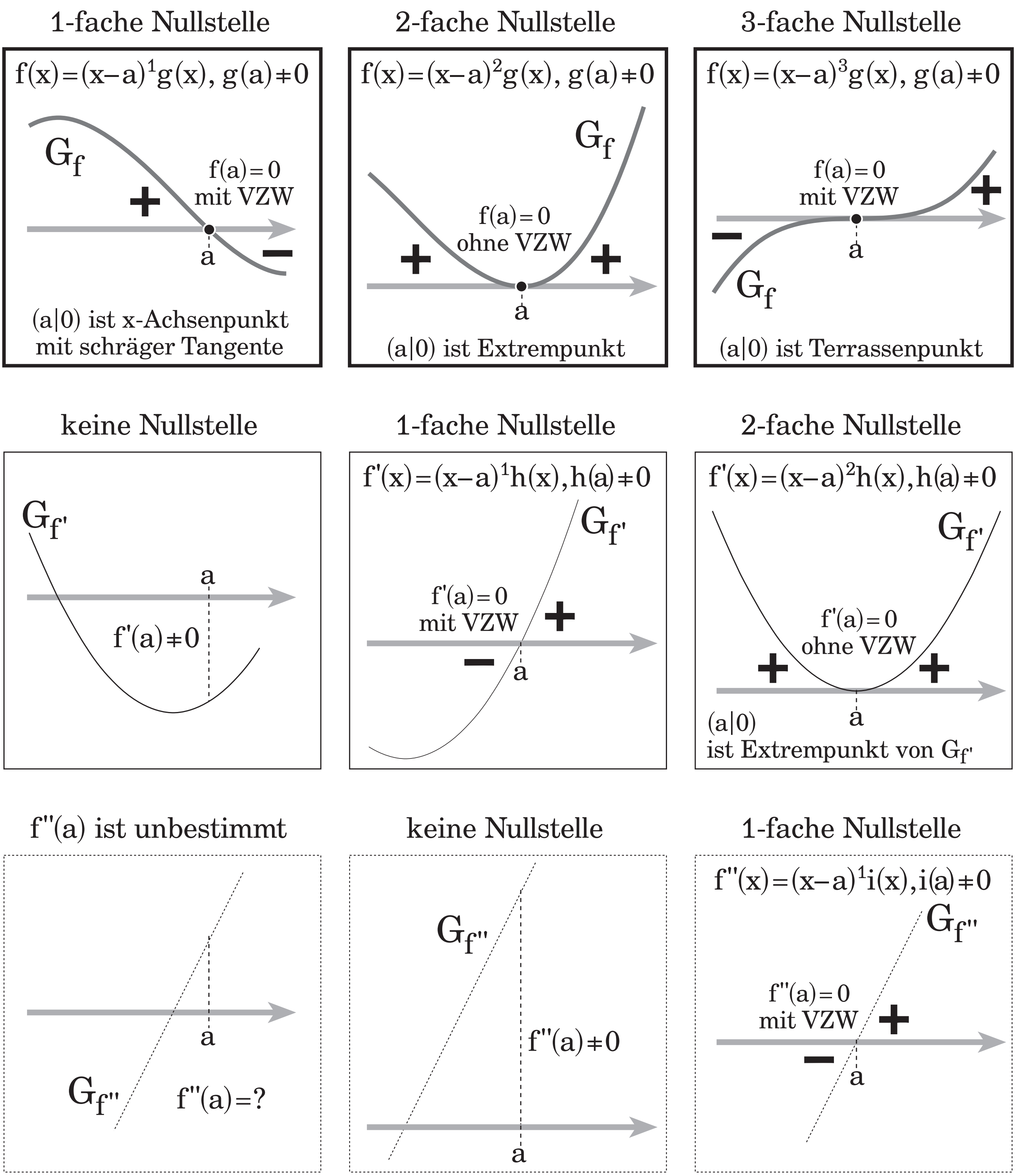
$f(x) = x^5 + x^4$	$f(0) = 0$	Nullstelle
$f'(x) = 5x^4 + 4x^3$	$f'(0) = 0$	waagrechte Tangente
$f''(x) = 20x^3 + 12x^2$	$f''(0) = 0$	Flachpunkt
$f'''(x) = 60x^2 + 24x$	$f'''(0) = 0$	?

Monotonie- und Krümmungsverhalten geben in solchen Fällen immer Auskunft.

Alle markanten Eigenschaften einer Polynomkurve äußern sich in den Nullstellen und Vorzeichen von f(x), f'(x) und f''(x). Deshalb ist die Untersuchung der Nullstellen von f(x), f'(x) und f''(x) und ihrer Vielfachheit (Vorzeichenwechsel!) vorrangiges Ziel einer jeden Kurvendiskussion.

Die folgende Übersicht fasst diese Zusammenhänge tabellarisch zusammen.

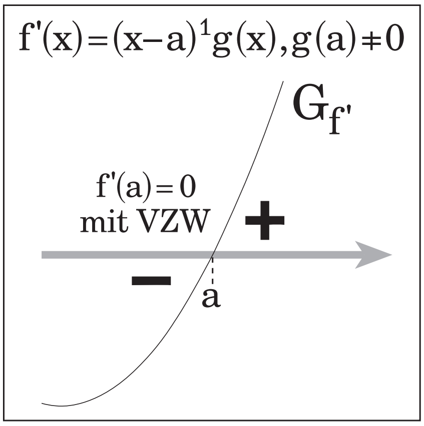
f(a) = 0: a ist Nullstelle von f(x)



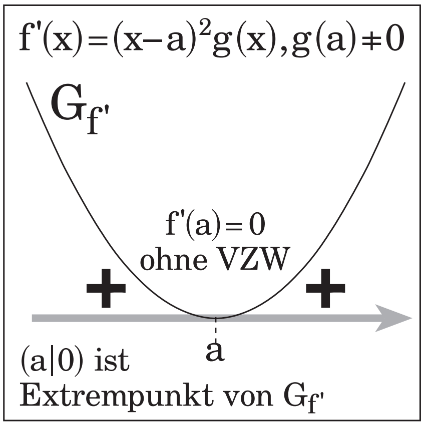
VZW bedeutet Vorzeichenwechsel.
Die Aussage »f''(a) ist unbestimmt« bedeutet:
f''(a) läßt sich erst bestimmen,wenn man das Polynom kennt.

$f'(a) = 0$: a ist Nullstelle von $f'(x)$, a ist Waagrechtstelle

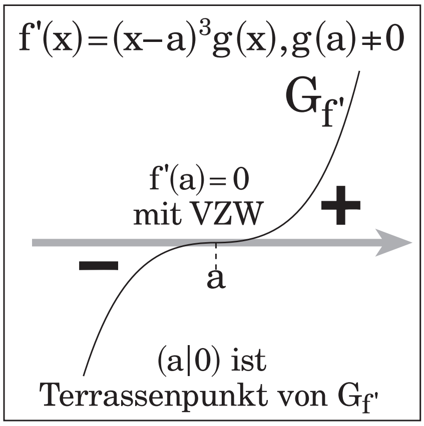
1-fache Nullstelle



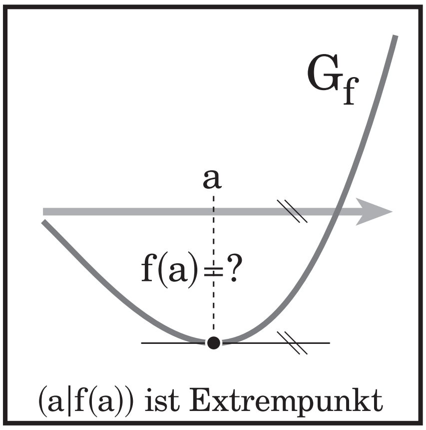
2-fache Nullstelle



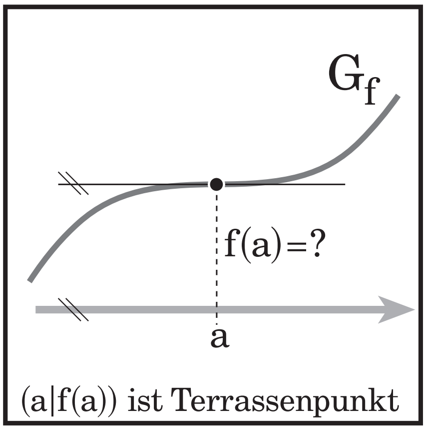
3-fache Nullstelle



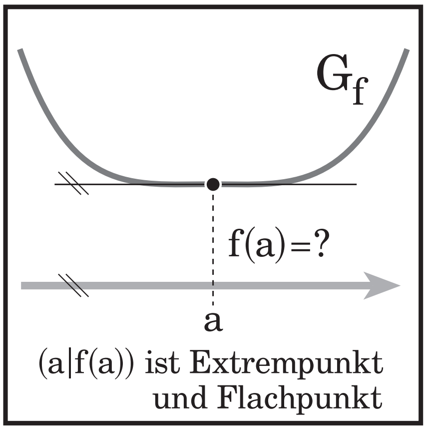
f(a) ist unbestimmt



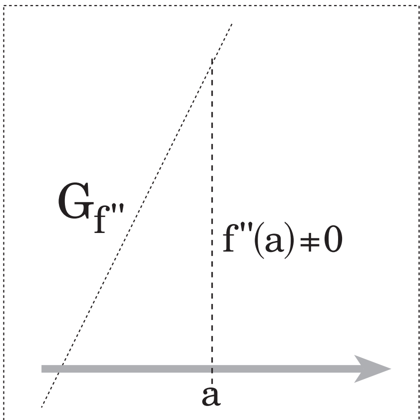
f(a) ist unbestimmt



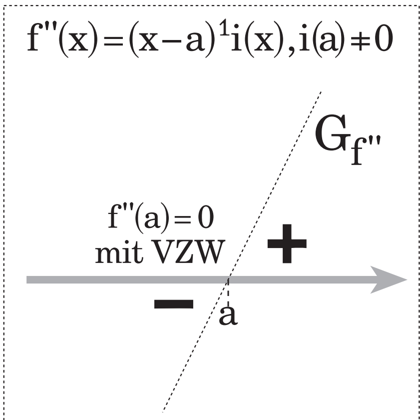
f(a) ist unbestimmt



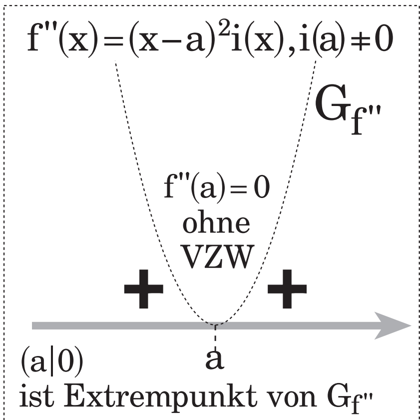
keine Nullstelle



1-fache Nullstelle



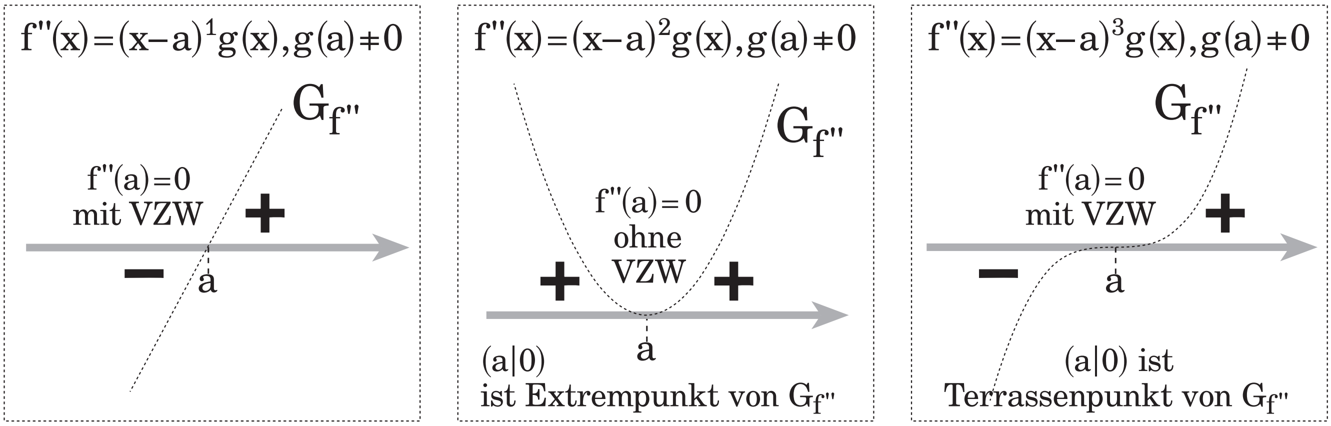
2-fache Nullstelle



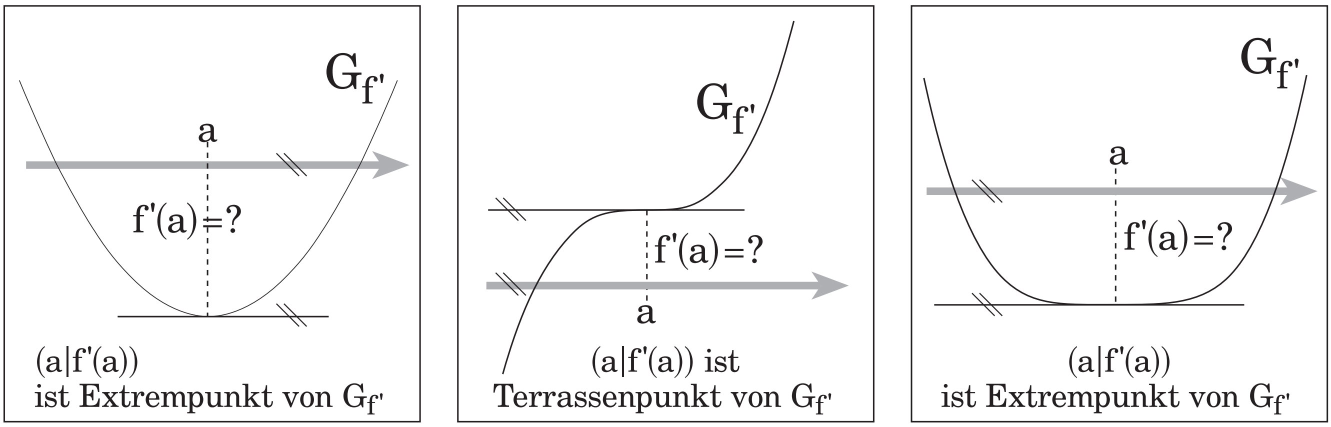
VZW bedeutet Vorzeichenwechsel.
Die Aussage »f(a) ist unbestimmt« bedeutet:
f(a) läßt sich erst bestimmen,wenn man das Polynom kennt.

$f''(a) = 0$: a ist Nullstelle von $f''(x)$, a ist Flachstelle

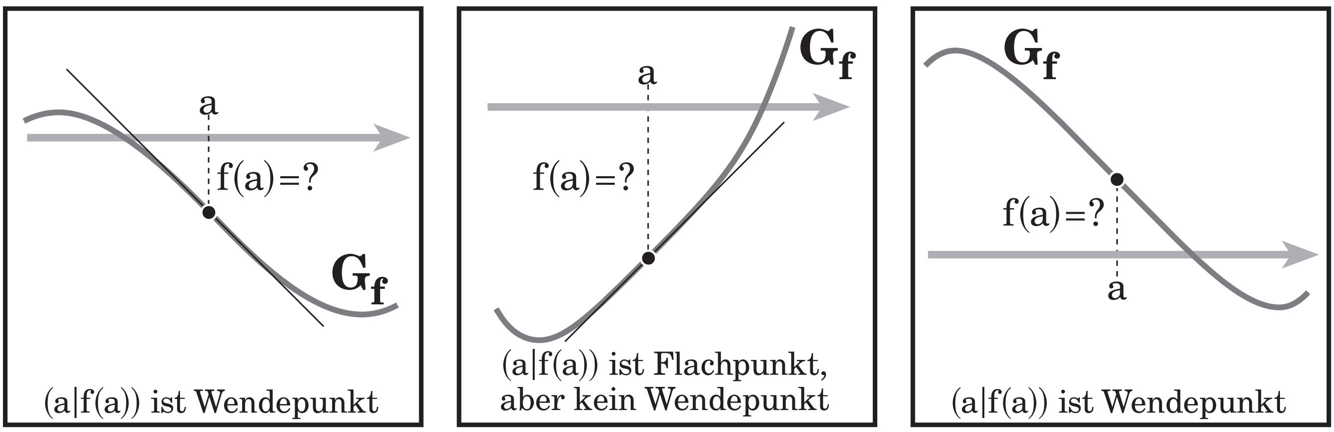
1-fache Nullstelle | 2-fache Nullstelle | 3-fache Nullstelle



f'(a) ist unbestimmt | f'(a) ist unbestimmt | f'(a) ist unbestimmt



f(a) ist unbestimmt | f(a) ist unbestimmt | f(a) ist unbestimmt



VZW bedeutet Vorzeichenwechsel.
Die Aussage »f(a) ist unbestimmt« bedeutet:
f(a) läßt sich erst bestimmen,wenn man das Polynom kennt.

Aufgaben

◊**1** Bestimme Nullstellen, Verhalten im Unendlichen, Symmetrie zum Koordinatensystem, Extrem- und Wendepunkte. Zeichne die Kurve und gib die Wertemenge an.

a) $f(x) = \frac{1}{8}x(x^2-12)$ **b)** $f(x) = \frac{1}{8}x^2(6-x)$

c) $f(x) = -\frac{1}{8}(x^3+x)$ **d)** $f(x) = \frac{1}{8}(x^3+2x^2-15x)$

◊**2** Bestimme Nullstellen, Verhalten im Unendlichen, Symmetrie zum Koordinatensystem, Extrem- und Wendepunkte. Zeichne die Kurve und gib die Wertemenge an.

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^4-3x^2$ **b)** $f(x) = \frac{x^2}{3}-\frac{4x^3}{135}-\frac{x^4}{90}$

c) $f(x) = \frac{1}{256}(x^4-16x^3+96x^2)$ **d)** $f(x) = \frac{-1}{64}(x^4+8x^3)$

e) $f(x) = x^4+4x^3+6x^2+4x$

3 Bestimme Nullstellen, Verhalten im Unendlichen, Symmetrie zum Koordinatensystem, Extrem- und Wendepunkte. Zeichne die Kurve und gib die Wertemenge an.

a) $f(x) = \frac{1}{324}(x^5-30x^3+405x)$ **b)** $f(x) = \frac{1}{8}(x^5-7x^4+12x^3)$

c) $f(x) = \frac{-1}{54}(x-2)^4(x+3)$ **d)** $f(x) = \frac{1}{576}(x+6)^3(x-4)^2$

e) $f(x) = \frac{-1}{200}x(x^2-25)^2$ **f)** $f(x) = \frac{1}{64}(3x^5+20x^4+40x^3)$

4 Bestimme Nullstellen, Verhalten im Unendlichen, Symmetrie zum Koordinatensystem, Extrem- und Wendepunkte. Zeichne die Kurve und gib die Wertemenge an.

a) $f(x) = \frac{1}{1024}(x^2-20)^3$ **b)** $f(x) = \frac{1}{256}x^4(x-6)^2$

c) $f(x) = \frac{-1}{256}(5x^6+42x^5+90x^4)$ **d)** $f(x) = \frac{1}{2592}(5x^6-66x^5+210x^4)$

e) $f(x) = \frac{-1}{100}(x^6-30x^4+225x^2)$ **f)** $f(x) = \frac{1}{1024}(x^6-12x^5+40x^4)$

5 Gegeben sind $f(x) = \frac{1}{18}(x+2)(x-4)^2$ und $g(x) = 2x$

a) Bestimme die Tangenten von G_f, die parallel sind zu g.

b) Bestimme die Tangenten von G_f, die senkrecht sind zu g.

6 Gegeben sind $f(x) = \frac{-1}{10}(x+4)(x-2)^2$ und $g(x) = \frac{2}{3}x$

a) Bestimme die Normalen von G_f, die parallel sind zu G_g.

b) Bestimme die Normalen von G_f, die senkrecht sind zu G_g.

7 $f(x) = \frac{1}{16}x(x^2-12)$

a) Bestimme die Wendetangente.

b) Bestimme die Normale im Wendepunkt (»Wendenormale«)

c) Bestimme die Schnittpunkte von Kurve und Wendenormale; berechne die Schnittwinkel.

8 $f(x) = \frac{-1}{32}(x^4-18x^2+17)$

Bestimme die Tangente t in (1|?) und die gemeinsamen Punkte von Kurve und Tangente; berechne die Schnittwinkel.

9 $f(x) = x^4 - 2x^2 - x \qquad g(x) = -x - 2$

a) Bestimme die Tangenten von G_f, die parallel sind zu G_g.

b) Eine senkrechte Gerade mit x=a schneidet G_f in P und G_g in Q.
Für welches a ist $\overline{PQ}$ extremal?
Welches Extremum liegt jeweils vor?

10 Berechne diejenigen Kurvenpunkte, die auf einer waagrechten Tangente der Kurve liegen

a) $f(x) = -x^3 - 6x^2 + 135x$ **b)** $f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2$

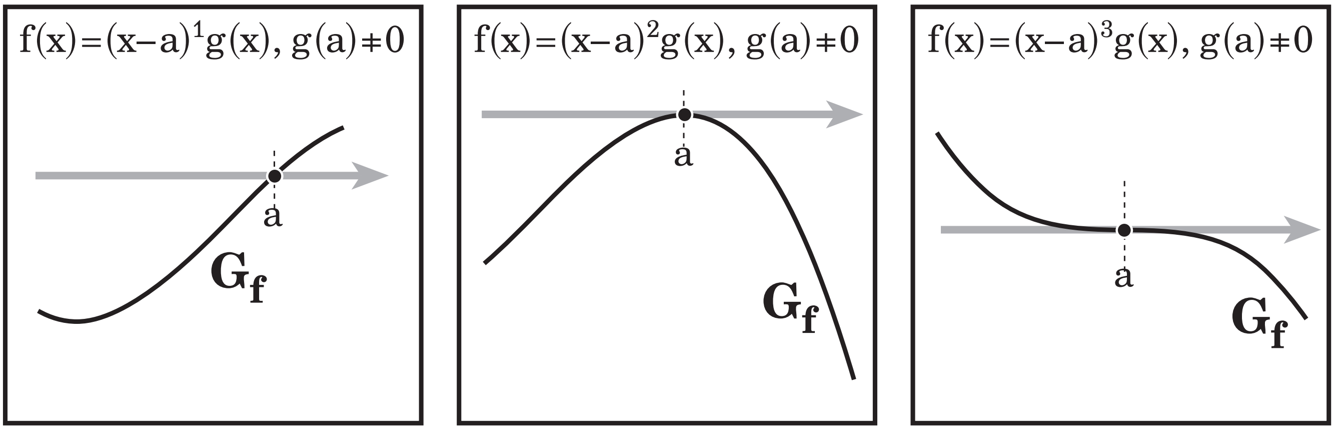
11 $f(x) = \frac{1}{9}(x^3 - 6x^2 - 135x)$

Bestimme die Gleichungen der Tangenten, die die Kurve in deren Achsenpunkten berühren.
Berechne diejenigen Kurvenpunkte, die auf einer Tangente liegen.

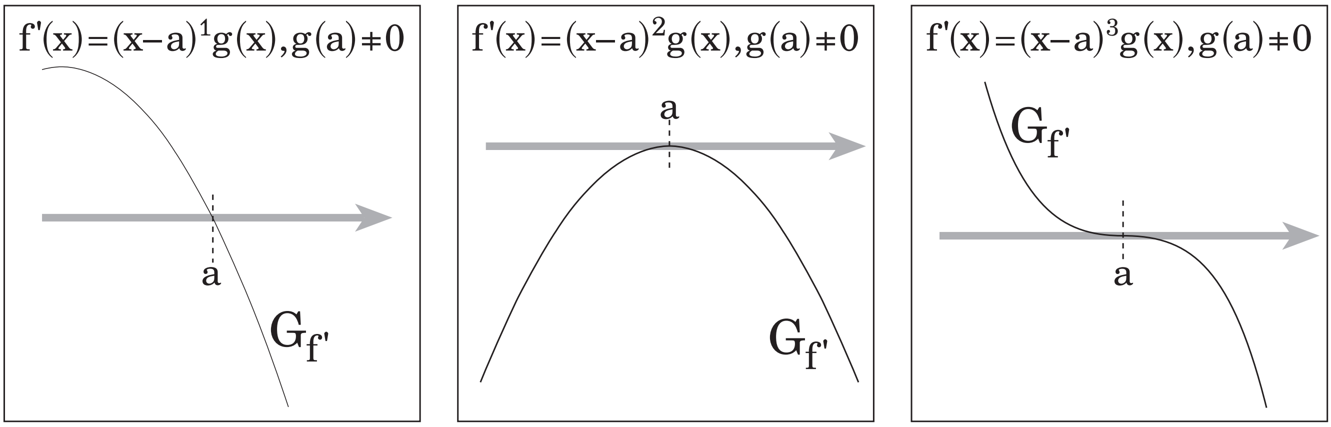
12 Berechne diejenigen Kurvenpunkte, die auf einer Wendetangente der Kurve liegen

a) $f(x) = \frac{1}{16}(x^4+16x^3+72x^2)$ **b)** $f(x) = -x^4 + 10x^3 - 24x^2$

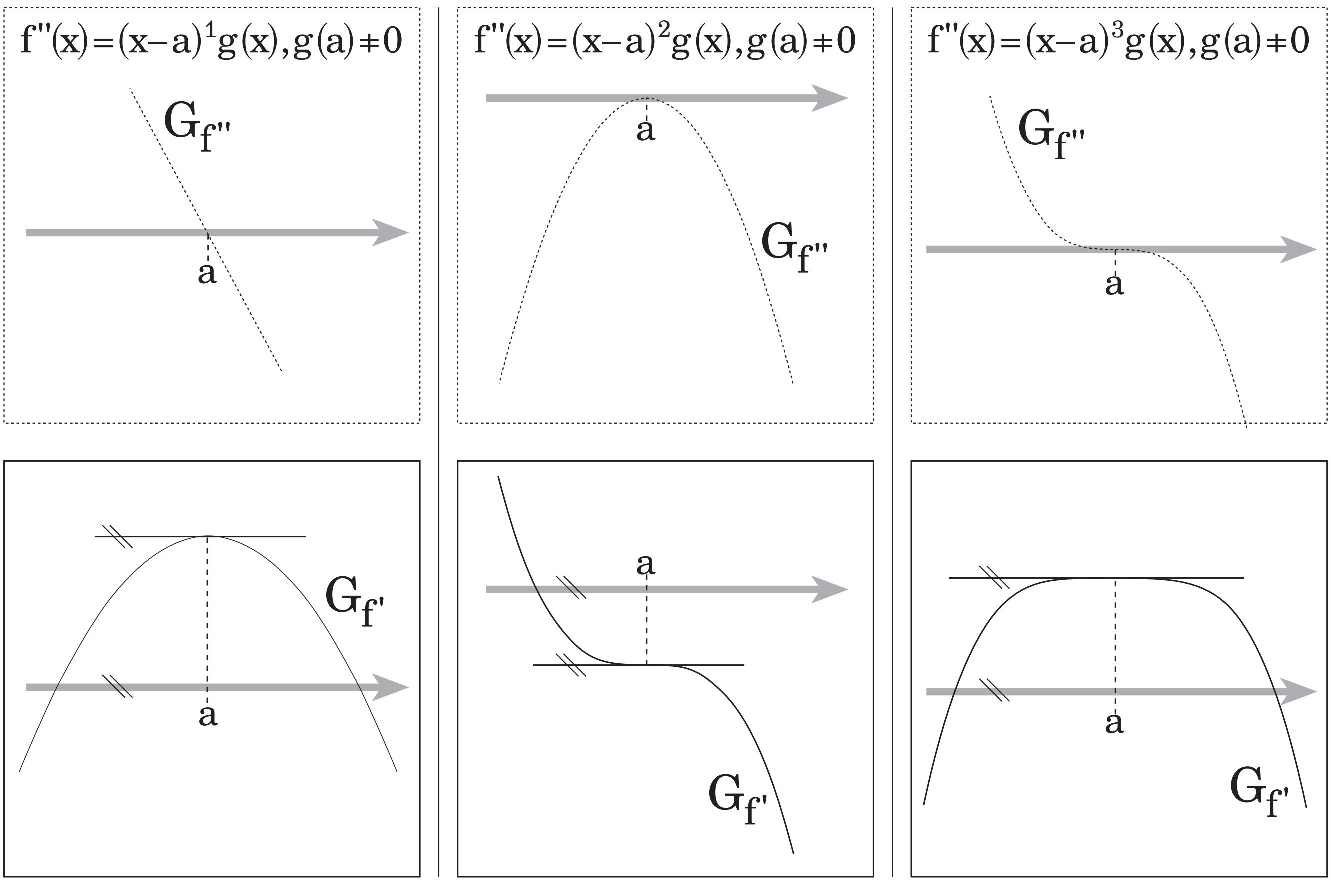
•13 Skizziere wie in den vorigen Bildern mögliche Verläufe von $G_{f'}$ und $G_{f''}$.



•14 Skizziere wie in den vorigen Bildern mögliche Verläufe von $G_{f''}$ und G_f.



•15 Skizziere wie in den vorigen Bildern mögliche Verläufe von G_f.



16 Wieviel Nullstellen, Waagrechtpunkte und Flachpunkte
muss eine Polynomkurve mindestens und
kann eine Polynomkurve höchstens haben,
wenn der Grad des Polynoms f(x) ist:

a) 3 **b)** 4 **c)** 5 **d)** n

17 Wieviel Extrempunkte, Wendepunkte und Terrassenpunkte
muss eine Polynomkurve mindestens und
kann eine Polynomkurve höchstens haben,
wenn der Grad des Polynoms f(x) ist:

a) 3 **b)** 4 **c)** 5 **d)** n

18 Nullstellen und Wendestelle
a, b und c seien die (nicht notwendig verschiedenen) Nullstellen einer Polynomfunktion vom Grad 3. Zeige: die Wendestelle ist das arithmetische Mittel der Nullstellen $\frac{a+b+c}{3}$.

2. Termbestimmung

In Umkehrung zur Kurvendiskussion fordert man jetzt, dass eine Kurve gewisse Eigenschaften hat. Aufgabe ist es, einen dazu passenden Funktionsterm zu bestimmen. Man setzt den Funktionsterm (hier vorerst Polynom) mit allgemeinen Koeffizienten a, b, c, … an und übersetzt die Eigenschaften in Gleichungen für diese Koeffizienten:

$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots$	
Eigenschaft	**Gleichung**
P(u|v) ist Kurvenpunkt	$f(u) = v$
Tangentensteigung in u ist m	$f'(u) = m$
u ist x-Wert eines Extrempunkts	$f'(u) = 0$ $[f''(u) \neq 0]$
u ist x-Wert eines Wendepunkts	$f''(u) = 0$ $[f'''(u) \neq 0]$

Will man den Funktionsterm eindeutig festlegen, so braucht man so viele Gleichungen wie unbekannte Koeffizienten angesetzt sind. Es kann auch vorkommen, dass es überhaupt keine Kurve mit den geforderten Eigenschaften gibt; dann enthält das Gleichungssystem einen Widerspruch.

2. Beispiel: Eine Polynomkurve G_f vom Grad 3 habe den Hochpunkt W(2|0), in Q(3|q) die Steigung −9, und den Wendepunkt F(1|w).

Allgemeiner Ansatz mit Ableitungen:

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
$f''(x) = 6ax + 2b$

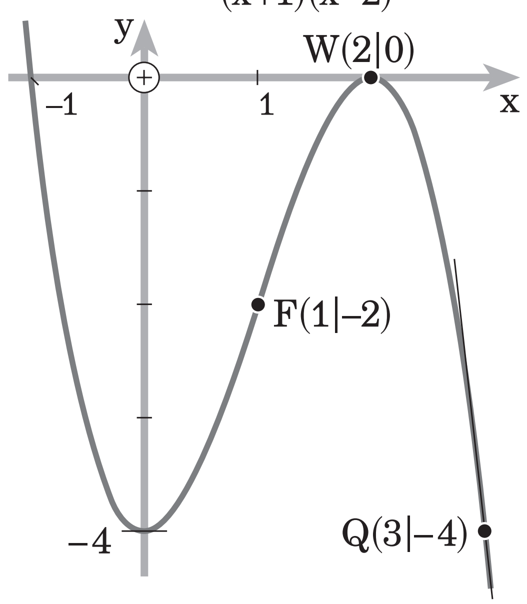
Übersetzung der gewünschten Eigenschaften in Gleichungen:

W(2|0) ist Kurvenpunkt	$\Leftrightarrow$	$f(2) = 0$, das heißt	
		$8a + 4b + 2c + d = 0$	I
2 ist x-Wert eines Extrempunkts	$\Rightarrow$	$f'(2) = 0$, das heißt	
		$12a + 4b + c = 0$	II
Tangentensteigung in 3 ist −9	$\Leftrightarrow$	$f'(3) = -9$, das heißt	
		$27a + 6b + c = -9$	III
1 ist x-Wert eines Wendepunkts	$\Rightarrow$	$f''(1) = 0$, das heißt	
		$6a + 2b = 0$	IV

I bis IV sind 4 Gleichungen mit den 4 Unbekannten a, b, c, d. Diese findet man, indem man jeweils eine Gleichung nach einem Koeffizienten auflöst und ihn in die übrigen Gleichungen einsetzt:

IV	$\underline{b = -3a}$ eingesetzt	
	in I ergibt I'	$-4a + 2c + d = 0$
	in IIergibt II'	$c = 0$
	in IIIergibt III'	$9a + c = 0$
II'	$\underline{c = 0}$ eingesetzt	
	in I'ergibt I''	$-4a + d = 0$
	in III'ergibt III''	$9a = -9$
III''	$\underline{a = -1}$ eingesetzt in I'' ergibt I'''$d = -4$	

$f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$
$= -(x+1)(x-2)^2$



Der einzige Term, der die Bedingungen erfüllt, ist $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$. Man muss noch überprüfen, ob W(2|0) Hochpunkt ist; W könnte auch Tief- oder Terrassenpunkt sein, weil wir nur »waagrechte Tangente« übersetzt haben. Fraglich ist auch, ob F(1|w) Wendepunkt ist, weil wir nur »Flachpunkt« übersetzt haben.

Überprüfung:

W(2|0) ist tatsächlich Hochpunkt,
weil $f''(2) = -6 < 0$ ist.
1 ist tatsächlich x-Wert eines Wendepunkts,
weil $f'''(1) = -6 \neq 0$ ist.

Die zugehörige Kurve ist links zu sehen.

Manchmal lassen sich Eigenschaften schon im Ansatz berücksichtigen; der Lösungsweg ist dann wesentlich kürzer. In diesem Beispiel folgt aus »W(2|0) ist Hochpunkt«, dass 2 doppelte Nullstelle von f(x) ist. Der Ansatz kann jetzt so ausschauen:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-2)^2(ax+b) \\ &= ax^3+(b-4a)x^2+4(a-b)x+4b \\ f'(x) &= 3ax^2+2(b-4a)x+4(a-b) \\ f''(x) &= 6ax+2(b-4a) \end{aligned}$$

Tangentensteigung in 3 ist -9 $\Leftrightarrow$ $f'(3)=-9$, das heißt $7a+2b=-9$
1 ist x-Wert eines Wendepunkts $\Rightarrow$ $f''(1)=0$, das heißt $a=b$.
Dies führt zu $a=b=-1$ und $f(x)=-(x-2)^2(x+1)$.

Ist Symmetrie zum Koordinatensystem gefordert, dann vereinfacht sich der Ansatz am stärksten:

Symmetrie zur y-Achse:	Die Koeffizienten bei ungeraden x-Potenzen sind gleich 0. $f(x)=a+bx^2+cx^4+\ldots$
Symmetrie zum Ursprung:	Die Koeffizienten bei geraden x-Potenzen sind gleich 0. $f(x)=ax+bx^3+cx^5+\ldots$

Aufgaben

Bestimme den Funktionsterm in:

◊**1** Eine oben offene Normalparabel berühre bei –2 die Winkelhalbierende des 3. Quadranten.

2 Die Winkelhalbierende des 4. Quadranten sei Normale einer Parabel bei -4 und schneide die Parabel auf der y-Achse.

3 Für ein Polynom mit möglichst niedrigem Grad gelte:

a) $f(1)=f'(1)=f''(1)=f'''(1)=1$

b) $f(1)=1,\ f'(1)=2,\ f''(1)=3,\ f'''(1)=4$

◊**4** Eine Polynomkurve vom Grad 3 habe den Waagrechtpunkt W(1|8) und den Flachpunkt F(3|4).

◊**5** Eine zum Ursprung symmetrische Polynomkurve vom Grad 3 habe bei 3 die waagrechte Tangente $y=18$.

◊6 Eine Polynomkurve vom Grad 3 gehe durch den Ursprung und werde bei -2 von der Gerade t: $y = t(x) = -3x - 8$ im Wendepunkt berührt.

◊7 -2, 0 und 1 seien die Nullstellen einer Polynomkurve vom Grad 3 mit dem Ursprung als Wendepunkt.

8 Die x-Achse berühre eine Polynomkurve Gf vom Grad 3 im Ursprung, und die Winkelhalbierende des 1. Quadranten berühre Gf bei 2.

9 Eine Polynomkurve vom Grad 3 habe bei 0 und 1 und 2 waagrechte Tangenten und bei -1 die Tangentensteigung 1.

•10 Die Gerade g: $y = -2x$ berühre eine Polynomkurve G_f vom Grad 3 im Ursprung und schneide G_f bei 5 unter 45°.

11 Eine Polynomkurve vom Grad 3 gehe durch den Ursprung und habe die Waagrechtstellen 0 und 2 und die Wendestelle 1.

12 Die Gerade $y = t(x) = -2x - 4$ schneide eine zum Koordinatensystem symmetrische Polynomkurve auf der x-Achse rechtwinklig.
Das Polynom habe den Grad

a) $n = 2$ **b)** $n = 3$

13 Eine Polynomkurve gehe durch A(0|0) und habe den Waagrechtpunkt B(1|2). Bestimme ein Polynom p(x) vom Grad 2 und eines f(x) vom Grad 3 mit Wendepunkt A. Welcher der beiden Graphen liegt zwischen A und B näher an der x-Achse ?

14 Eine zum Koordinatensystem symmetrische Polynomkurve habe den Waagrechtpunkt W(1|9) und schneide die x-Achse in 2.
Das Polynom habe den Grad
a) $n = 4$ **b)** $n = 5$

15 Eine zum Koordinatensystem symmetrische Polynomkurve vom Grad 4 berühre in -2 die x-Achse und schneide die y-Achse in -2.

16 Eine zum Koordinatensystem symmetrische Polynomkurve vom Grad 4 gehe durch den Ursprung und habe den Flachpunkt (–1|5).

•17 Eine Polynomkurve vom Grad 4 gehe durch den Ursprung, habe bei 2 einen Extrempunkt und berühre bei 1 ihre Wendetangente $y = 4x + 1$.

18 Eine zum Koordinatensystem symmetrische Polynomkurve vom Grad 5 gehe durch den Ursprung und habe den Terrassenpunkt (1|8).

19 Eine Polynomkurve vom Grad 5 habe die Terrassenpunkte (0|0) und (–2|16).

3. Interpolation

In der praktischen Mathematik steht man oft vor dem Problem, eine komplizierte oder unbekannte Funktion zu ersetzen durch eine einfache Funktion, die sich aus vorliegenden Daten konstruieren lässt – anschaulich: Man legt durch bekannte Punkte eine Polynomkurve. Dieser Vorgang heißt Interpolation.

Ersatzkurve durch 2 Punkte

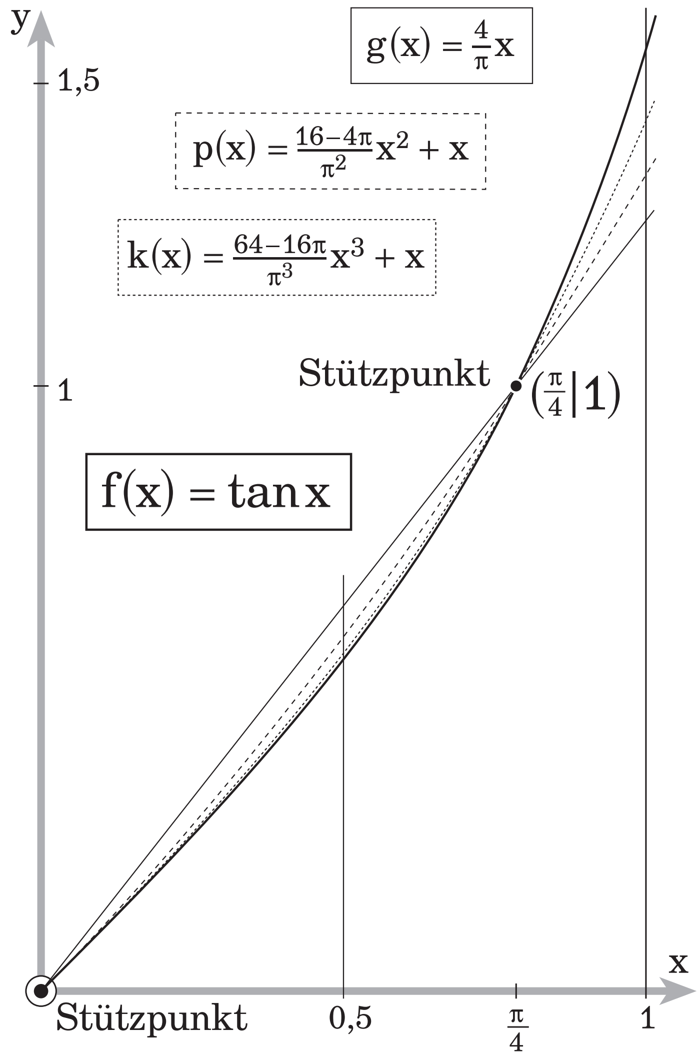
Man hat eine komplizierte Funktion f und möchte statt ihrer eine einfachere Ersatzfunktion verwenden, um näherungsweise Werte dieser Funktion zu berechnen. Taschenrechner und Computer arbeiten mit Polynomfunktionen als Ersatzfunktionen.

Beispiel: Tangensfunktion

Die Tangenskurve geht durch $(0|0)$ und $(\frac{\pi}{4}|1)$; gesucht sind Näherungswerte für $\tan \mathbf{0{,}5}$ und $\tan \mathbf{1}$.

Die gegebenen Punkte heißen Stützpunkte, ihre Koordinaten heißen Stützstellen (x-Werte) und Stützwerte (y-Werte). Liegt die betreffende Stelle zwischen beiden Stützstellen, hier $0<\mathbf{0{,}5}<\frac{\pi}{4}$, dann spricht man von **Interpolation**; liegt die Stelle außerhalb, hier $0<\frac{\pi}{4}<\mathbf{1}$, dann spricht man von **Extrapolation**.

Die **lineare Interpolation** verwendet eine affine Näherungsfunktion; ihr Graph, eine Interpolationsgerade, geht durch die Punkte $(0|0)$ und $(\frac{\pi}{4}|1)$, hat die Gleichung $y = g(x) = \frac{4}{\pi}x$.



Näherungswert für $\tan 0{,}5$

(Interpolation):

$$g(0{,}5) = \frac{2}{\pi} = 0{,}636619\ldots$$
$$\tan 0{,}5 = 0{,}5463\ldots$$
$$\text{relativer Fehler} = \frac{\text{Unterschied}}{\text{wahrer Wert}} = 16{,}5\,\%$$

Näherungswert für $\tan 1$ (Extrapolation):

$$g(1) = \frac{\pi}{4} = 1{,}2732\ldots$$
$$\tan 1 = 1{,}5574\ldots$$
$$\text{relativer Fehler} = 22{,}3\,\%$$

Die relativen Fehler sind bei dieser groben Interpolation ziemlich groß. Normalerweise werden sie kleiner, wenn die Stützstellen enger beisammen liegen oder wenn man eine aufwendigere Näherungsfunktion verwendet. Wir nehmen jetzt eine Parabel als Ersatzkurve; mit ihr interpoliert (extrapoliert) man quadratisch. Weil sie durch die beiden Punkte noch nicht festliegt, können wir noch eine Forderung stellen: Sie soll die Tangenskurve im Ursprung berühren. Wie wir später sehen werden, bedeutet das, dass sie bei 0 die Steigung 1 hat.

Ansatz: $p(x) = ax^2 + bx + c$

aus $p(0) = 0$

$p(\frac{\pi}{4}) = 1$

und $p'(0) = 1$ folgt $p(x) = \frac{16-4\pi}{\pi^2}x^2 + x \approx 0{,}3479x^2 + x$

Näherungswert für tan 0,5 (Interpolation): $p(0{,}5) \approx 0{,}5870$
$\tan 0{,}5 = 0{,}5463\ldots$
relativer Fehler = 7,5%

Näherungswert für tan 1 (Extrapolation): $p(1) \approx 1{,}3479$
$\tan 1 = 1{,}5574\ldots$
relativer Fehler = 13,5%

Eine kubische Näherungsfunktion k (Polynom vom Grad 3) mit Wendepunkt im Ursprung hat den Term: $k(x) = \frac{64-16\pi}{\pi^3}x^3 + x \approx 0{,}4430x^3 + x$

Näherungswert für tan 0,5 (Interpolation): $k(0{,}5) \approx 0{,}5554$
$\tan 0{,}5 = 0{,}5463\ldots$
relativer Fehler = 1,7%

Näherungswert für tan 1 (Extrapolation): $k(1) \approx 1{,}4430$
$\tan 1 = 1{,}5574\ldots$
relativer Fehler = 7,3%

Ersatzkurve durch mehrere Punkte

Man hat mehrere Messwerte und betrachtet sie als Werte einer Funktion f, die man nicht kennt. Man sucht eine Kurve G_g, die durch diese Messpunkte geht, und hofft, dass die so gefundene Funktion g der unbekannten Funktion f nahe kommt. Man hat n+1 Punkte: $P(x_0|y_0)$, $P(x_1|y_1)$, … , $P(x_n|y_n)$ und sucht ein Polynom mit möglichst niedrigem Grad, dessen Graph diese Punkte enthält.

Jeder Punkt liefert eine Gleichung

$$\begin{aligned} y_0 &= g(x_0) \\ y_1 &= g(x_1) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ y_n &= g(x_n) \end{aligned}$$

Mit diesen n+1 Gleichungen lassen sich n+1 Koeffizienten eindeutig bestimmen. Man wird also für n+1 Punkte ein Polynom vom Grad n ansetzen. Je mehr Punkte vorliegen, desto umfangreicher ist das Gleichungssystem für die Koeffizienten. Um den Lösungsaufwand zu verringern, haben NEWTON (1642 bis 1727) und LAGRANGE (1736 bis 1813) Lösungsformeln aufgestellt.

Als Beispiel geben wir die von Joseph de LAGRANGE an:

$$g(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + \dots + y_nL_n(x)$$

$L_0(x), L_1(x), \dots, L_n(x)$ sind Polynome vom Grad n der Form

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)}$$

....

$$L_n(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})}$$

Im Zähler von $L_i(x)$ kommt der Faktor $(x-x_i)$ nicht vor.
Der Nenner entsteht aus dem Zähler, indem man x durch x_i ersetzt. Es gilt

$L_i(x_k) = 0$ für $k \neq i$ und $L_i(x_i) = 1$ und damit
$g(x_i) = y_0 \cdot 0 + y_1 \cdot 0 + \dots + y_i \cdot 1 + \dots + y_n \cdot 0 = y_i$

3. Beispiel: Gesucht ist ein Polynom von möglichst niedrigem Grad, dessen Kurve durch $(-2|-22)$, $(0|0)$, $(2|2)$, $(4|-16)$ und $(6|-150)$ geht.

Nummerieren der Punkte erleichtert das Einsetzen:
$P_0(x_0=-2|y_0=-22)$ $P_1(x_1=0|y_1=0)$
$P_2(x_2=2|y_2=2)$ $P_3(x_3=4|y_3=-16)$ $P_4(x_4=6|y_4=-150)$

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)} \\ &= \frac{(x-0)(x-2)(x-4)(x-6)}{(-2-0)(-2-2)(-2-4)(-2-6)} \\ &= \frac{1}{384}(x^4-12x^3+44x^2-48x) \end{aligned}$$

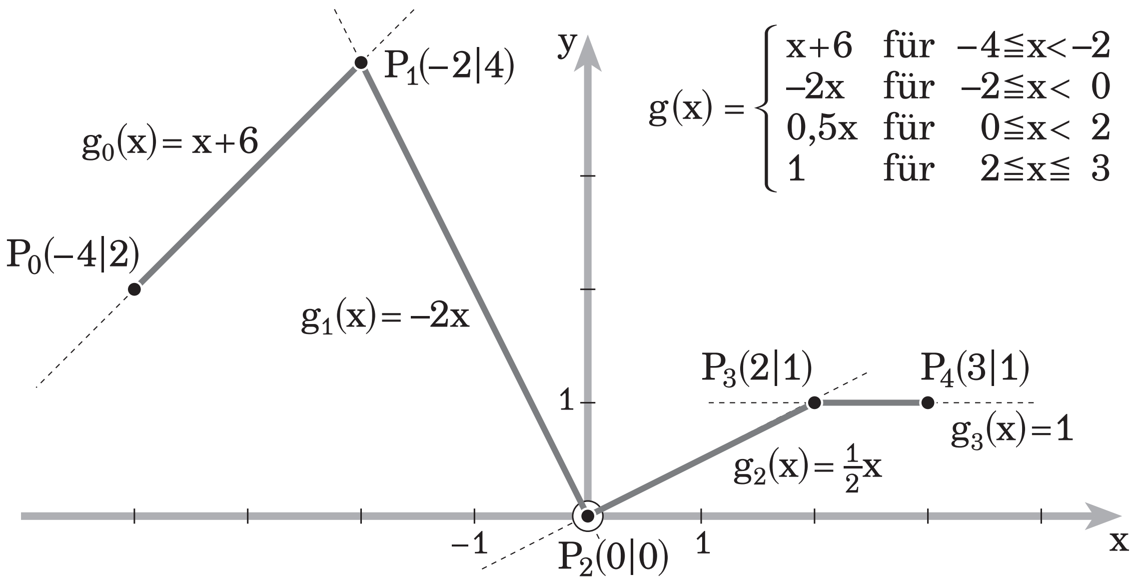
$$\begin{aligned} L_1(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} \\ &= \frac{(x+2)(x-2)(x-4)(x-6)}{(0+2)(0-2)(0-4)(0-6)} \\ &= \frac{1}{96}(-x^4+10x^3-20x^2-40x+96) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} \\ &= \frac{(x+2)(x-0)(x-4)(x-6)}{(2+2)(2-0)(2-4)(2-6)} \\ &= \frac{1}{64}(x^4-8x^3+4x^2+48x) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
L_3(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)}\\
&= \frac{(x+2)(x-0)(x-2)(x-6)}{(4+2)(4-0)(4-2)(4-6)}\\
&= \frac{1}{96}(-x^4+6x^3+4x^2-24x)\\
L_4(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}\\
&= \frac{(x+2)(x-0)(x-2)(x-4)}{(6+2)(6-0)(6-2)(6-4)}\\
&= \frac{1}{384}(x^4-4x^3-4x^2+16x)
\end{aligned}
$$

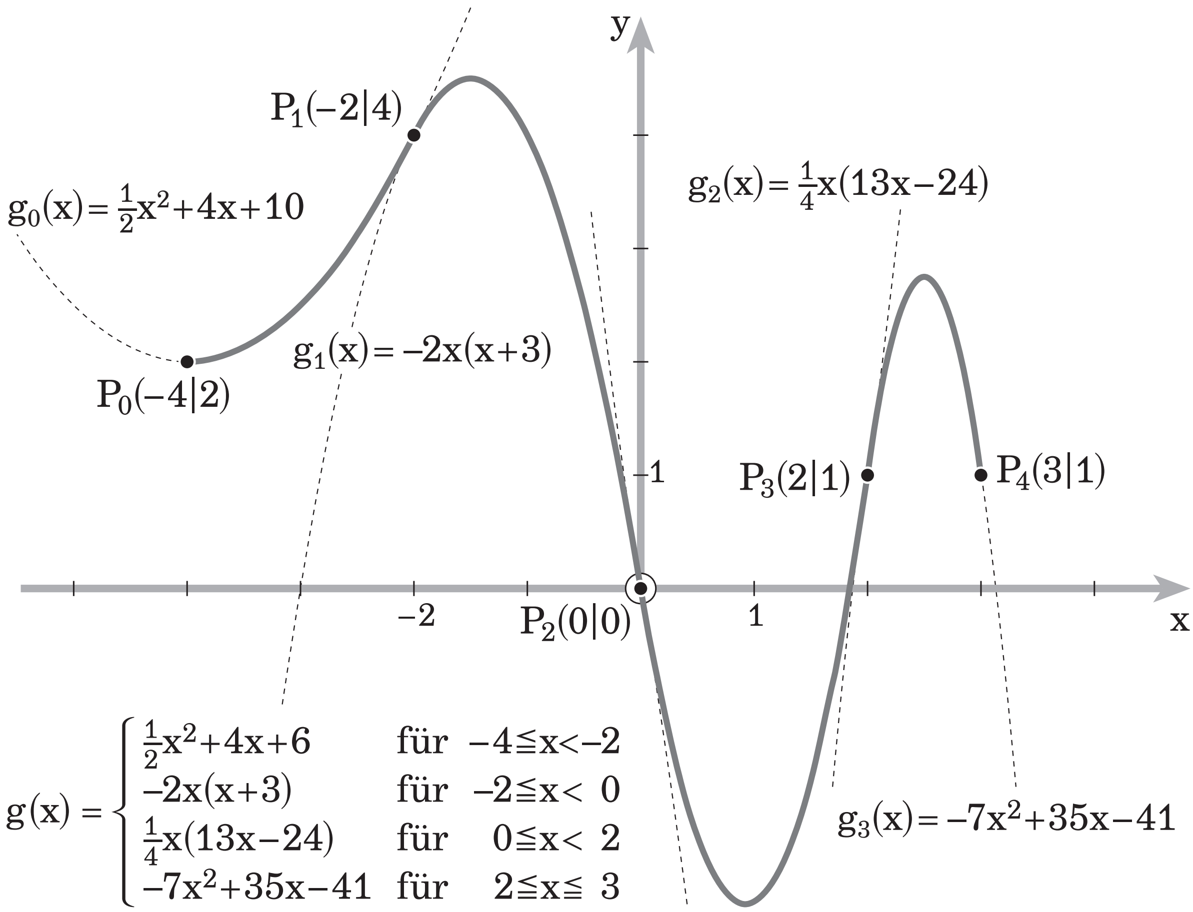
$$
\begin{aligned}
g(x) &= y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + y_2L_2(x) + y_3L_3(x) + y_4L_4(x)\\
&= -22\cdot L_0(x) + 0\cdot L_1(x) + 2\cdot L_2(x) - 16\cdot L_3(x) - 150\cdot L_4(x)\\
&= -\frac{1}{4}(x^4-4x^3+6x^2-8x)
\end{aligned}
$$

Meistens aber braucht man zu n Punkten keine Polynomkurve vom Grad n−1, sondern eine möglichst einfache Kurve. Die einfachste ist ein Streckenzug: Als »Fieberkurve« oder in Diagrammen der Statistik soll er die zeitliche Entwicklung einer Größe wie Körpertemperatur, Umsatz, Gewinn usw. grob und klar vor Augen führen. Seine mathematische Beschreibung ist im wahren Wortsinn Stückwerk: Der Funktionsterm ist stückweise definiert, das heißt, er ist aus Teiltermen zusammengesetzt, deren jeder seine Definitionsmenge hat. Weil die Kurve aus Strecken gestückelt ist, gehören die Teilterme zu affinen Funktionen.



Oft stören Ecken, dann muss man die Streckenzüge (oder Polyeder) glätten – ein wichtiger Vorgang bei Computergrafiken. Oder man sucht von vornherein eine glatte, möglichst einfache Kurve durch gegebene Stützpunkte. »Glatt« bedeutet, dass Stücke von Kurven in den Stützpunkten so aneinander hängen, dass sich die Kurven dort berühren.

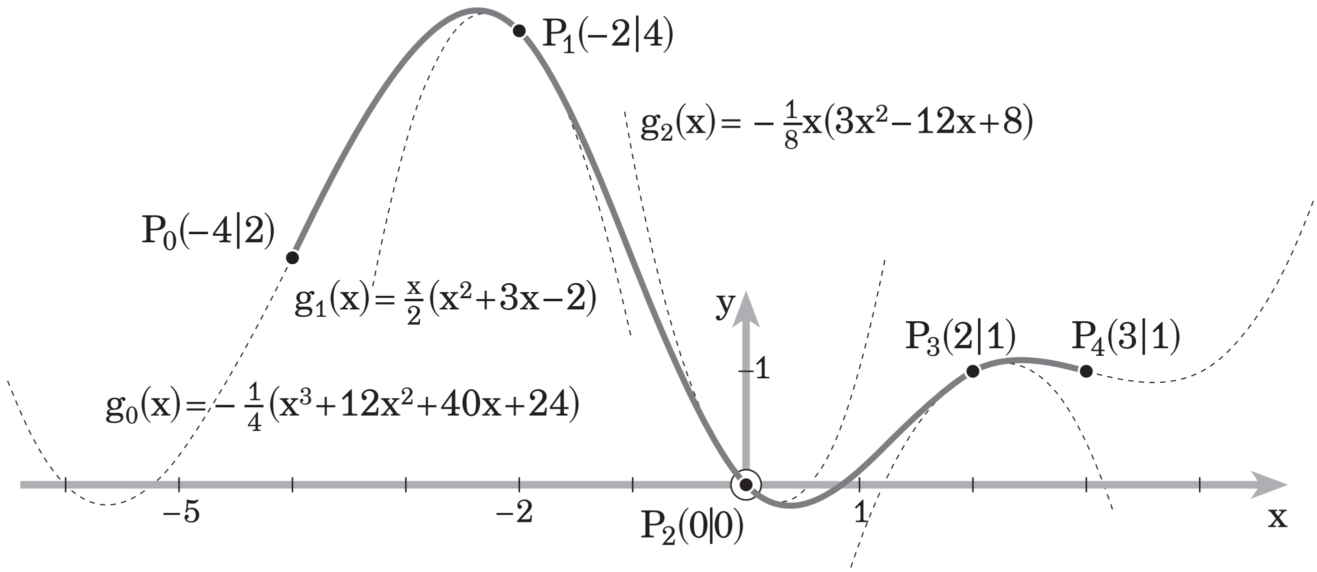
Mit affinen Teiltermen geht das nicht, weil Ecken entstehen; wohl aber mit quadratischen Teiltermen: In jedem Anschlusspunkt berühren sich 2 Parabeln. Die glatte Kurve ist also aus Parabelbögen zusammengeflickt. Jede Parabel ist festgelegt durch 2 Stützpunkte und die Steigung in einem dieser Stützpunkte. Wählbar ist die Steigung im linken oder rechten Randpunkt. Im Bild startet die linke Parabel aus dem Punkt $P_0(-4|2)$ mit Steigung 0. Aus einer Parabel stanzt man den passenden Bogen, indem man die Definitionsmenge aufs passende Intervall beschneidet.



Im Schiff- und Flugzeugbau braucht man für die Profile des Schiffkörpers und Tragflügels Kurven durch vorgegebene Punkte. Hier haben sich Kurven bewährt, die man einst mit biegsamen Linealen, den »Straklatten«, konstruiert hat. Mit Polynomkurven vom Grad 3 lassen sich solche Biegeverläufe gut annähern; dabei müssen 4 Bedingungen erfüllt sein: 2 Stützpunkte sind Kurvenpunkte, in jedem Anschlusspunkt stimmen die Kurven in der 1. und 2. Ableitung überein. Eine so gestückelte Kurve heißt »kubischer Spline« (engl. spline = Gummilineal). Weil gebogene Latten in den Rand-Stützpunkten geradlinig verlaufen, wählt man für die

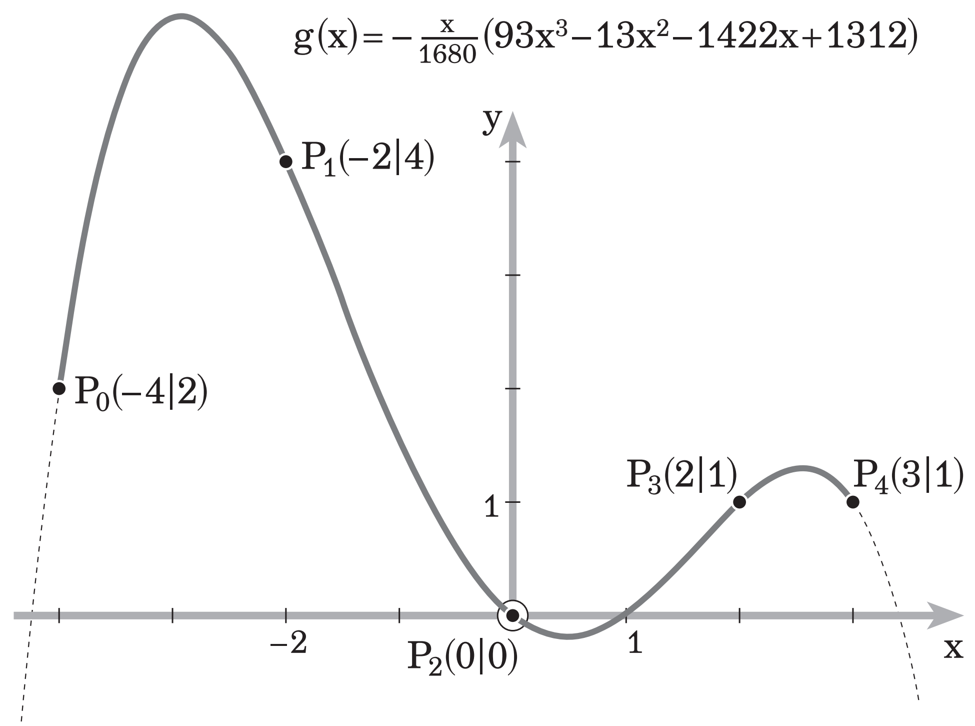
2. Ableitung der Polynome dort den Wert 0.

$$g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}(x^3+12x^2+40x+24) & \text{für } -4 \leqq x < -2 \\ \frac{x}{2}(x^2+3x-2) & \text{für } -2 \leqq x < 0 \\ -\frac{1}{8}x(3x^2-12x+8) & \text{für } 0 \leqq x < 2 \\ \frac{1}{4}(x^3-9x^2+26x-20) & \text{für } 2 \leqq x \leqq 3 \end{cases}$$



Kubischer Spline $P_0P_1P_2P_3P_4$

Zum Vergleich mit der quadratischen und kubischen Glättung ist noch die Polynomkurve wiedergegeben, deren Funktion von den 5 Punkten festgelegt ist. Welche der 4 Näherungskurven wirkt am besten?



Aufgaben

◊**1** $f(x) = x^2$ Stützpunkte (17|289), (18|324)
Berechne durch lineare Interpolation/Extrapolation Näherungswerte für
a) f(17,1) **b)** f(17,39) **c)** f(18,5)
Bestimme dann jeweils den exakten Wert und den relativen Fehler.

2 $f(x) = \sqrt{x}$ Stützpunkte (16|4), (25|5)
Berechne durch lineare Interpolation/Extrapolation Näherungswerte für
a) f(16,1) **b)** f(20) **c)** f(30)
Bestimme dann jeweils den exakten Wert und den relativen Fehler.

3 $f(x) = \sqrt{x}$ Stützpunkte (16|4), (25|5), $f'(16) = 0{,}125$
Berechne durch quadratische Interpolation/Extrapolation Näherungswerte für
a) f(16,1) **b)** f(20) **c)** f(30)
Bestimme dann jeweils den exakten Wert und den relativen Fehler.

4 $f(x) = \sqrt[3]{x}$ Stützpunkte (8|2), (27|3)
Berechne durch lineare Interpolation/Extrapolation Näherungswerte für
a) f(10) **b)** f(20) **c)** f(91,125)
Bestimme dann jeweils den exakten Wert und den relativen Fehler.

5 $f(x) = \sin x$; berechne Näherungswerte für f(0,5) und f(1) durch

a) lineare Interpolation, $g(x) \approx f(x)$
b) quadratische Interpolation, $p(x) \approx f(x)$ mit $p'(0) = 1$
c) quadratische Interpolation, $q(x) \approx f(x)$ mit $q'(\pi/2) = 0$
d) kubische Interpolation, $k(x) \approx f(x)$ mit $k'(0) = 1$ und $k''(0) = 0$
e) kubische Interpolation, $l(x) \approx f(x)$ mit $l'(0) = 1$ und $l'(\pi/2) = 0$

6 Stützpunkte $P_0(-3|-3)$, $P_1(0|0)$, $P_2(3|-1{,}5)$, $P_3(7|-1{,}5)$
Lege durch die 4 Stützpunkte eine Ersatzkurve als

a) Streckenzug, Teilterme $g_0(x)$ bis $g_3(x)$
b) Parabelbogenzug, Teilterme $p_0(x)$ bis $p_3(x)$ mit $p_0'(-3) = 4$
c) Polynom vom Grad 3 nach Lagrange.

4. Extremwertaufgaben

Mit der Kurvendiskussion ist es möglich, »Extremwertaufgaben« mit Nebenbedingungen zu lösen. Im Prinzip geht es darum: Aus einer Menge von Objekten (Zylinder, Produktionsmengen, ...) soll man diejenigen herausfinden, bei denen eine Maßzahl (Flächeninhalt, Gewinn, Volumen, ...) unter gegebenen Bedingungen einen Extremwert annimmt.

4. Beispiel: **Im Koordinatensystem**

Auf einer Parabel mit $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 10,\ x \geqq 0$ liegt der Punkt P. Der Ursprung und P sind Gegenecken eines Rechtecks, von dem 2 Seiten in den Koordinatenachsen liegen. Für welchen Parabelpunkt hat die Rechteckfläche einen Extremwert? Für welchen Parabelpunkt hat der Rechteckumfang einen Extremwert?

Die untersuchten Objekte sind hier Rechtecke.
Die Bedingung, die sie erfüllen müssen, sind
- 2 Seiten liegen in den Koordinatenachsen
- eine Ecke liegt auf der Parabel.

Die Maßzahl, die einen Extremwert annehmen soll, ist zum einen der Flächeninhalt F und zum andern der Umfang u des Rechtecks.

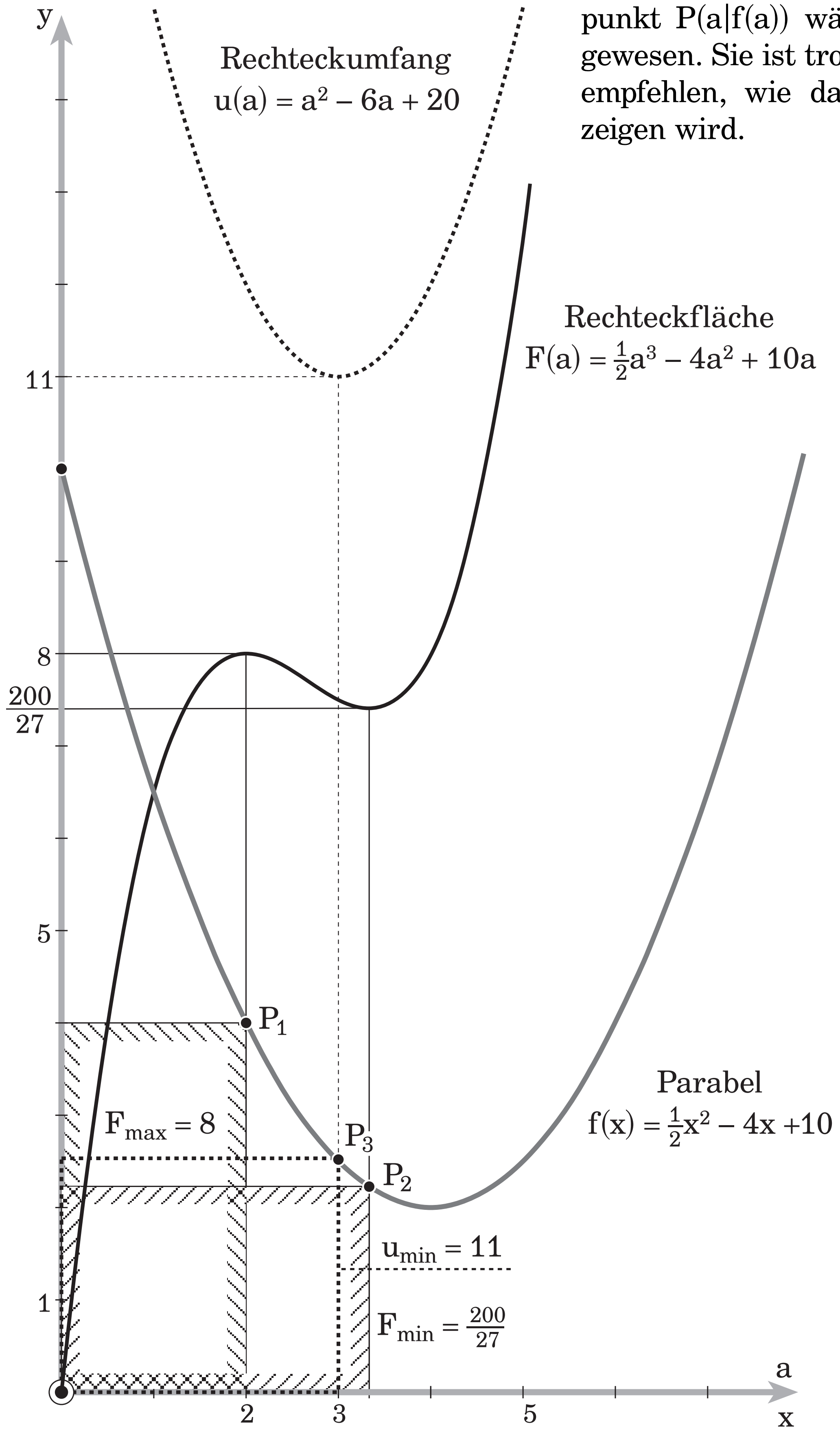
Nennen wir den x-Wert des Parabelpunkts a, dann ist sein y-Wert
$y = f(a) = \frac{1}{2}a^2 - 4a + 10,\ \ a \geqq 0$.
Im Grenzfall $P(0|10)$ entartet das Rechteck zu einer Strecke; es hat also den Flächeninhalt 0 (absolutes Minimum) und den Umfang $2 \cdot 10 = 20$. Die Parabel liegt über der x-Achse, deshalb ist für $a>0$ auch der Flächeninhalt > 0, wenn P im 1. Quadranten liegt.

Der Flächeninhalt ist $F(a) = a \cdot f(a) = \frac{1}{2}a^3 - 4a^2 + 10a$
$F'(a) = \frac{3}{2}a^2 - 8a + 10$
$F'(a) = 0 \Rightarrow a = 2$ oder $a = \frac{10}{3}$
$F''(a) = 3a - 8$
$F''(2) = -2 < 0 \Rightarrow a = 2$ ist Maximumstelle,
$F''(\frac{10}{3}) = 2 > 0 \Rightarrow a = \frac{10}{3}$ ist Minimumstelle.
Für $P_1(2|4)$ ist die Rechteckfläche mit $F(2) = 2 \cdot 4 = 8$ maximal.
Für $P_2(\frac{10}{3}|\frac{20}{9})$ ist die Rechteckfläche mit $F(\frac{10}{3}) = \frac{200}{27}$ minimal.
Beide Extremwerte sind relativ: Das absolute Minimum 0 liegt am linken Rand; ein absolutes Maximum gibt es nicht, weil mit $a \to +\infty$ die Fläche unendlich groß wird.

Der Umfang des Rechtecks ist $u(a) = 2a + 2 \cdot f(a) = a^2 - 6a + 20$.
$u'(a) = 2a - 6$
$u'(a) = 0 \Rightarrow a = 3$ ist Stelle des absoluten Minimums,
weil die Parabel G_u oben offen ist.

Für $P_3(3|2{,}5)$ ist der Rechteckumfang mit $u = 11$ am kleinsten.
Ein relatives Maximum des Umfangs mit $u = 20$ liegt am linken Rand vor. Für $a \to +\infty$ wächst der Umfang unbegrenzt.

Die Umbenennung von x in a im Laufpunkt $P(a|f(a))$ wäre hier nicht nötig gewesen. Sie ist trotzdem allgemein zu empfehlen, wie das nächste Beispiel zeigen wird.



5. Beispiel: **Im Koordinatensystem**

Auf einer Parabel mit $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 10$ liegt der Punkt P zwischen der y-Achse und dem Parabelscheitel. Die senkrechte Projektion von P auf die y-Achse sei T. Die Parabeltangente in P schneidet die y-Achse in U. Für welchen Parabelpunkt P hat das Dreieck extremalen Flächeninhalt ?

Grenzfälle
- Für P(0|10) entartet das Dreieck zum Punkt (0|10), es hat den Flächeninhalt 0 (absolutes Minimum).
- Für P(4|2) (=Scheitel) entartet das Dreieck zur Strecke [UP] = [TP], wieder mit Flächeninhalt 0 (absolutes Minimum).

Für die Projektion T ergibt sich $T(0|f(a)) = T(0|\frac{1}{2}a^2 - 4a + 10)$.

Tangentengleichung: $y = t(x) = f'(a)\cdot(x - a) + f(a)$, an dieser Stelle wird klar, warum man zwischen a und x unterscheiden muss.

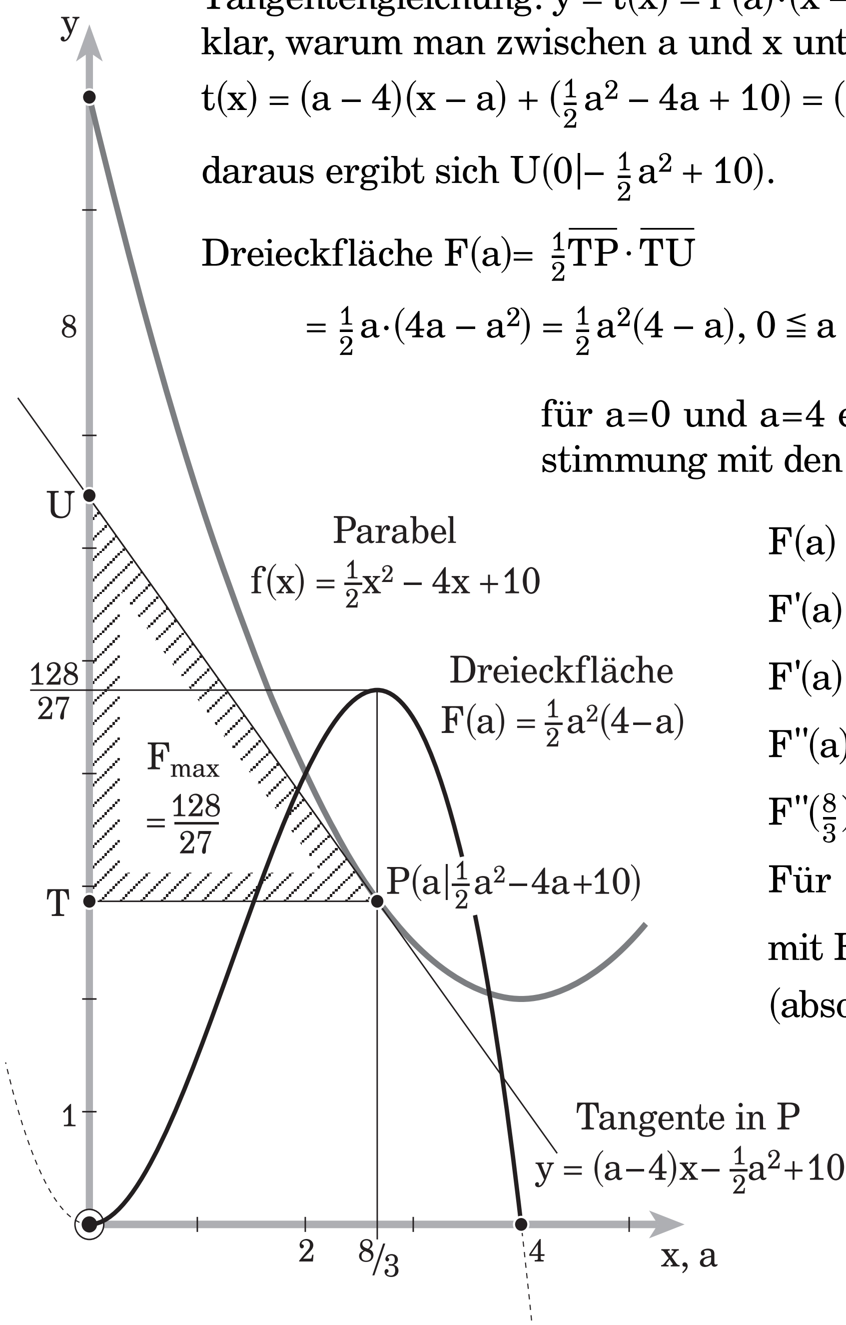
$t(x) = (a - 4)(x - a) + (\frac{1}{2}a^2 - 4a + 10) = (a - 4)x - \frac{1}{2}a^2 + 10$,

daraus ergibt sich $U(0|-\frac{1}{2}a^2 + 10)$.

Dreieckfläche $F(a) = \frac{1}{2}\overline{TP}\cdot\overline{TU}$

$= \frac{1}{2}a\cdot(4a - a^2) = \frac{1}{2}a^2(4 - a),\ 0 \leqq a \leqq 4,$

für a=0 und a=4 ergibt sich F(a) = 0 in Übereinstimmung mit den Grenzfall-Überlegungen.



$F(a) = \frac{1}{2}(4a^2 - a^3)$

$F'(a) = \frac{1}{2}(8a - 3a^2) = \frac{1}{2}a(8 - 3a)$

$F'(a) = 0 \Rightarrow a=0$ oder $a=\frac{8}{3}$

$F''(a) = \frac{1}{2}(8 - 6a) = 4 - 3a$

$F''(\frac{8}{3}) = -4 \Rightarrow \frac{8}{3}$ ist Maximumstelle

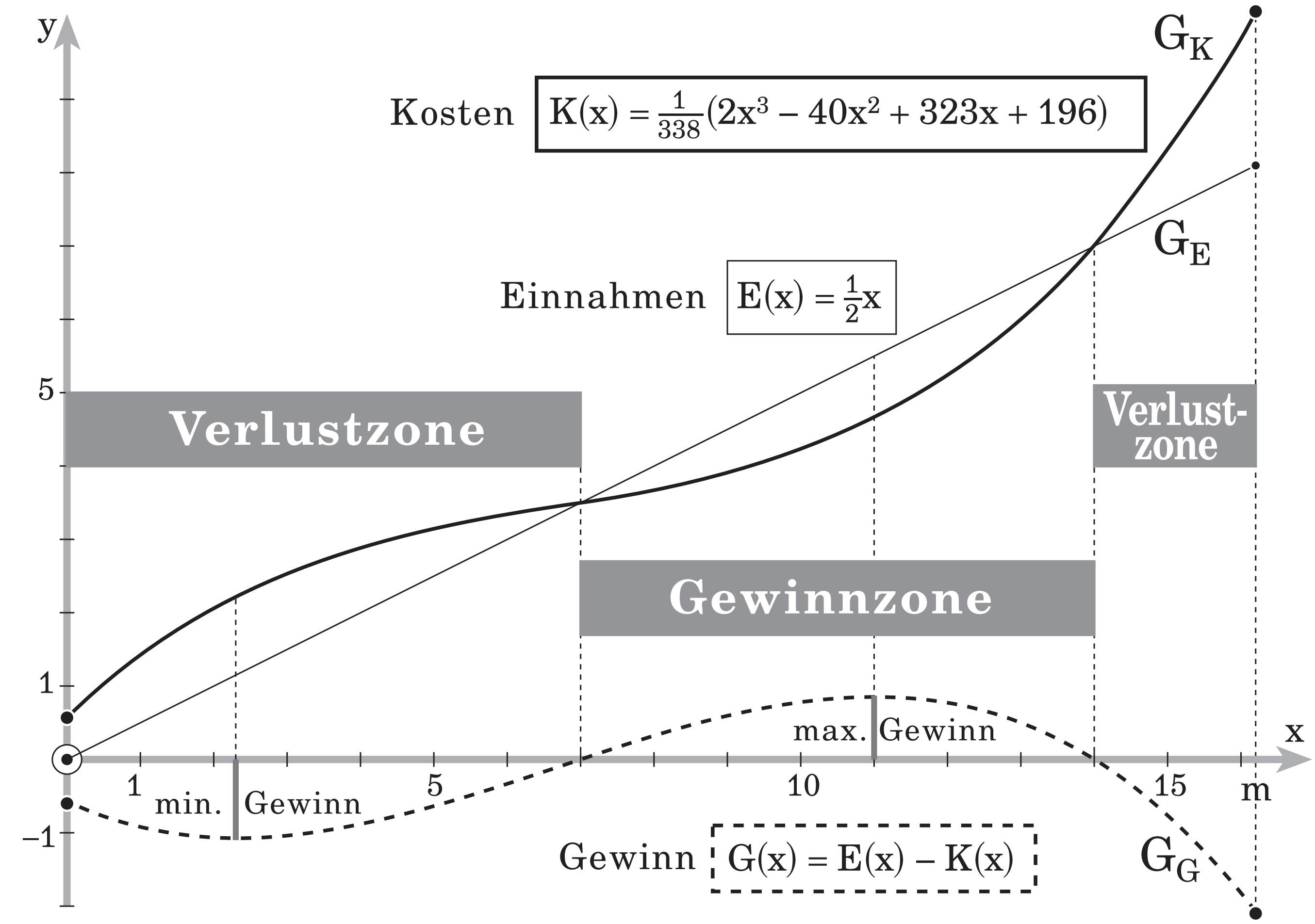
Für $P(\frac{8}{3}|\frac{26}{9})$ ist die Dreieckfläche mit $F(\frac{8}{3}) = \frac{128}{7} \approx 4{,}74$ maximal (absolut).

6. Beispiel: **Wirtschaftsmathematik**

$K(x)$ bezeichne die Kosten, die bei der Herstellung der Menge x eines Produkts anfallen. Angenommen, die Einnahmen $E(x)$ steigen proportional mit der verkauften Menge x, dann gilt $E(x)=c\cdot x$; dabei ist c der Preis für eine Einheit.

Für den Gewinn $G(x)$ gilt dann $G(x) = E(x) - K(x)$.

Sind die Funktionen E und K bekannt, so lässt sich die Menge x_g berechnen, bei der der Gewinn maximal ist.



Die Kostenfunktion K hat gewöhnlich die Eigenschaften:

- $D_K = [0;m]$, m ist die maximal mögliche Produktmenge
- K steigt echt monoton, weil die Kosten mit der hergestellten Menge x wachsen
- Der Graph G_K liegt im 1. Quadranten, weil Mengen und Kosten positive Maßzahlen sind. G_K hat einen Wendepunkt: nach ihm nimmt die Steigung zu, weil die Kosten überproportional steigen (zum Beispiel wegen Sonderschichten, Überstunden, …)
- K' heißt in der Betriebswirtschaftlehre auch »Grenzkostenfunktion«. $K'(x)$ gibt einen Näherungswert an für die zusätzlichen Kosten, wenn man 1 Einheit mehr als x herstellt.

In diesem Beispiel bedeute eine Einheit auf der x-Achse 300 hergestellte Stücke, eine Einheit auf der y-Achse 1000 DM.

Für die Kostenfunktion K gelte

$K(x) = \frac{1}{338}(2x^3 - 40x^2 + 323x + 196)$, $D_K = [0; 16{,}2]$

Die Kostenfunktion gilt also bis zu 16,2·300=4860 Stück.

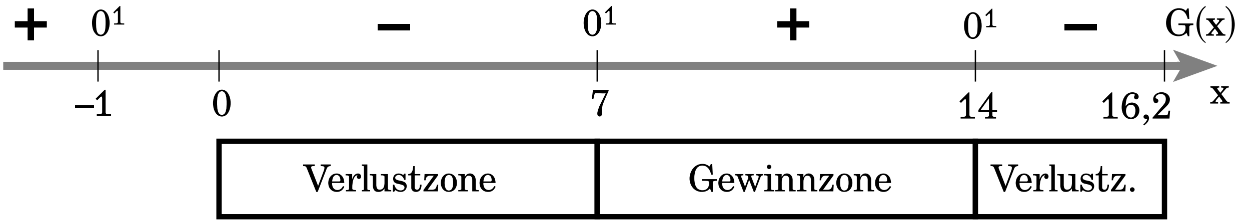
Die Fixkosten K(0) betragen $\frac{196}{338} \cdot 1000\,\text{DM} \approx 580\,\text{DM}$.

Für 300 Stück nehme man 500 DM ein, das heißt $E(x) = \frac{1}{2}x$.

Damit ergibt sich für die Gewinnfunktion

$$\begin{aligned} G(x) &= E(x) - K(x) \\ &= \frac{1}{338}(-2x^3 + 40x^2 - 154x - 196) \\ &= \frac{-1}{169}(x^3 - 20x^2 + 77x + 98) = \frac{-1}{169}(x+1)(x-7)(x-14) \end{aligned}$$

Die Vorzeichenübersicht zeigt die Gewinn- und Verlustzonen



Mit der 1. und 2. Ableitung finden wir den maximalen Verlust und den maximalen Gewinn.

$G'(x) = \frac{-1}{169}(3x^2 - 40x + 77) = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{3}$ oder $x = 11$

$G''(x) = \frac{-2}{169}(3x - 20)$

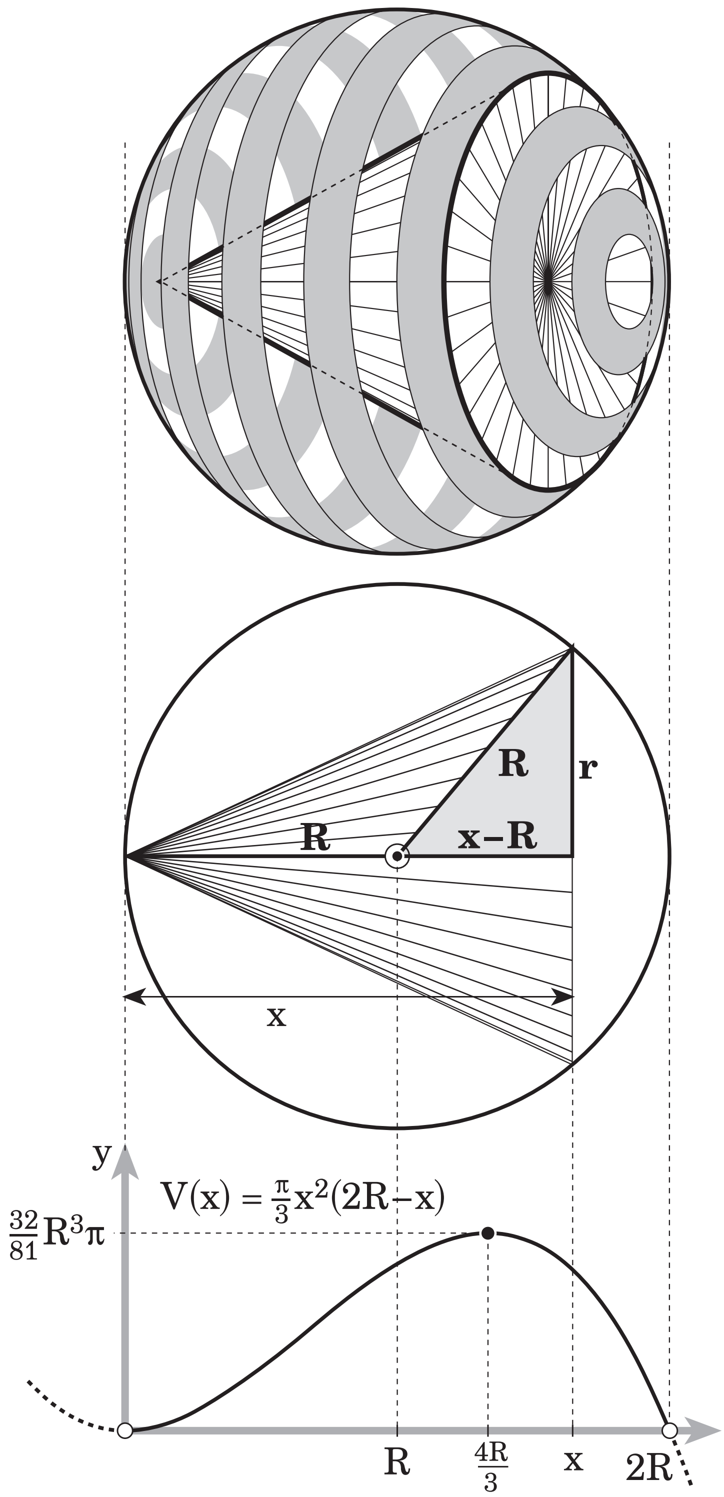
$G''(\frac{7}{3}) = \frac{2}{13} > 0$, also ist bei $\frac{7}{3} \cdot 300$ Stück = 700 Stück der Gewinn minimal: $G(\frac{7}{3}) = -1{,}07385\ldots$; der maximaler Verlust ist etwa 1074 DM.

$G''(11) = -\frac{2}{13} < 0$, also ist bei 11·300 Stück = 3300 Stück der Gewinn maximal: $G(11) = 0{,}85207\ldots$, das sind etwa 852 DM.

Auch an den Rändern von D_K ergeben sich Extremwerte des Gewinns. Für x=0 liegt ein negatives Maximum des Gewinns vor; stellt man nichts her, so hat man einen Verlust von etwa 580 DM. Für x=16.2, also für 4860 Stück, ergibt sich $G(16{,}2) = -2{,}0599\ldots$, das ist ein Maximalverlust von etwa 2060 DM.

7. Beispiel: **Stereometrie**

Einer Kugel mit gegebenem Radius R ist ein Kegel mit Höhe x und Grundkreisradius r einzubeschreiben.
Gesucht sind Extremwerte seines Volumens.



Die untersuchten Objekte sind hier Kegel. Die Bedingung, die sie erfüllen sollen, heißt: Sie müssen einer Kugel mit Radius R einbeschrieben sein. Das Kegelvolumen ist die Maßzahl, deren Extremwerte gesucht sind.

In den Grenzfällen $x=0$ und $x=2R$ entartet der Kegel zu einem Punkt und zu einer Strecke, hat also das Volumen $V=0$ (absolutes Minimum von V). Also muss das Volumen für einen x-Wert aus $]0;2R[$ ein absolutes Maximum haben.
Fürs Kegelvolumen gilt $V= \frac{1}{3}x\pi r^2$.
Hier kommen 2 Variablen vor, x und r; sie sind voneinander abhängig:
$r^2=R^2-(x-R)^2$
(Pythagoras im mittleren Bild!).
Kegelvolumen: $V(x) = \frac{1}{3}\pi(2Rx^2-x^3)$.
Gesucht sind die Extrema der Funktion V mit $V(x) = \frac{1}{3}\pi(2Rx^2-x^3)$, $D_V=]0;2R[$.

Extremumstellen: $V'(x) = 0$

$\frac{1}{3}\pi(4Rx-3x^2)=0 \Rightarrow \frac{1}{3}\pi x(4R-3x)= 0$

$\Rightarrow x = \frac{4}{3}R$

$V''(x) = \frac{2}{3}\pi(2R-3x)$, $V''(\frac{4}{3}R) = -\frac{4}{3}\pi R$

$\Rightarrow \frac{4}{3}R$ ist Maximumstelle,

$V_{max} = V(\frac{4}{3}R) = \frac{32}{81}R^3\pi$

Der Kegel mit größtem Volumen hat die Höhe $\frac{4}{3}R$ und das Volumen $\frac{32}{81}R^3\pi$. Sein Grundkreisradius ist $\frac{2}{3}\sqrt{2}R$.

Aufgaben

◊**1** Auf einer Parabel mit $f(x) = x^2 - 6x + 9$, $x \geqq 0$ liegt der Punkt $X(a|y)$.
Der Ursprung und X sind Gegenecken eines Rechtecks,
von dem 2 Seiten in den Koordinatenachsen liegen.

a) Für welchen Parabelpunkt P hat die Rechteckfläche einen Extremwert ?

b) Für welchen Parabelpunkt Q hat der Rechteckumfang einen Extremwert ?

◊**2** $P(a|y)$ sei ein Punkt einer Parabel mit $f(x) = -x^2 + 11x - 24$, $3 \leqq x \leqq 8$,
Q sei die senkrechte Projektion von P auf die x-Achse,
R sei der linke Randpunkt des Parabelbogens.

a) Bestimme a so, dass der Flächeininhalt des Dreiecks OQP ein Extremum hat; berechne diesen Flächeninhalt.

b) Bestimme a so, dass der Flächeininhalt des Dreiecks RQP ein Extremum hat; berechne diesen Flächeninhalt.

3 $P(a\,|\,y)$ sei ein Punkt einer Parabel mit $f(x) = -x^2 + 6x$, $0 \leq x \leq 6$,
rechts von der Symmetrieachse. Ein Rechteck mit einer Ecke in P und einer Seite in der x-Achse soll

a) extremalen Flächeninhalt haben. **b)** extremalen Umfang haben.

Berechne P und den Extremwert.

4 $P(a|y)$ sei ein Punkt einer Parabel mit $f(x) = -\frac{1}{4}x2 + 2x - 1$,
rechts von der Symmetrieachse und über der x-Achse.
P, $Q(a|0)$ und der Parabelscheitel bilden ein Dreieck.
Bestimme a so, dass die Dreieckfläche möglichst groß wird.

5 Auf einer Polynomkurve mit $f(x) = 1 - xn$, $Df = [0;1]$ liegt der Punkt $X(a|y)$.
Der Ursprung und X sind Gegenecken eines Rechtecks,
von dem 2 Seiten in den Koordinatenachsen liegen.
Für welchen Kurvenpunkt P hat die Rechteckfläche einen Extremwert ?

6 $f(x) = -\frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{2}x^2$ (Aus dem Abitur 1953, Bayern)

a) Bestimme die Extrempunkte und den Wendepunkt von Gf und zeichne die Kurve für $x \in [-4;10]$.

b) Verbinde den Ursprung mit dem Hochpunkt durch eine Gerade und zeige, dass die beiden Segmente zwischen Kurve und Gerade denselben Flächeninhalt haben.

c) Ein Kurvenpunkt im ersten Quadranten bildet aus Ordinate, Abszisse und Verbindungsstrecke zum Ursprung ein rechtwinkliges Dreieck.

Bestimme die Abszisse so, dass dieses Dreieck größtmöglichen Flächeninhalt hat.

d) Vom Ursprung aus wird die Tangente an die Kurve gelegt. Berechne den Berührpunkt.

•7 Bei der Herstellung eines Produkts habe sich die Kostenfunktion $K(x) = \frac{1}{13467}(3x^3 - 339x^2 + 17258x + 27972)$ ergeben.
Eine Einheit auf der x-Achse bedeute 6000 hergestellte Stücke, eine Einheit auf der y-Achse 10000 DM.
Für 9 Stück nehme man 10 DM ein.

a) Bestimme die Fixkosten, die Funktion E der Einnahmen und die Gewinnfunktion G.

b) Berechne die Gewinn- und Verlustzonen. (Hilfe: $G(-3) = 0$)

c) Ermittle die Stückzahlen x, bei denen der Gewinn Extremwerte annimmt, und gib diese Extremwerte an.

8 Geht im 6. Beispiel (Wirtschaftmathematik) GE durch den Wendepunkt von GK ?

9 Für welche Zahl zwischen 0 und 1 ist der Unterschied zwischen ihr und ihrem Quadrat am größten ?

10 Berechne den kleinsten Wert einer Summe aus einer Zahl und deren Quadrat.

◊11 Zerlege 100 so in 2 natürliche Summanden,

a) dass deren Produkt möglichst groß ist.

b) dass die Summe aus deren Quadraten möglichst klein ist.

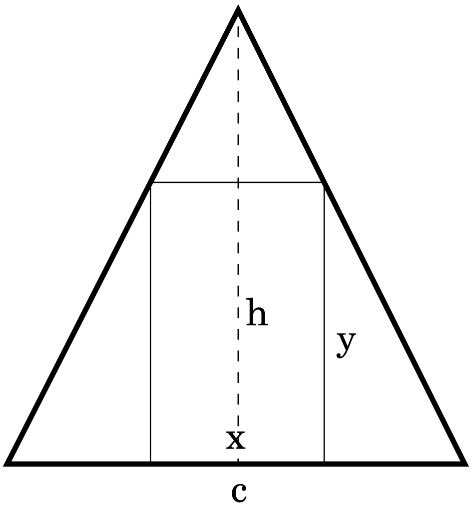
12 Ein Zaun mit Länge u soll eine möglichst große Rechteckfläche eingrenzen. Berechne diese und das zugehörige Seitenverhältnis, wenn

a) keine weiteren Bedingungen gestellt sind.

b) eine Seite an eine Mauer grenzt, so dass dort kein Zaun nötig ist.

c) 2 benachbarte Seiten an eine Mauer grenzen, so dass dort kein Zaun nötig ist.

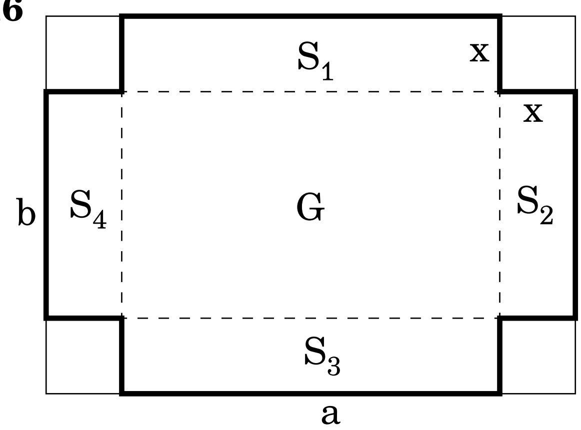
•13 Ein Kreissektor habe den Umfang u.
Bei welchem Radius r ist sein Flächeninhalt maximal,
wie groß ist dieser, wie groß ist der Mittelpunktwinkel μ ?

14 

Einem gleichschenkligen Dreieck (Basis c, Höhe h) ist ein Rechteck (Seiten x, y) so einbeschrieben, dass die Rechteckseite x in der Basis liegt.
Berechne x und y in Abhängigkeit von c und h für den Fall, dass das Rechteck maximalen Flächeninhalt hat, und berechne das Verhältnis der Flächeninhalte von Dreieck und Rechteck.

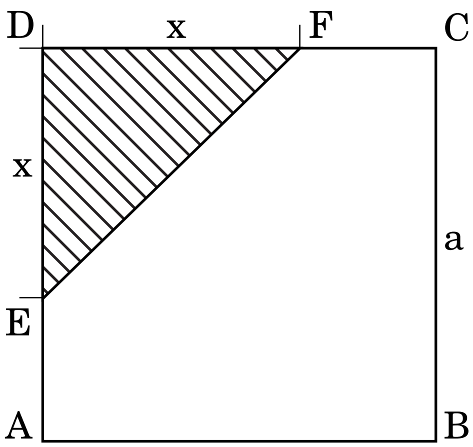
15 Aus einem Draht der Länge 504 soll ein Drahtmodell eines Quaders hergestellt werden, bei dem eine Kante doppelt so lang ist wie eine andere. Bei welchen Kantenlängen ergibt sich ein Maximum

a) des Quadervolumens ? b) der Quaderoberfläche ?

•16 

Von einem rechteckigen Karton mit den Seiten a und b ($\leqq$a) schneidet man an den Ecken Quadrate der Seite x so ab, dass man damit eine oben offene Schachtel falten kann (Grundfläche G, Seitenflächen S1 bis S4).
Berechne x in Abhängigkeit von a und b für den Fall, dass das Schachtelvolumen möglichst groß ist.
Was ergibt sich im Sonderfall a = b ?

Wie groß ist das maximale Volumen für a = 21und b = 16 ?

17 

Vom Quadrat ABCD wird das schraffierte Dreieck EFD senkrecht nach oben gefaltet. D ist dann die Spitze einer Pyramide mit dem Fünfeck ABCFE als Grundfläche.
Für welchen x-Wert ist das Pyramidenvolumen am größten ?
Berechne den maximalen Rauminhalt.

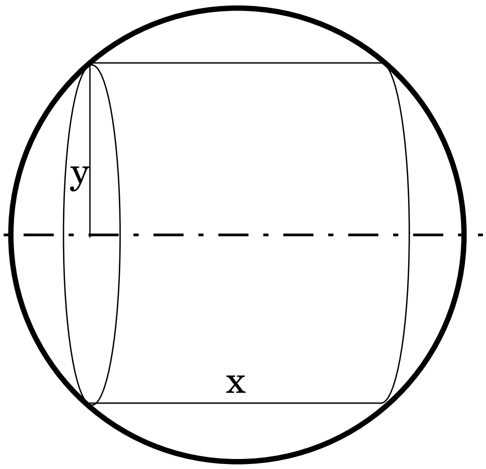
•**18** Rotiert das gleichschenklige Dreieck mit einbeschriebenem Rechteck von Aufgabe **14** um seine Symmetrieachse, so entsteht ein gerader Kreiskegel (Durchmesser c, Höhe h) mit einbeschriebenem Kreiszylinder (Durchmesser x, Höhe h).
Berechne x und y in Abhängigkeit von c und h für den Fall,

a) dass der Zylinder maximales Volumen hat,
und berechne das Verhältnis der Volumina von Kegel und Zylinder.

b) dass die Mantelfläche des Zylinders einen Extremwert hat.

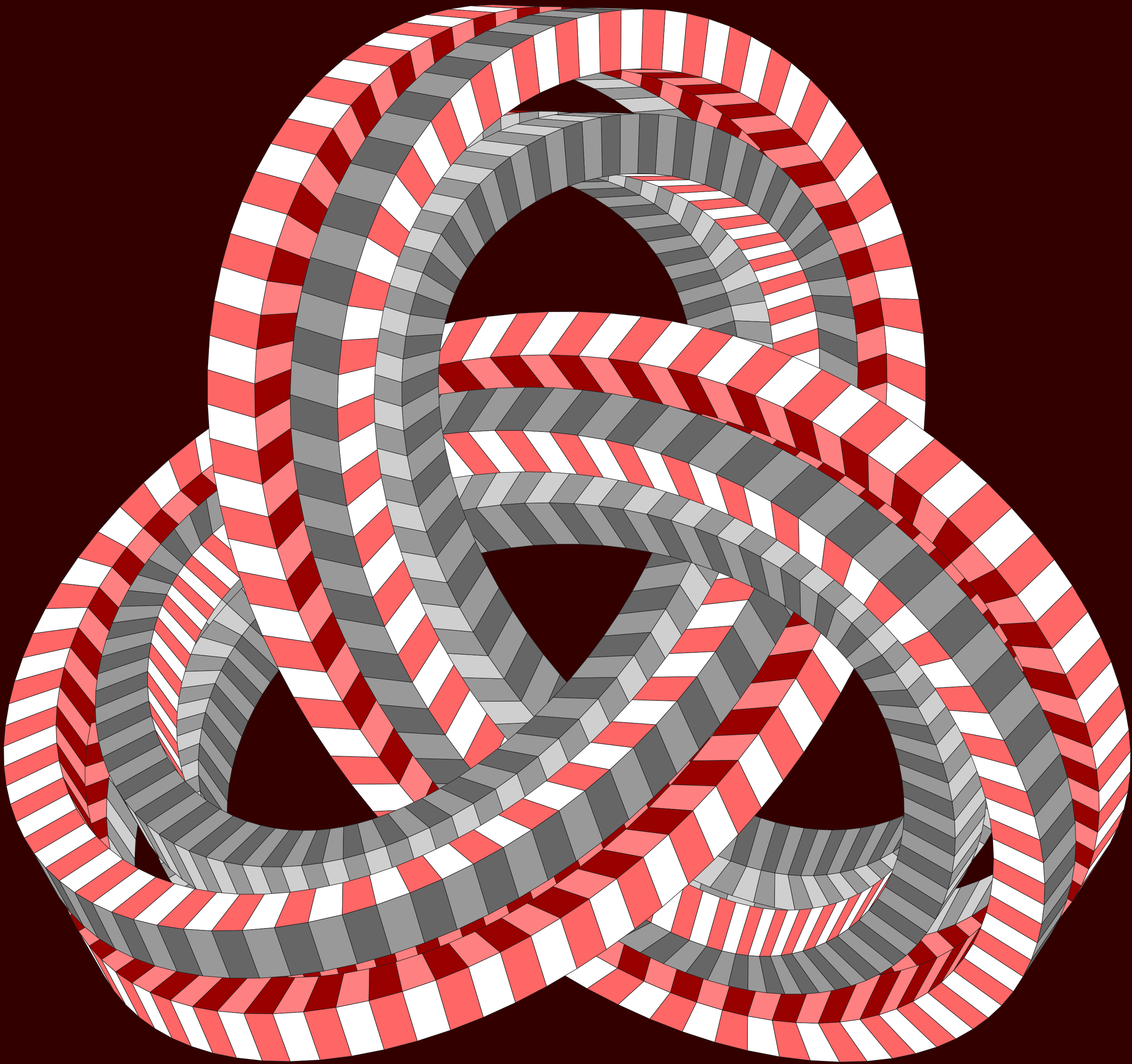
c) dass die Oberfläche des Zylinders einen Extremwert hat, und berechne das Verhältnis der Oberflächen von Kegel und Zylinder.

19



Einer Kugel mit Radius r soll ein Zylinder mit möglichst großem Volumen einbeschrieben werden. Berechne Radius y und Höhe x des Zylinders und das Volumenverhältnis von Kugel und Zylinder.

20 Ein kegelförmiges Sektglas mit Mantellinie m soll maximales Volumen haben. Wie groß sind sein Volumen und sein Öffnungswinkel ?



V. Scharen

1. Grundbegriffe

Es gibt Funktionsterme, in denen neben der unabhängigen Variable x noch eine Variable auftritt, der »**Parameter**« (Parameter). Als Parameter verwendet man meist a, k oder t und setzt ihn als Index ans Funktionssymbol, zum Beispiel

$$f_a(x) = ax - a^2$$

Genauso, wie man für x die Definitionsmenge angibt, muss man auch den zulässigen Parameterbereich nennen, zum Beispiel

$$f_a(x) = ax - a^2,\ D_{f_a} = \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}$$

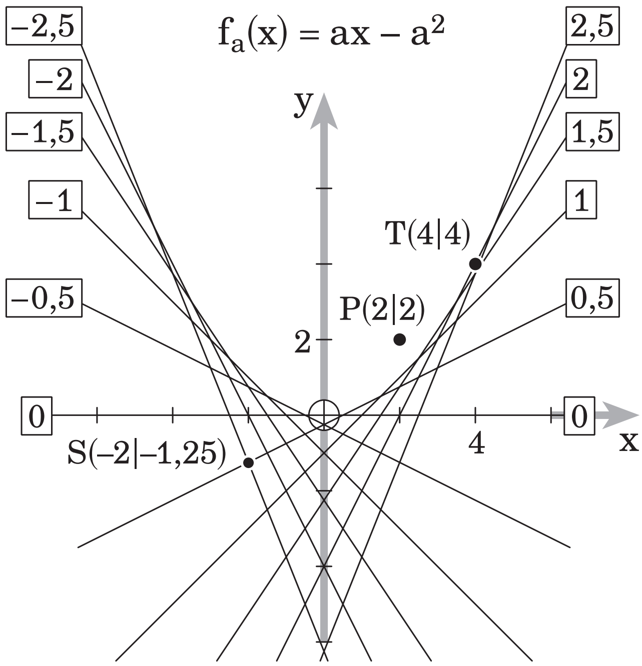
Wie bei Definitionsmengen legen wir fest:
Ist der Parameterbereich nicht genannt, dann gelte der größtmögliche.

Jeder Parameterwert legt eine Funktion fest, zum Beispiel $f_1(x) = x - 1$

$f_{-2}(x) = -2x - 4$

$f_0(x) = 0$

Die Menge der Funktionen, die sich beim Einsetzen aller erlaubten a-Werte ergibt, heißt **Funktionenschar** f_a; ihre Graphen bilden die Kurvenschar G_{f_a}.
Besondere Kurvenscharen sind Geraden- und Parabelscharen. Die Schar im Bild rechts ist eine Geradenschar. Jede Schargerade ist durch ihren Parameterwert (»Hausnummer« $\boxed{}$) identifiziert.



Es gibt Aufgaben, die für Scharen typisch sind. Die einfachsten bestehen darin,
- parameterabhängige Schnittpunkte zu bestimmen.
- in der Schar die Kurven zu finden, die bestimmte Eigenschaften haben; das bedeutet, die zugehörigen Parameterwerte zu berechnen.
- Paare von Scharkurven zu bestimmen, die zueinander symmetrisch zum Koordinatensystem liegen.

Dazu einige Beispiele zur Schar $f_a(x) = ax - a^2,\ D_{f_a} = \mathbb{R},\ a \in \mathbb{R}$

Achsenpunkte einer Schargerade

auf der y-Achse $(0|-a^2)$

auf der x-Achse: $f_a(x) = ax - a^2 = a(x - a) = 0 \Rightarrow x = a$

Am Achsenpunkt $(a|0)$ erkennt man in dieser Schar eine Schargerade.

Schargerade durch gegebenen Punkt (r|s)

Man setzt die Koordinaten in die Funktionsgleichung ein und löst nach a auf. Wenn man wissen will, welche Geraden der Schar f_a durch P(2|2), T(4|4) oder S(–2|–1,25) gehen, dann sieht die Rechnung so aus:

P(2|2) eingesetzt liefert $2 = 2a - a^2 \Rightarrow$ keine Lösung für a
durch P(2|2) geht keine Schargerade

T(4|4) eingesetzt liefert $4 = 4a - a^2 \Rightarrow a = 2$
durch T(4|4) geht die Schargerade $y = f_2(x) = 2x - 4$

S(–2|–1,25) eingesetzt liefert $-1{,}25 = -2a - a^2 \Rightarrow a = 0{,}5$ oder $a = -2{,}5$
durch S(–2|–1,25) gehen die Schargeraden
$y = f_{0,5}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ und $y = f_{-2,5}(x) = -\frac{5}{2}x - \frac{25}{4}$

Schnitt zweier Schargeraden

Man wählt die Parameter allgemein als a_1 und a_2 mit $a_1 \neq a_2$ und setzt die Terme gleich:

$$a_1x - a_1^2 = a_2x - a_2^2$$
$$(a_1 - a_2)x = a_1^2 - a_2^2$$
$$x = a_1 + a_2 \quad \text{wegen } a_1 \neq a_2$$

eingesetzt: $f_{a_1}(a_1 + a_2) = a_1(a_1 + a_2) - a_1^2 = a_1a_2$

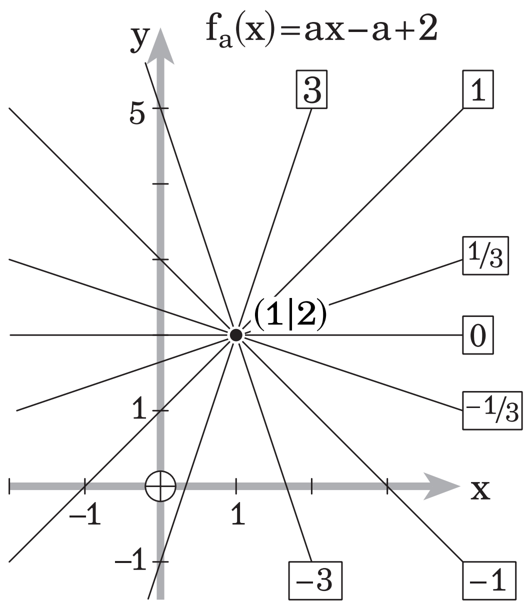
Die Geraden mit den Parametern a_1 und a_2 treffen sich in $S(a_1+a_2|a_1a_2)$.
Dieses Ergebnis erlaubt weitere Schlüsse:

- für $a_1 = -a_2$ schneiden sich die Geraden auf der y-Achse
- für $a_1a_2 = -1$ schneiden sich die Geraden auf der Waagrechte $y = -1$ im rechten Winkel; denn der Parameter hat in diesem Beispiel zugleich auch die Rolle der Geradensteigung und im Fall von $a_1a_2 = -1$ ist dann eine Steigung der negative Kehrwert der andern: $a_1 = -1/a_2$.

Eine Besonderheit liegt vor, wenn der Parameter im Ergebnis nicht vorkommt. Dazu ein neues Beispiel: Gesucht ist der Schnittpunkt zweier Geraden der Schar mit $f_a(x) = ax - a + 2$. Für $a_1 \neq a_2$ gilt:

$$a_1x - a_1 + 2 = a_2x - a_2 + 2$$
$$(a_1 - a_2)x = a_1 - a_2$$
$$x = 1 \quad \text{wegen } a_1 \neq a_2$$
$$y = f_{a_1}(1) = a_1 \cdot 1 + 2 - a_1 = 2$$

Weil im Ergebnis S(1|2) der Parameter nicht vorkommt, gehen **alle** Schargeraden durch S(1|2).



Symmetrische Scharen

Man nimmt eine Scharkurve $y = f_{a_1}(x)$ und spiegelt sie
- an der y-Achse: Spiegelbild $y = f_{a_1}(-x)$ oder
- am Ursprung: Spiegelbild $y = -f_{a_1}(-x)$.

Wenn die Kurve $y = f_{a_1}(x)$ einen symmetrischen Partner hat,
dann muss es ein a_2 mit $a_2 \neq a_1$ so geben, dass für alle x gilt entweder

$f_{a_2}(x) = f_{a_1}(-x)$, das heißt Symmetrie zur y-Achse oder
$f_{a_2}(x) = -f_{a_1}(x)$, das heißt Symmetrie zur x-Achse oder
$f_{a_2}(x) = -f_{a_1}(-x)$, das heißt Symmetrie zum Ursprung.

Beispiel:	$f_a(x) = ax - a^2$	Schar
	$f_{a_1}(x) = a_1x - a_1^2$	a_1-Kurve
	$f_{a_1}(-x) = -a_1x - a_1^2$	a_1-Kurve an der y-Achse gespiegelt
	$-f_{a_1}(x) = -a_1x + a_1^2$	a_1-Kurve an der x-Achse gespiegelt
	$-f_{a_1}(-x) = a_1x + a_1^2$	a_1-Kurve am Ursprung gespiegelt
	$f_{a_2}(x) = a_2x - a_2^2$	a_2-Kurve

Bedingung für Symmetrie zur y-Achse
$-a_1x - a_1^2 = a_2x - a_2^2 \Rightarrow x(a_1 + a_2) + (a_1^2 - a_2^2) = 0$.
Damit diese Gleichung für alle x richtig ist,
muss gelten $a_1 + a_2 = 0$ und $a_1^2 - a_2^2 = 0$, das ist der Fall für $a_1 = -a_2$.
a-Kurve und (–a)-Kurve sind zueinander symmetrisch bezüglich der y-Achse, das heißt, die y-Achse ist Symmetrieachse der Schar.

Bedingung für Symmetrie zur x-Achse
$-a_1x + a_1^2 = a_2x - a_2^2 \Rightarrow x(a_1 + a_2) - (a_1^2 + a_2^2) = 0$.
Damit diese Gleichung für alle x richtig ist,
muss gelten $a_1 + a_2 = 0$ und $a_1^2 + a_2^2 = 0$,
das ist der Fall für $a_1 = -a_2 = 0$ und steht im Widerspruch zur Bedingung $a_2 \neq a_1$. Keine a-Kurve hat ein bezüglich der x-Achse symmetrisches Gegenstück.

Bedingung für Symmetrie zum Ursprung
$a_1x - a_1^2 = a_2x - a_2^2 \Rightarrow x(a_1 - a_2) + (a_1^2 + a_2^2) = 0$
wieder muss gelten $a_1 - a_2 = 0$ und $(a_1^2 + a_2^2) = 0$,
aus der ersten Gleichung folgt $a_1 = a_2$, das steht im Widerspruch zur Bedingung $a_2 \neq a_1$. Keine a-Kurve hat ein bezüglich des Ursprungs symmetrisches Gegenstück.

Hier noch ein Beispiel zur Untersuchung auf Symmetrie.

Beispiel: $g_a(x) = a^2x - a$

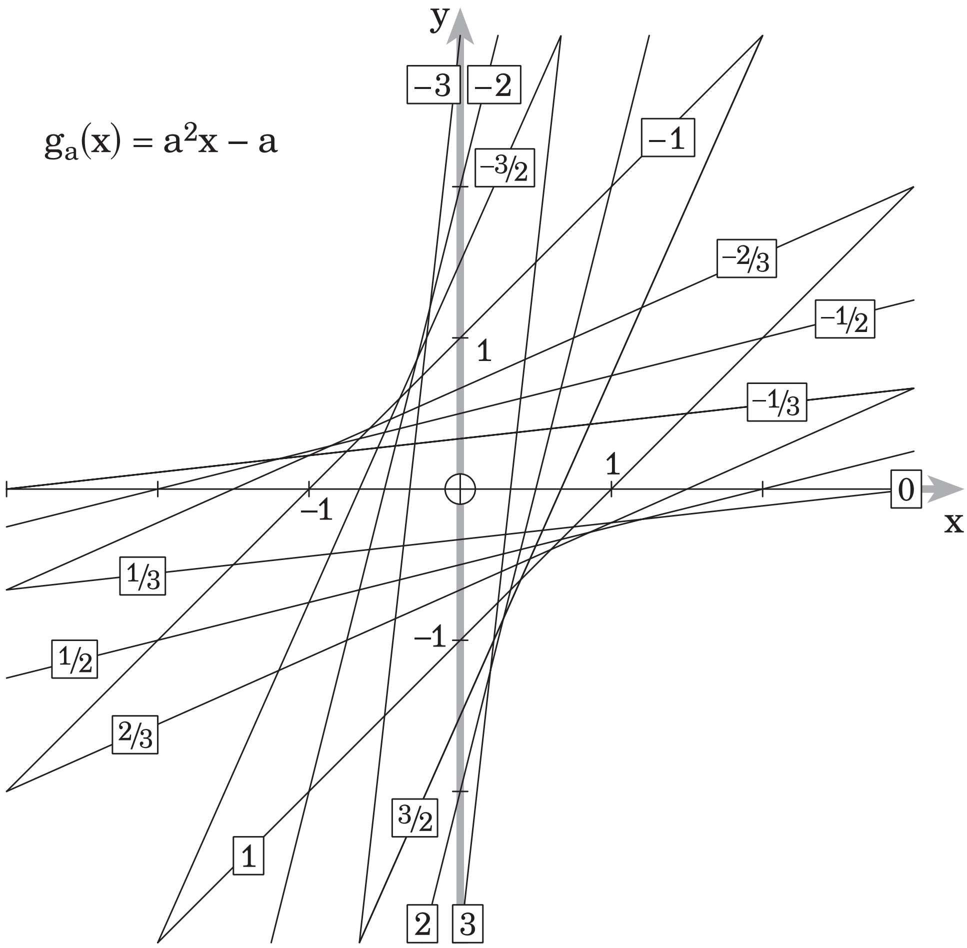
Bedingung für Symmetrie zum Ursprung

$-g_{a_1}(-x) = g_{a_2}(x)$

$a_1^2x + a_1 = a_2^2x - a_2 \Rightarrow x(a_1^2 - a_2^2) + (a_1 + a_2) = 0$

es muss gelten $a_1^2 - a_2^2 = 0$ und $a_1 + a_2 = 0$.

Für $a_1 = -a_2$ ist diese Bedingung erfüllt. a-Kurve und (–a)-Kurve sind zueinander symmetrisch bezüglich des Ursprungs, das heißt,
der Ursprung ist Symmetriezentrum der Schar.
An den Achsenpunkten $(0|-a)$ und $(^1/_a|0)$ erkennt man im Bild die Schargeraden.



2. Kurven besonderer Punkte

In der Kurvendiskussion bestimmt man besondere Kurvenpunkte wie Hoch- Tief- und Wendepunkte. In einer Schar hat jede Kurve ihre besonderen Punkte. Bei der Diskussion einer Schar ist eine wichtige Aufgabe, die Kurven zu finden, auf denen diese Punkte liegen. Wir führen das an einer Parabelschar vor.

Beispiel: $f_a(x) = x^2 + ax - \frac{1}{4}a^2$

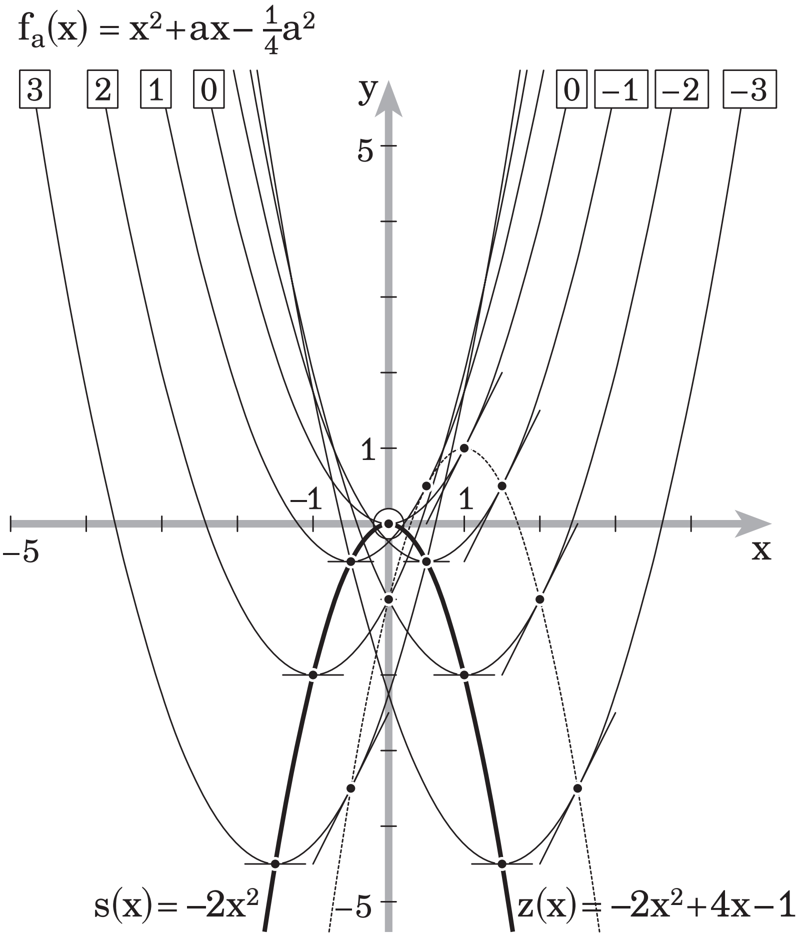
Der Koeffizient vor x^2 ist unabhängig vom Parameter gleich 1;
deshalb besteht die Schar aus oben offenen Normalparabeln.
Am parameterabhängigen y-Achsenabschnitt $-\frac{1}{4}a^2$ ($\leqq 0$) erkennt man:
keine Parabel schneidet die positive y-Achse,
je 2 Parabeln (f_a, f_{-a}) schneiden sich auf der negativen y-Achse.
Besonderer Parabelpunkt ist der Scheitel.
Auf welcher Kurve liegen die Scheitel?

$f_a'(x) = 2x + a$, Bedingung für den Scheitel: $f_a'(x) = 0$
$\Rightarrow\ 2x + a = 0\ \Rightarrow\ x = -\frac{a}{2}\, y = f_a(-\frac{a}{2}) = -\frac{a^2}{2}$

Scheitel $S_a(-\frac{a}{2} | -\frac{a^2}{2})$

Für jeden a-Wert kann man damit sofort den Scheitel der zugehörigen Kurve angeben:
Die Parabel mit $f_{-2}(x)=x^2-2x-1$ hat den Scheitel $S_{-2}(1|-2)$.
Kurve, auf der alle Scheitel liegen: Man eliminiert a aus den Gleichungen für die Scheitelkoordinaten $x = -\frac{a}{2}$ und $y = -\frac{a^2}{2}$.
Aus $a = -2x$ folgt $y = -2x^2$.
Die Parabelscheitel liegen auf der Kurve mit $y = s(x) = -2x^2$.

Als besondere Punkte kann man zum Beispiel auch die Punkte wählen, in denen die Kurvensteigung gleich 2 ist. Bedingung: $f_a'(x) = 2$, also $2x+a=2$.

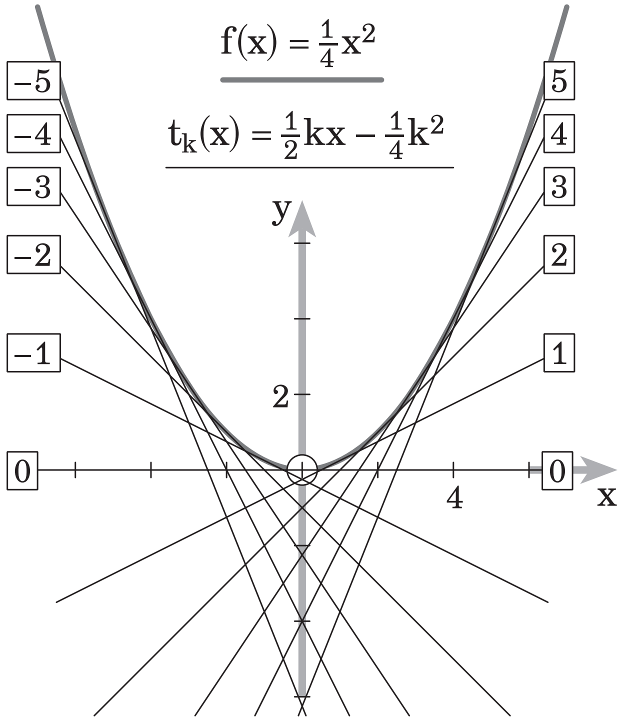


Sucht man nur die Kurve der besonderen Punkte, dann löst man besser gleich nach a auf und setzt a in $y = f_a(x)$ ein.
Hier setzen wir $a = 2-2x$ ein in $f_a(x) = x^2 + ax - \frac{1}{4}a^2$:
$y = z(x) = x^2 + (2-2x)x - \frac{1}{4}(2-2x)^2 = -2x^2 + 4x - 1.$

3. Bestimmung von Schartermen

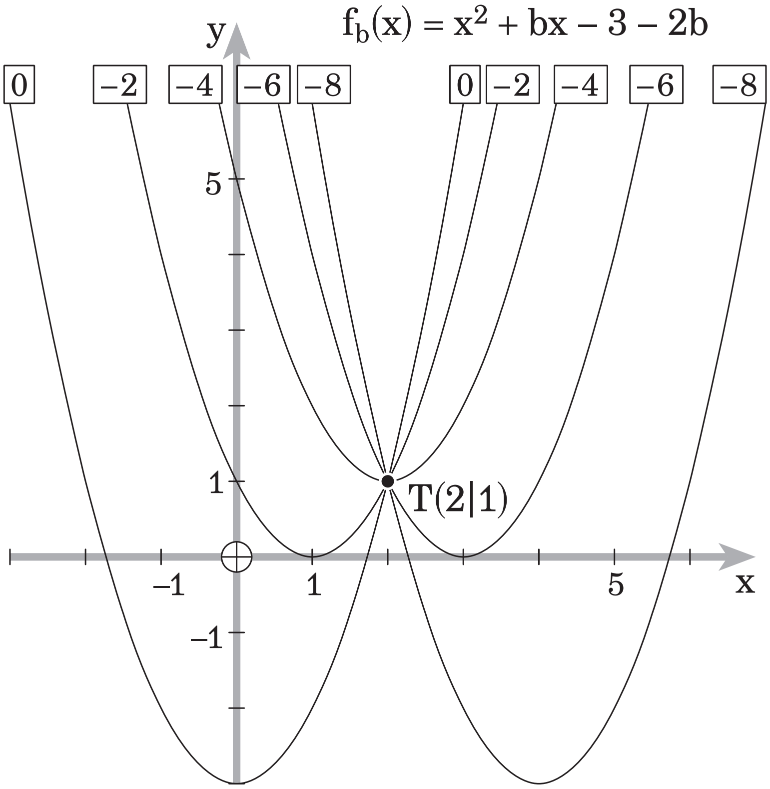
Bisher haben wir Eigenschaften einer Schar aus dem Term $f_a(x)$ erschlossen. Jetzt geht es umgekehrt darum, aus gegebenen Eigenschaften den zugehörigen Term aufzustellen.

Beispiel: Gesucht ist die Gleichung der Tangentenschar $y = t_k(x)$ der Parabel mit $y = f(x) = \frac{1}{4}x^2$.
Wir gehen vor wie im vorigen Kapitel:



Wir nehmen den Laufpunkt $(k|\frac{1}{4}k^2)$ auf der Parabel und stellen die Tangentengleichung auf: $t_k(x) = f'(k)\cdot(x-k) + f(k)$
$f'(x) = \frac{1}{2}x$; $f'(k) = \frac{1}{2}k$ oben eingesetzt liefert das Ergebnis:
$y = t_k(x) = \frac{1}{2}k\cdot(x-k) + \frac{1}{4}k^2 = \frac{1}{2}kx - \frac{1}{4}k^2$
Damit ist die Gleichung der Tangentenschar gefunden. Es handelt sich übrigens um die Geradenschar, die wir als erste vorgestellt haben. Man muss bloß den Parameter k ersetzen durch einen anderen Parameter $a = \frac{1}{2}k$ und dann $k = 2a$ einsetzen: $y = t_{2a}(x) = ax - a^2$.

Beispiel: Gesucht ist die Gleichung der oben offenen Normalparabeln, die sich in T(2|1) schneiden.



Ansatz: $y = x^2 + bx + c$
Bedingung:
T(2|1) auf Parabel
$1 = 4+2b+c \Rightarrow c = -3-2b$
eingesetzt in den Ansatz ergibt
$y = f_b(x) = x^2 + bx - 3 - 2b$

4. Fallunterscheidungen

Viele Eigenschaften von Scharkurven hängen vom Parameter ab. Bei einer Kurvendiskussion muss man alle Möglichkeiten in einer Fallunterscheidung am Parameter zusammenstellen. Fallunterscheidungen sind meistens dann nötig, wenn der Parameter im Nenner oder unter der Wurzel vorkommt. Dann muss sein

$$\boxed{\text{Nenner} \neq 0 \qquad \text{Radikand} \geqq 0}$$

Beispiel: $f_a(x) = \frac{1}{10}a(x^2+1) + x$

Nullstellen

$\frac{1}{10}a(x^2+1) + x = 0 \;\Rightarrow\; ax^2 + 10x + a = 0$

Diskriminante $D = 100 - 4a^2 = 4(25-a^2)$

$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25-a^2}}{a}$, $\quad a \neq 0$ und $|a| \leqq 5$

Für $0<|a|<5$ haben Scharkurven 2 einfache Nullstellen.
Für $|a|=5$, also $a=\pm 5$, gibt es je eine doppelte Nullstelle.
Für $|a|>5$ haben Scharkurven keine Nullstellen,
weil der Radikand (hier die Diskriminante) negativ ist.
Für $a = 0$ ist die Formel nicht anwendbar. Deshalb setzen wir $a = 0$ in die Ausgangsgleichung ein: $10x = 0 \Rightarrow x = 0$.
In diesem Fall ist die Parabel entartet zur Gerade $f_0(x) = x$.

Zusammenfassung

$a = 0$	$x = 0$	einfache Nullstelle von f_0
$0 <\|a\|< 5$	$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25-a^2}}{a}$	2 einfache Nullstellen
$a = 5$	$x = -1$	doppelte Nullstelle von f_5
$a = -5$	$x = 1$	doppelte Nullstelle von f_{-5}
$\|a\|> 5$		keine Nullstelle

Extrempunkte

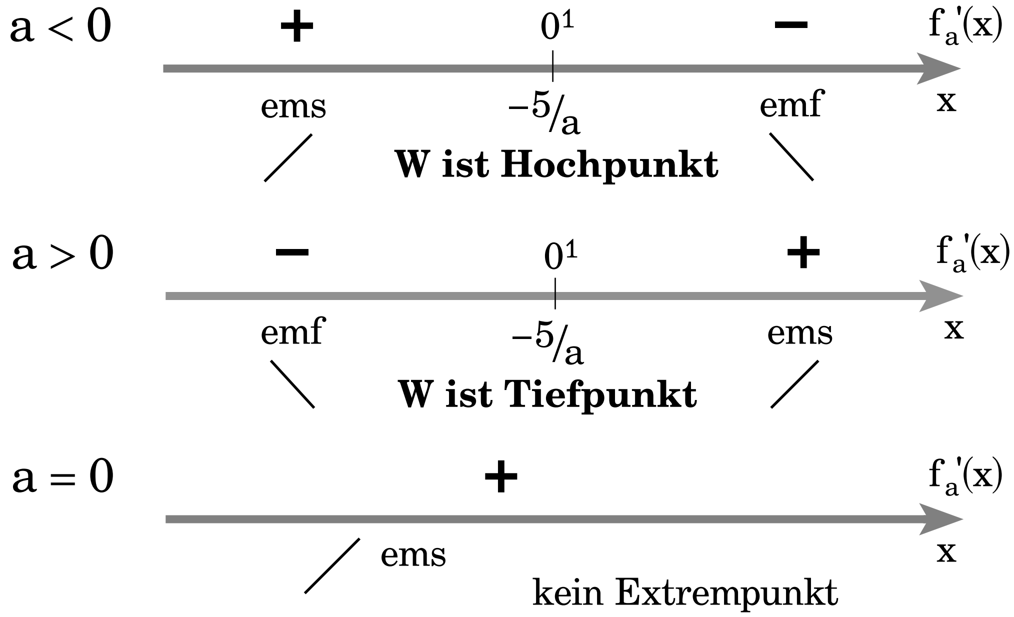
$f_a'(x) = \frac{1}{5}ax + 1$

Waagrechtstellen: $\quad \frac{1}{5}ax + 1 = 0$

$a \neq 0 \;\Rightarrow\; x = -\frac{5}{a} \qquad W\left(-\frac{5}{a} \,\middle|\, \frac{a^2-25}{10a}\right)$

$a = 0 \;\Rightarrow\; 1 = 0 \qquad$ Widerspruch, kein Waagrechtpunkt

Für die Monotonie-Untersuchung muss man die Fälle a>0, a=0 und a<0 unterscheiden, also 3 Vorzeichenübersichten anlegen.



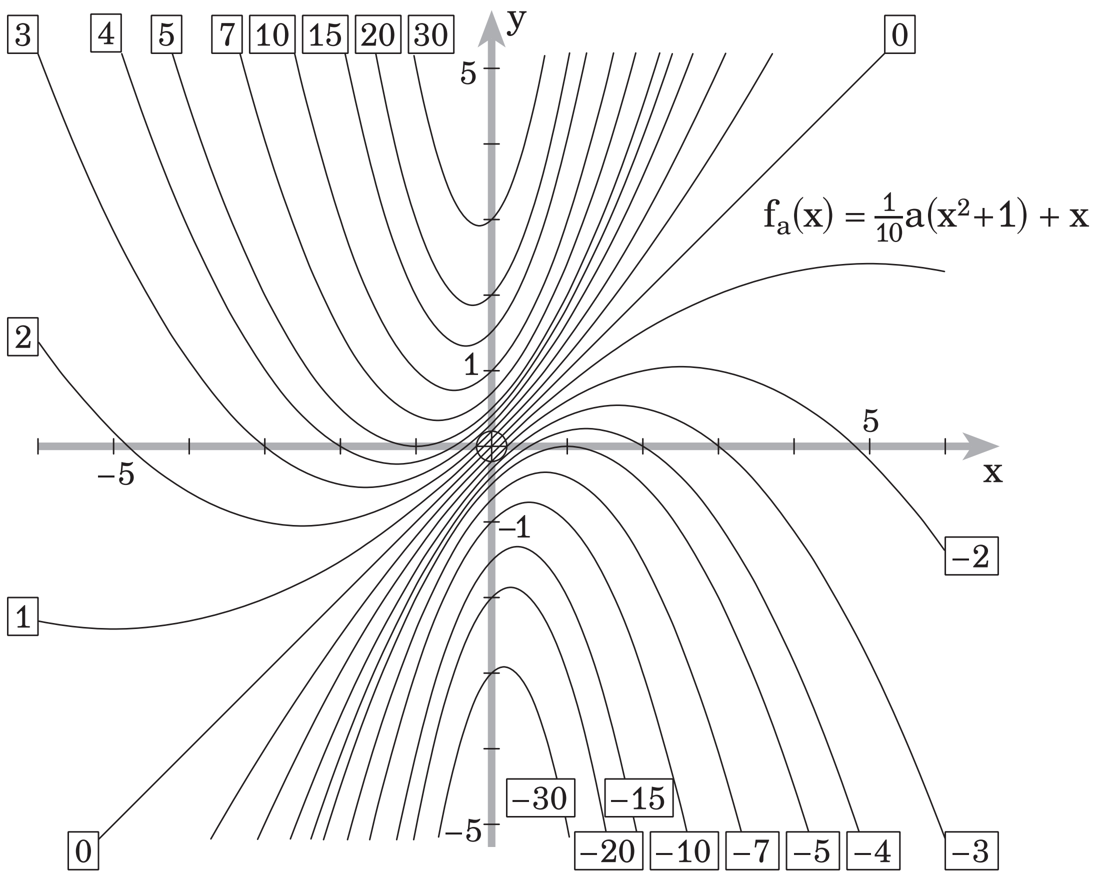
Bei Scharen ist es oft einfacher, die Art der Extrempunkte mit der 2. Ableitung zu bestimmen. Hier ist $f_a''(x) = \frac{1}{5}a$

$a < 0 \Rightarrow f_a''(-5/a) < 0 \Rightarrow$ W ist Hochpunkt

$a > 0 \Rightarrow f_a''(-5/a) > 0 \Rightarrow$ W ist Tiefpunkt

$a = 0 \Rightarrow f_a''(-5/a) = 0 \Rightarrow$?

hier ist eine eigene Untersuchung nötig. Es handelt es sich um die Winkelhalbierende, sie hat keinen Extrempunkt.



Zum Nachdenken

❶ Ortslinien

Wir haben gelernt, wie man die Kurven bestimmt, auf denen Punkte besonderer Eigenschaften liegen: Man muss den Parameter aus 2 Gleichungen eliminieren

I $\quad y = f_a(x)$

II $\quad$ Bedingung für die Eigenschaft

Manchmal liegen auf der so gefundenen Kurve auch Punkte, die diese Eigenschaft nicht haben. Der Teil der Kurve, der nur aus Punkten dieser Eigenschaft besteht, heißt auch **Ortslinie der Punkte dieser Eigenschaft**. Die dazu nötigen Einschränkungen der Definitionsmenge müssen aus einer eigenen Untersuchung hervorgehen.

Beispiel: I $\quad y = f_a(x) = ax^2 + 2x$

Kurve, auf der die Waagrechtpunkte liegen

$f_a'(x) = 2ax + 2$

II $\quad 2ax + 2 = 0 \;\Rightarrow\; ax = -1$ eingesetzt in I ergibt $y = x$

Die Waagrechtpunkte liegen auf der Winkelhalbierenden $y = x$.

Ortslinie der Waagrechtpunkte

Ist für x eine Einschränkung nötig ? Aus II folgt $x = -\frac{1}{a}$

x kann also jeden Wert außer 0 haben: Die Ortslinie der Waagrechtpunkte ist deshalb die »gelochte« Gerade: $y = x,\ x \neq 0$. Jeder Punkt dieser Ortslinie ist Waagrechtpunkt einer Scharkurve; $(0|0)$ kommt nicht als Waagrechtpunkt in der Schar vor.

Kurve, auf der die Hochpunkte liegen

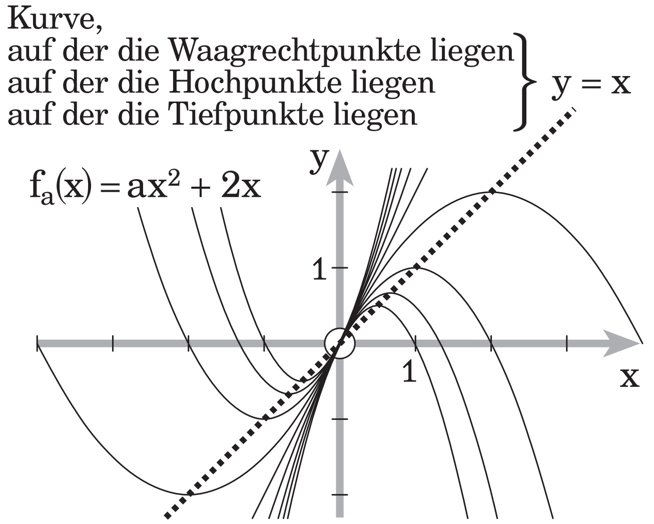
Weil die Hochpunkte auch Waagrechtpunkte sind, ist die Winkelhalbierende $y=x$ auch die Kurve, auf der die Hochpunkte liegen.

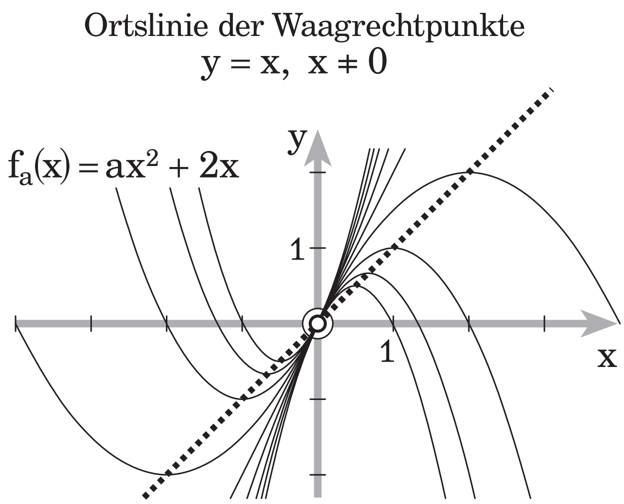
Ortslinie der Hochpunkte

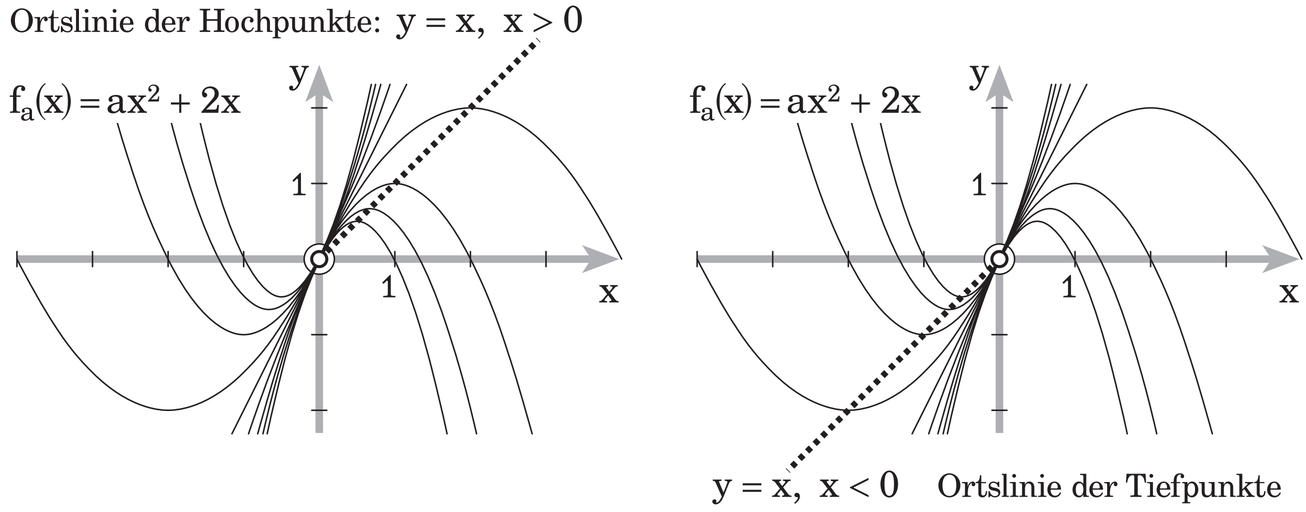
$f_a''(x) = 2a$, als Bedingungsgleichung ergibt sich jetzt

II $\quad f_a''(-1/a) < 0 \;\Rightarrow\; 2a < 0 \;\Rightarrow\; a < 0$. Wegen $x = -1/a$ muss x positiv sein.

Die Ortslinie der Hochpunkte ist die Halbgerade: $y = x,\ x > 0$.







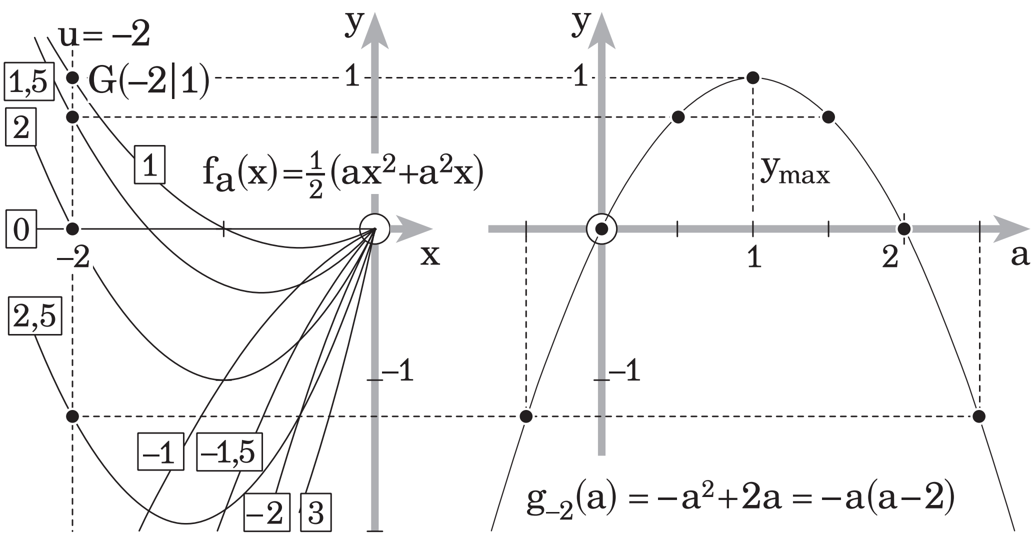
❷ Hüllkurven

Wir haben Scharen gesehen, die die ganze x-y-Ebene ausfüllen, das heißt: durch jeden Punkt der x-y-Ebene geht mindestens eine Scharkurve, zum Beispiel die Schar mit $f_a(x) = \frac{1}{10}a(x^2+1)+a$. Oft gibt es Bereiche der x-y-Ebene, in die keine Scharkurve kommt, das heißt: durch keinen Punkt dieses Bereichs geht eine Scharkurve; zum Beispiel meidet die Schar mit $f_a(x) = ax - a^2$ einen parabelförmigen Bereich. Die Grenzen solcher Bereiche heißen **Hüllkurven**.

Berechnung der Hüllkurve am Beispiel $f_a(x) = \frac{1}{2}(ax^2 + a^2x)$

Für einen festgewählten x-Wert u hängt die Ordinate nur noch vom Parameterwert a ab, zum Beispiel $y = f_a(u) = \frac{1}{2}(au^2 + a^2u) = g_u(a)$. Wenn es eine Hüllkurve gibt, dann gibt es in x=u mindestens einen Scharpunkt in einer Grenzlage: liegt dieser Grenzpunkt über den restlichen Scharpunkten, so ist seine Koordinate y_{max} Maximum der Funktion g_u. Im Normalfall hat der Graph von g_u dort eine waagrechte Tangente, das heißt, dort ist die Ableitung von g_u nach a gleich 0.

So ergibt sich für u=–2 die Funktion g_{-2} mit $g_{-2}(x) = -a^2 + 2a = -a(a-2)$; g_{-2} hat in der Extremumstelle a=1 das absolute Maximum y_{max}= 1. In der Stelle u=–2 ist also die Kurve mit a=1 die höchste, sie kreuzt die Gerade x=–2 in der Höhe 1. Über diesem Grenzpunkt (–2|1) liegen keine Scharpunkte.



Damit hat man ein einfaches Rezept zur Bestimmung von Hüllkurven:

Man leitet die Funktionsgleichung I $y = f_a(x)$ nach a ab

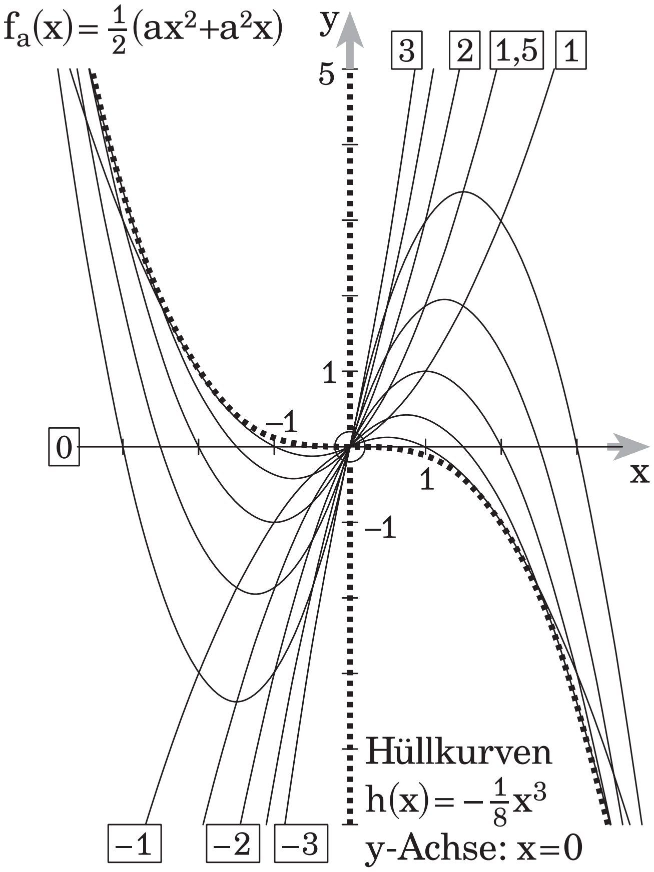
und setzt die Ableitung gleich 0 II $\frac{d}{da} f_a(x) = 0$.

Eliminiert man a aus I und II, so ergibt sich die Gleichung der Hüllkurve.

Im Beispiel ist $\frac{d}{da} f_a(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 2ax) \Rightarrow$ II $x^2 + 2ax = 0 \Rightarrow a = -\frac{x^2}{2x} = -\frac{1}{2}x$, $x \neq 0$

eingesetzt in die Funktionsgleichung I ergibt $y = -\frac{1}{8}x^3$, $x \neq 0$.

Das Bild zeigt, dass die Kurve mit $y = -\frac{1}{8}x^3$, $x \neq 0$ die Schar begrenzt.



Der Fall x=0 muss eigens behandelt werden: die Gleichungen I und II sind für x=0 erfüllt, wenn y=0 ist, das heißt, der Punkt (0|0) gehört zur Hüllkurve.

Oft ist die Hüllkurve zugleich auch Berührkurve der Schar. Gemeinsame Punkte von Schar und Hüllkurve: $f_a(x) = h(x)$

$$\frac{1}{2}(ax^2 + a^2x) = -\frac{1}{8}x^3$$

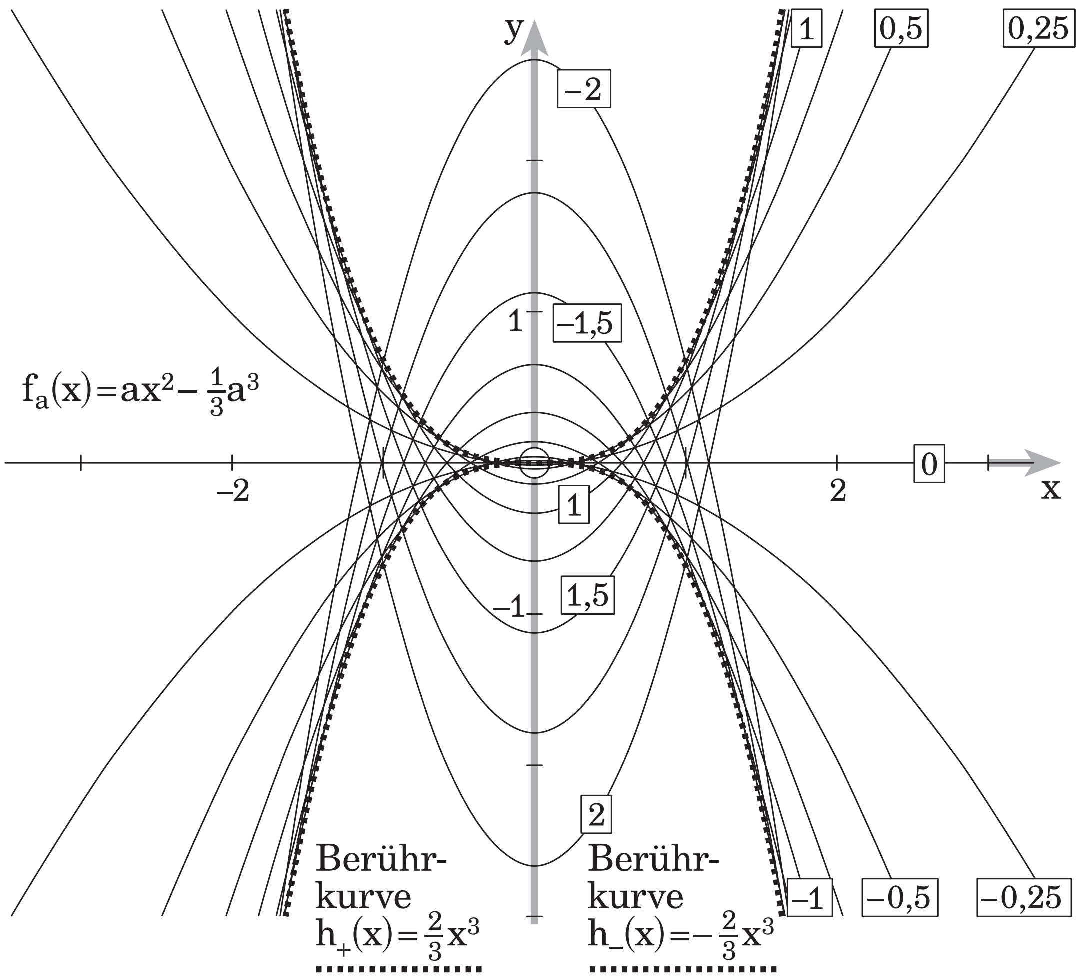
$$x(x + 2a)^2 = 0$$

$\Rightarrow$ $x = 0$ (einfach) oder
$x = -2a$ (doppelt)

$y = h(0) = 0$ oder $y = h(-2a) = a^2$

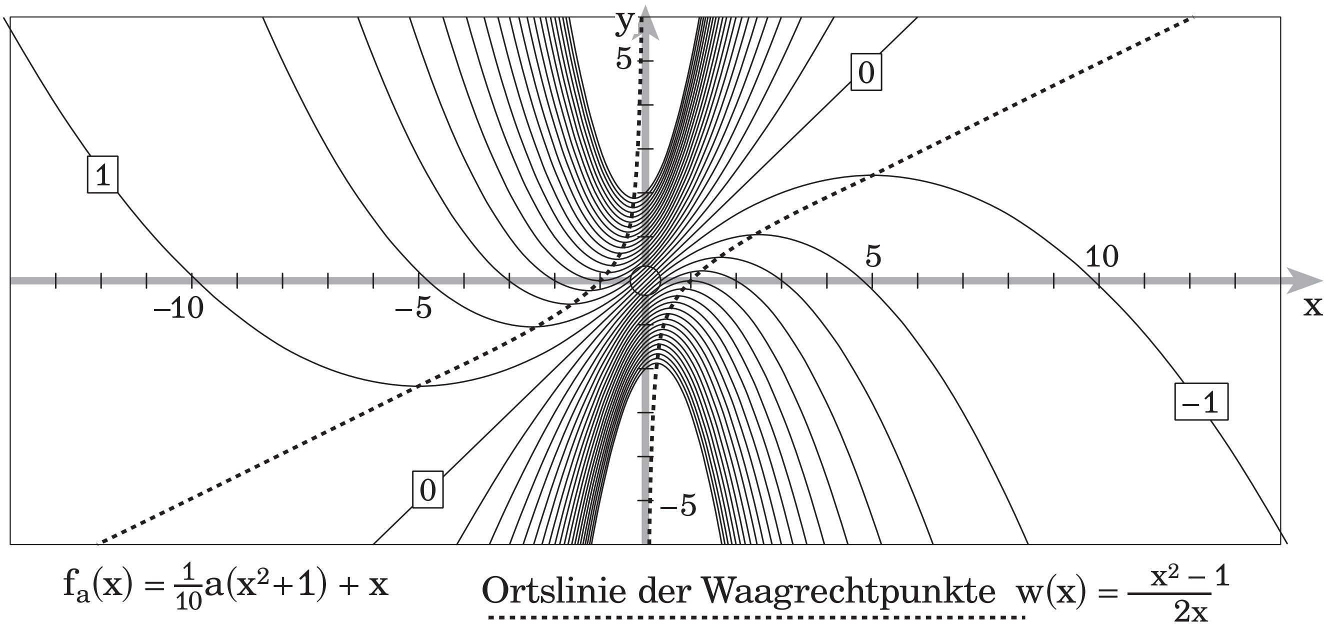
Wegen der einfachen Schnittstelle 0 schneidet G_h jede Scharparabel in (0|0).
Wegen der doppelten Schnittstelle –2a berührt G_h jede Scharparabel in $(-2a|\ a^2)$.

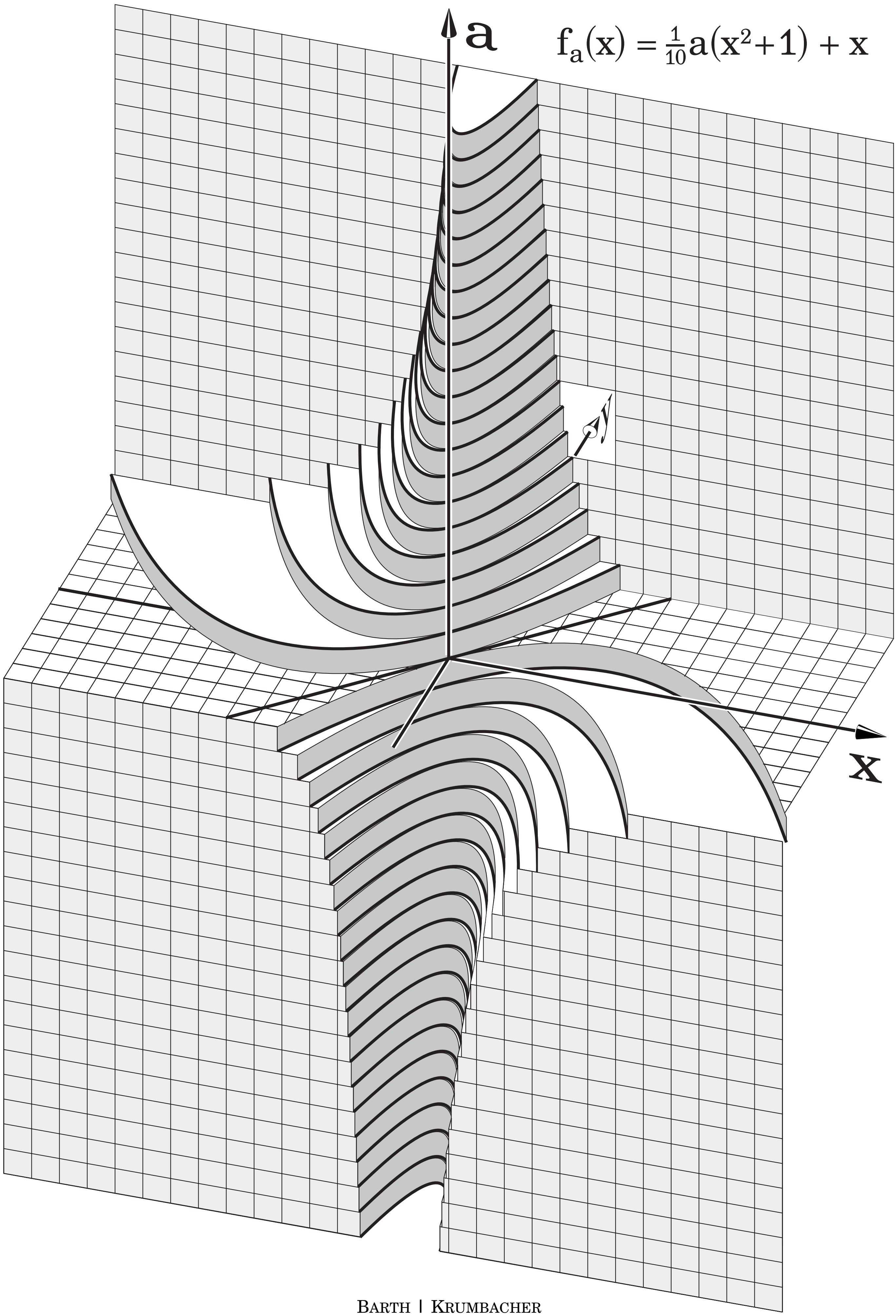
Mit diesem Rezept findet man nicht jede Hüllkurve. So ist im Beispiel oben auch die y-Achse Hüllkurve. Andrerseits kann es vorkommen, dass mit diesem Rezept ermittelte Kurven keine Grenzkurven sind – was zum Beispiel eintritt, wenn y_{max} im Grenzpunkt kein absolutes Maximum ist.



❸ Räumliche Deutung von Scharen

Höhenlinien einer Landkarte verbinden Punkte gleicher Höhe. Mit ihnen kann man die Landschaft dreidimensional rekonstruieren: Je näher sie beieinander liegen, desto steiler ist das Gelände. Die Gesamtheit der Höhenlinien ist eine Kurvenschar mit der Höhe als Scharparameter. Umgekehrt lässt sich jede Schar f_a deuten als Schar von Höhenlinen mit a als Höhe. In einem x-y-a-Koordinatensystem bildet die Schar dann eine Fläche im Raum, zum Beispiel $f_a(x) = \frac{1}{10}a(x^2 + 1) + x$; gezeichnet sind die Scharkurven (Höhenlinien) im (Höhen)Abstand 1 von –20 bis +20.




a
$f_a(x) = \frac{1}{10}a(x^2+1) + x$
y
x

Aufgaben

◊1 $f_a(x) = -ax + a$

a) Zeichne die Schargeraden für $a \in \{\pm 4, \pm 2, \pm 1, \pm\frac{1}{2}, 0\}$.

b) Welche Schargerade geht durch $A(-1|2)$, $B\ (1|2)$, $C(2|1)$?

c) Welche Schargerade ist parallel zur Winkelhalbierenden des 1. Quadranten ?

d) Welche Schargerade steht senkrecht auf der Gerade mit $y = 2x$.

e) Zeige: Alle Schargeraden treffen sich in einem Punkt S. Berechne S.

f) Untersuche, ob es Paare von Schargeraden gibt, die bezüglich des Koordinatensystems symmetrisch liegen.

2 $f_a(x) = -a^2x + a$

a) Welche Schargeraden gehen durch
$A(\frac{1}{4}|1)$, $B(-3|2)$, $C(1|1)$, $D(\frac{1}{2}|\frac{1}{2})$, $E(1|-2)$, $F(-\frac{1}{2}|-1)$?

b) Welche Schargerade ist parallel zur Winkelhalbierenden des 1. Quadranten ?

c) Welche Schargerade steht senkrecht auf der Gerade mit $y = \frac{1}{4}x$.

d) Untersuche, ob sich 2 Schargeraden schneiden, und berechne gegebenenfalls den Schnittpunkt S.

e) Untersuche, ob es Paare von Schargeraden gibt, die bezüglich des Koordinatensystems symmetrisch liegen.

f) Zeichne die Schargeraden für $a \in \{\pm 3, \pm 2, \pm\frac{3}{2}, \pm 1, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, 0\}$.

3 $f_a(x) = ax + 2\sqrt{a^2+1}$

a) Welche Schargerade geht durch $A(-1|2)$, $B(1|2)$, $C(2|0)$, $D(\sqrt{2}\,|\,\sqrt{2})$?

b) Untersuche, ob es Paare von Schargeraden gibt, die bezüglich des Koordinatensystems symmetrisch liegen.

c) Zeichne die Schargeraden für $a \in \{\pm 4, \pm 2, \pm 1, \pm{}^1/_2, 0\}$.

•4 Eine Geradenschar habe die Eigenschaften:
– Jede Schargerade geht durch $(2|3)$.
– Die Gerade mit $y = f_1(x)$ enthält den Punkt $(1|4)$.
Bestimme den Term $f_a(x)$.

:5 Eine Geradenschar f_a habe die Eigenschaft:

Jede Schargerade und die Koordinatenachsen bestimmen ein rechtwinkliges Dreieck im 1. Quadranten vom Flächeninhalt 8.

a) Bestimme einen Term $f_a(x)$.

b) Eine Geradenschar g_a habe die Eigenschaft:
– Jede Schargerade geht durch $(4|4)$.
– Jede Gerade der Schar g_a steht senkrecht auf einer Gerade der Schar f_a.
Bestimme einen möglichst einfachen Term $g_a(x)$.

c) Bestimme die Punkte T_a,
in denen sich die Schargeraden von f_a und g_a schneiden.

6 $f_a(x) = 2x^2 - 4ax + a^2 + 4$

a) Welche Scharkurve geht durch $A(1|3)$, $B(-1|2)$, $C(1|1)$?

b) Welche Punkte der y-Achse sind Parabelpunkte ?

c) Bestimme die Nullstellen und ihre Vielfachheit.
Welche x-Werte sind keine Nullstellen ?

d) Untersuche, ob es Paare von Scharkurven gibt,
die bezüglich des Koordinatensystems symmetrisch liegen.

e) Bestimme die Extrempunkte der Schar und die Kurve,
auf der sie liegen.

f) Bestimme die Kurve, auf der die Punkte liegen,
in denen die Tangenten der Scharkurven die Steigung –2 haben.

g) Zeige: Die Kurve mit $y = h(x) = 4 - 2x^2$ berührt jede Scharkurve.
Berechne die Berührpunkte B_a.

h) Zeichne die Scharkurven für $a \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\}$.

7 $f_a(x) = x^2 + ax + \frac{1}{2}a^2$

a) Welche Scharkurve geht durch $A(-2|1)$, $B(-2|2)$, $C(-2|4)$?

b) Welche Punkte der y-Achse sind Parabelpunkte ?

c) Welche Scharkurve hat die Tangente $y = 2x + 2$?

d) Berechne den Schnittpunkt zweier Scharkurven.

e) Untersuche, ob es Paare von Scharkurven gibt, die bezüglich des Koordinatensystems symmetrisch liegen.

f) Bestimme die Extrempunkte der Schar und die Kurve,
auf der sie liegen.

g) Bestimme die Kurve, auf der die Punkte liegen,
in denen die Tangenten der Scharkurven die Steigung 2 haben.

h) Zeige: Die Kurve mit $y = h(x) = \frac{1}{2}x^2$ berührt jede Scharkurve.
Berechne die Berührpunkte B_a.

i) Zeichne die Scharkurven für $a \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\}$.

8 $f_a(x) = x^2 + 2ax + a^2 + a$

a) Welche Scharkurve geht durch $A(2|0)$, $B(0|0)$, $C(-2|0)$?

b) Welche Punkte der y-Achse sind Parabelpunkte ?

c) Bestimme die Nullstellen und ihre Vielfachheit.
Welche x-Werte sind keine Nullstellen ? (lösbar erst im Kap. Wurzel)

•d) Wo schneiden sich Scharparabeln,
die sich nur im Vorzeichen des Parameters unterscheiden ?

•e) Gib eine Beziehung für die Parameter der Scharkurven an,
die sich auf der y-Achse schneiden.

f) Untersuche, ob es Paare von Scharkurven gibt,
die bezüglich des Koordinatensystems symmetrisch liegen.

g) Bestimme die Extrempunkte der Schar und die Kurve,
auf der sie liegen.

h) Zeige: Es gibt eine Gerade, die jede Scharkurve berührt.
Wie lautet ihre Gleichung ?

i) Zeichne die Scharkurven für $a \in \{0, \pm 1, \pm 2\}$.

9 $f_a(x) = \frac{1}{a}x^2 + a$

a) Untersuche die Schar auf Symmetrie zum Koordinatensystem.

b) Bestimme die Nullstellen.

c) Berechne den Schnittpunkt zweier Scharparabeln.

d) Bestimme die Kurve, auf der die Extrempunkte liegen.

e) Zeige: die Gerade $y=2x$ berührt jede Scharparabel.
Berechne die Berührpunkte B_a.

f) Ein Rechteck mit Seiten parallel zu den Koordinatenachsen hat den Berührpunkt B_a und Scheitel S_a einer Parabel als Gegenecken.
Berechne den Flächeninhalt.

10 $f_a(x) = \frac{1}{2}(x^2 - ax - \frac{3}{4}a^2)$

a) Untersuche die Schar auf Symmetrie zum Koordinatensystem.

b) Bestimme die Nullstellen und ihre Vielfachheit.

c) Berechne den Schnittpunkt zweier Scharparabeln.

d) Auf welcher Kurve schneiden sich die Scharparabeln mit den Parameterwerten a und –2a ?

e) Auf welcher Kurve liegen die Scheitel der Scharparabeln ?

f) Zeige, dass die Parabel mit $y = h(x) = \frac{2}{3}x$ jede Scharparabel berührt, und berechne die Berührpunkte B_a.

:11 $f_a(x) = \frac{1}{12}x(x-a)^2$

a) Untersuche die Schar auf Symmetrie zum Koordinatensystem.

b) Bestimme die Waagrechtpunkte und die Kurve, auf der sie liegen.

c) Bestimme die Flachpunkte und die Kurve, auf der sie liegen.

d) Bestimme die Gleichung der Schar t_a der Wendetangenten.

[$t_a(x) = -\frac{1}{36}a^2x + \frac{2}{81}a^3$]

e) Welche Wendetangenten sind parallel zur Winkelhalbierenden des 2. und 4. Quadranten ?

f) Welche Wendetangente schließt mit den Koordinatenachsen ein Dreieck vom Flächeninhalt 72 ein ?

g) Bestimme die Schnittpunkte von f_a und f_{a+3}, sowie die Kurve, auf der sie liegen.

•12 $f_a(x) = \frac{1}{8}(x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - 12x)$

a) Untersuche die Schar auf Symmetrie zum Koordinatensystem.

b) Bestimme die Nullstellen und ihre Vielfachheit.

c) Bestimme die Kurven, auf denen die Hoch- oder Tiefpunkte liegen.

d) Bestimme die Kurve, auf der die Flachpunkte liegen.

e) Zeige, dass die Kurve mit $y = h(x) = \frac{1}{32}x(x^2 - 48)$ jede Scharkurve berührt, und berechne die Berührpunkte B_a.

•13 $f_a(x) = \frac{1}{81}(3x^4 - ax^3 + 3ax^2)$

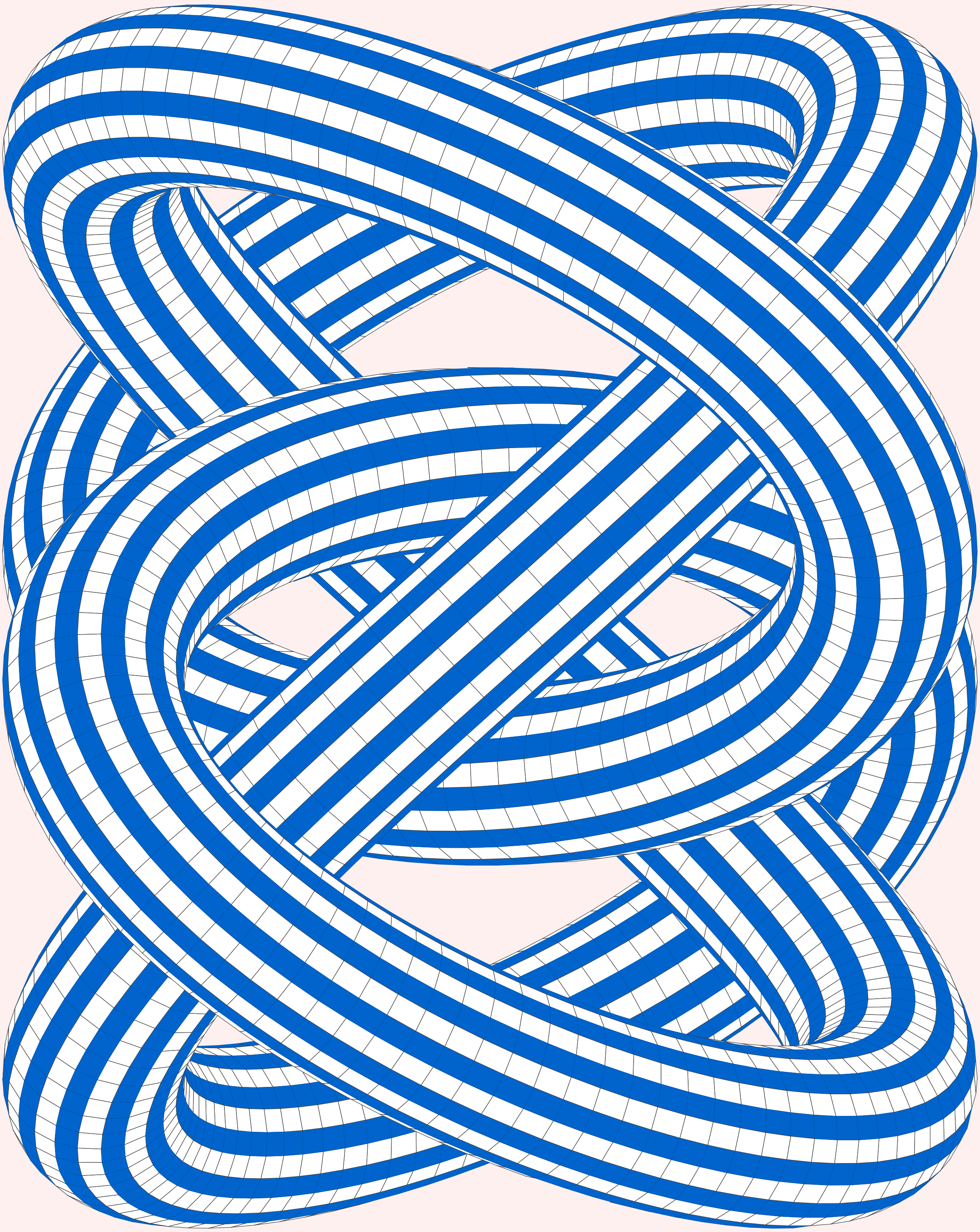
a) Untersuche die Schar auf Symmetrie zum Koordinatensystem.

b) Bestimme die Nullstellen und ihre Vielfachheit.

c) Berechne die Punkte, durch die jede Scharkurve geht.

d) Bestimme die Kurven, auf denen die Hoch- oder Tiefpunkte liegen.

e) Bestimme die Kurve, auf der die Wendepunkte liegen.
Ein Punkt dieser Kurve ist kein Wendepunkt; bestimme ihn.



VI. Technik des Ableitens

1. Ableitung der Grundfunktionen

Das Verfahren zur Ableitung der Polynomfunktion taugt auch noch für 2 andere wichtige Funktionen:

Kehrwertfunktion $f(x) = \frac{1}{x}$

Sekantensteigung $\quad m_s = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} = \frac{-h}{hx(x+h)} = \frac{-1}{x(x+h)},\ h \neq 0$

Tangentensteigung $\quad f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$

$$\boxed{\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2},\quad x \neq 0}$$

Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x}$

Sekantensteigung $\quad m_s = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$

$\quad = \frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}},\ h \neq 0$

Tangentensteigung $\quad f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\boxed{(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}},\quad x \neq 0}$$

Bei der Sinusfunktion dagegen lässt sich der Term m_s der Sekantensteigung nicht mit h kürzen. Man kann aber die Tangentensteigung $\lim\limits_{h\to 0} m_s$ mit einer raffinierten Abschätzung trotzdem bestimmen:

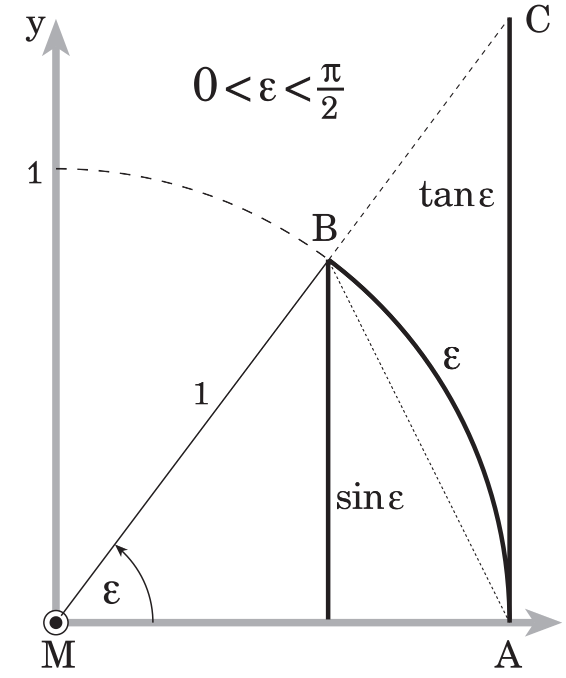
Sinusfunktion $f(x) = \sin x$

Sekantensteigung $\quad m_s = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h},\ h \neq 0$

Ähnlich wie bei der Wurzel hilft ein Trick weiter. Formel: $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$$m_s = \frac{2\cos\frac{2x+h}{2}\sin\frac{h}{2}}{h}$$

Tangentensteigung $\quad f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\left(\cos\frac{2x+h}{2}\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right) = \cos x \cdot \lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$



Für h/2 schreiben wir einfacher ε und nehmen uns den Grenzwert $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon}$ vor; wir entdecken ihn mit einer Flächenbetrachtung am Einheitskreis. Es geht um die Flächeninhalte dreier Figuren im Einheitskreis:

Inhalt des Dreiecks MAB: $F_{klein} = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \sin\varepsilon$

Inhalt des Sektors MAB: $F_{mittel} = \frac{\varepsilon}{2\pi} \cdot 1^2 \cdot \pi$

Inhalt des Dreiecks MAC: $F_{groß} = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \tan\varepsilon$

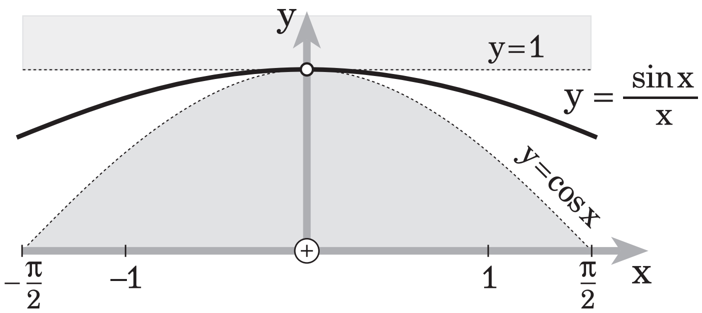
$$F_{klein} < F_{mittel} < F_{groß}$$

$$\frac{1}{2}\sin\varepsilon < \frac{\varepsilon}{2\pi} \cdot \pi < \frac{1}{2}\tan\varepsilon \quad || \cdot 2$$

$$\sin\varepsilon < \varepsilon < \tan\varepsilon \quad || : \sin\varepsilon$$

$$1 < \frac{\varepsilon}{\sin\varepsilon} < \frac{1}{\cos\varepsilon} \quad || \text{ Kehrwert}$$

$$\cos\varepsilon < \frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon} < 1$$



Der Graph von g mit $g(x) = \frac{\sin x}{x}$ liegt im Bereich $0 < x < \frac{\pi}{2}$ zwischen den Kurven $y = 1$ und $y = \cos x$. Wegen Symmetrie zur y-Achse von G_g und der beiden Randkurven gilt diese Eingrenzung sogar für $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

Wir wenden $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \ldots$ an auf $\cos\varepsilon < \frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon} < 1$ und beachten, dass im Grenzfall das <-Zeichen zum ≦-Zeichen werden kann:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \cos\varepsilon \le \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon} \le \lim_{\varepsilon \to 0} 1$$

$$1 \le \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon} \le 1$$

Also $\boxed{\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon} = 1}$

Jetzt endlich können wir die Sinus-Funktion

ableiten $\quad f'(x) = \cos x \cdot \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon} = \cos x \cdot 1$

$$\boxed{\mathbf{(\sin x)' = \cos x}}$$

2. Ableitungsregeln

Wir wissen jetzt, wie man einfache Funktionsterme ableitet, wie:

$f(x) = 2x^3+1$ und $g(x) = \sqrt{x}$

$f'(x) = 6x^2$ und $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Mit den 4 Grundrechenarten lassen sich aus einfachen Funktionstermen f(x), g(x) neue kompliziertere Funktionsterme bilden. Dieser Vorgang heißt **Verknüpfung** von Funktionen. Bei geeigneter Definitionsmenge gilt dann für die

Addition	Summenfunktion	$s(x) = f(x) + g(x) = (2x^3+1) + \sqrt{x}$
Subtraktion	Differenzfunktion	$d(x) = f(x) - g(x) = (2x^3+1) - \sqrt{x}$
Multiplikation	Produktfunktion	$p(x) = f(x)\cdot g(x) = (2x^3+1)\cdot\sqrt{x}$
Division	Quotientenfunktion	$q(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x^3+1}{\sqrt{x}}$

Eine neue Art der Verknüpfung ist die **Verkettung** (Hintereinander-Ausführung). Der neue Term v(x) entsteht dadurch, dass man den einen Funktionsterm f(x) für x in den andern g(x) einsetzt: $v(x) = g(f(x))$.
v heißt **Verkettungsfunktion** oder **Schachtelfunktion**.

Mit $f(x)= 2x^3+1$ und $g(x) = \sqrt{x}$ ergibt Einsetzen von

f(x) in g(x): $g(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{2x^3+1}$
hier wirkt zuerst f auf x, danach g auf f(x);
in diesem Fall heißt f **innere**, g **äußere** Funktion der Verkettung.
Symbolisch: $v=g\circ f$, gelesen »g nach f«

g(x) in f(x): $f(g(x)) = 2[g(x)]^3+1 = 2\sqrt{x}^3+1$
hier wirkt zuerst g auf x, danach f auf g(x);
in diesem Fall heißt g **innere**, f **äußere** Funktion der Verkettung.
Symbolisch: $w=f\circ g$, gelesen »f nach g«

Die Beispiele zeigen, dass im allgemeinen $g\circ f \neq f\circ g$ ist,
dass man also auf die Reihenfolge achten muss.

Wie leitet man die beim Verknüpfen entstehenden Terme ab?
Es gibt tatsächlich Regeln, die dazu bloß die Bestandteile f(x) und g(x) sowie deren Ableitungen f'(x) und g'(x) brauchen. Bei diesen Regeln seien f und g differenzierbare Funktionen. Bei der Begründung der Regeln brauchen wir 3 wichtige Grenzwertsätze. (Im Kapitel VII gehen wir näher darauf ein.)

Wenn $\lim\limits_{x \to a} u(x)$ und $\lim\limits_{x \to a} v(x)$ existieren, dann existieren auch der

Summen-Grenzwert $\quad \mathbf{\lim\limits_{x \to a}(u(x)+v(x)) = \lim\limits_{x \to a} u(x) + \lim\limits_{x \to a} v(x)}$

Differenz-Grenzwert $\quad \mathbf{\lim\limits_{x \to a}(u(x)-v(x)) = \lim\limits_{x \to a} u(x) - \lim\limits_{x \to a} v(x)}$

Produkt-Grenzwert $\quad \mathbf{\lim\limits_{x \to a}(u(x)\cdot v(x)) = \lim\limits_{x \to a} u(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} v(x)}$

Summenregel

$s(x) = f(x) + g(x)$

Sekantensteigung
$$\frac{s(x+h)-s(x)}{h} = \frac{f(x+h)+g(x+h)-(f(x)+g(x))}{h}$$
$$= \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

Tangentensteigung
$$\lim_{h \to 0}\frac{s(x+h)-s(x)}{h} = \lim_{h \to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h \to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$
$$\mathbf{s'(x) \quad = \quad f'(x) \quad + \quad g'(x)}$$

Beispiel: $\quad (2x^3+1+\sqrt{x})' = 6x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Die Summenregel gilt entsprechend auch fürs Ableiten von Differenztermen:
$$\mathbf{(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)}$$
und freilich auch für Summen mit mehr als 2 Summanden:
$$\mathbf{(f(x) + g(x) + h(x) + \ldots)' = f'(x) + g'(x) + h'(x) + \ldots}$$

Produktregel

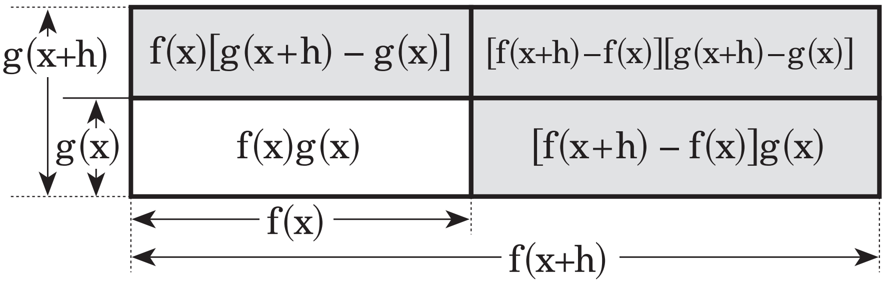
$p(x) = f(x) \cdot g(x)$

Sekantensteigung
$$\frac{p(x+h)-p(x)}{h} = \frac{f(x+h)\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x)}{h}$$
$$= \frac{f(x+h)\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x+h)+f(x)\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x)}{h}$$
$$= \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x+h)+f(x)\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

Tangentensteigung
$$\lim_{h \to 0}\frac{p(x+h)-p(x)}{h} = \lim_{h \to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x+h)\right)+\lim_{h \to 0}\left(f(x)\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)$$
$$= \lim_{h \to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot\lim_{h \to 0} g(x+h)+f(x)\cdot\lim_{h \to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$
$$\mathbf{p'(x) \quad = \quad f'(x)\cdot g(x) \quad + \quad f(x)\cdot g'(x)}$$

Beispiel: $\quad ((2x^3+1)\cdot\sqrt{x})' = 6x^2\cdot\sqrt{x} + (2x^3+1)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Die Produktregel lässt sich schön mit einer Überlegung an Rechteckflächen veranschaulichen, wenn man die Rechteckseiten als Funktionswerte auffasst. Die Funktionen f und g sollen positiv sein und monoton wachsen.



$f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x)$ ist der Zähler der Sekantensteigung, er ist veranschaulicht durch die Summe der 3 grauen Rechtecke. Die Sekantensteigung ist dann:

$$\frac{f(x+h)\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x)}{h} = \frac{(f(x+h)-f(x))g(x)}{h} + \frac{f(x)(g(x+h)-g(x))}{h} + \\ + \frac{(f(x+h)-f(x))(g(x+h)-g(x))}{h}$$

Der Grenzwert des 1. und 2. Summanden ist gleich $f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$,
für den des 3. Summanden gilt:

$$\lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)-f(x))(g(x+h)-g(x))}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}(g(x+h)-g(x))$$
$$= f'(x)\cdot 0 = 0$$

Ein Sonderfall ist die Faktorregel. Sie ergibt sich, wenn ein Funktionsterm nicht abhängt von der Variable, nach der man ableitet:

$$(k\cdot f(x))' = k'\cdot f(x) + k\cdot f'(x) = 0\cdot f(x) + k\cdot f'(x)$$
$$\mathbf{(k\cdot f(x))' = k\cdot f'(x)}$$

Beispiel: $((2a^3+1)\sqrt{x})' = (2a^3+1)\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Die Produktregel gilt freilich auch für Produkte mit mehr als 2 Faktoren. Bei n Faktoren enthält der Ableitungsterm n Summanden, bei denen jeweils ein Faktor abgeleitet ist. Im Fall n=3 sieht das so aus:

$$\mathbf{(f(x)\cdot g(x)\cdot h(x))' = f'(x)\cdot g(x)\cdot h(x) + f(x)\cdot g'(x)\cdot h(x) + f(x)\cdot g(x)\cdot h'(x)}$$

Quotientenregel

$q(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$ Man könnte jetzt wieder den Weg gehen, der von der geschickt umgeformten Sekantensteigung zur Tangentensteigung führt. Nimmt man aber an, dass q differenzierbar ist, dann gehts auch einfacher mit der Produktregel:

$g(x) = q(x)\cdot f(x)$ nach Produktregel ableiten
$g'(x) = q'(x)\cdot f(x) + q(x)\cdot f'(x)$ auflösen nach $q'(x)$

$$q'(x) = \frac{g'(x)-q(x)f'(x)}{f(x)} = \frac{g'(x)-\frac{g(x)}{f(x)}f'(x)}{f(x)} = \frac{f(x)g'(x)-g(x)f'(x)}{(f(x))^2}$$

$$\left(\frac{\mathbf{g(x)}}{\mathbf{f(x)}}\right)' = \frac{\mathbf{f(x)g'(x) - g(x)f'(x)}}{\mathbf{(f(x))^2}}$$

Diese Formel ist etwas unübersichtlich. Eine einfache Merkregel nimmt ihr den Schrecken:

$$\left(\frac{z}{n}\right)' = \frac{nz' - zn'}{n^2} = \frac{\mathbf{nAz - zAn}}{\mathbf{n^2}}$$

gelesen: Nenner mal Ableitung des Zählers minus
Zähler mal Ableitung des Nenners durch Nennerquadrat.

Beispiel: $\left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{x^n \cdot 0 - 1 \cdot nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}$, $n \in \mathbb{N}$

$\mathbf{(x^{-n})' = -nx^{-n-1}}$ Die Ableitungsregel einer x-Potenz gilt auch für negative ganze Exponenten.

Beispiel: $\left(\frac{\sqrt{x}}{2x^3+1}\right)' = \frac{(2x^3+1)\frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x} \cdot 6x^2}{(2x^3+1)^2}$

Beim Ableiten von Quotienten entstehen oft (wie im Beispiel) komplizierte Bruchterme; ihre Vereinfachung kann schwieriger sein als das Ableiten selber. Durch Erweitern mit $2\sqrt{x}$ ergibt sich:

$$\frac{(2x^3+1)\frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x} \cdot 6x^2}{(2x^3+1)^2} = \frac{2x^3+1-12x^3}{2\sqrt{x}(2x^3+1)^2} = \frac{1-10x^3}{2\sqrt{x}(2x^3+1)^2}$$

Kettenregel

$v(x) = g(f(x))$

Sekantensteigung $\frac{v(x+h)-v(x)}{h} = \frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{h}$

Um hier weiter zu kommen, erweitert man mit $f(x+h) - f(x)$

$$\frac{v(x+h)-v(x)}{h} = \frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{f(x+h)-f(x)} \cdot \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Der 2. Faktor hat schon eine vertraute Gestalt (Sekantensteigung von f); beim 1. hilft eine geschickte Substitution:
$f(x+h) - f(x) = k$, also $f(x+h) = f(x) + k$

k hängt nur ab von x und h; es gilt: wenn h=0, dann auch k=0. Weil k im Nenner steht, muss man sich allerdings auf Funktionen f beschränken, bei denen k in einer Umgebung der betrachteten Stelle nur dann gleich 0 ist, wenn auch h gleich 0 ist. Abgesehen von wenigen sehr ausgefallenen Funktionen haben alle üblichen Funktionen diese Eigenschaft (ihre Nullstellen liegen also nicht beliebig dicht).

$$\frac{v(x+h)-v(x)}{h} = \frac{g(f(x)+k)-g(f(x))}{k} \cdot \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Tangentensteigung: $v'(x)$ ergibt sich für $h \to 0$, was hier auch bedeutet $k \to 0$.

$$\lim_{h \to 0} \frac{v(x+h)-v(x)}{h} = \lim_{k \to 0} \frac{g(f(x)+k)-g(f(x))}{k} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$\mathbf{v'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)}$ in Worten:

- Leite die äußere Funktion g ab nach ihrem Argument und lasse den Term der inneren Funktion stehen.
- Multipliziere mit dem Ableitungsterm $f'(x)$ der inneren Funktion f (nachdifferenzieren!)

Übersichtlicher ist die Kettenregel, wenn man den Term der inneren Funktion abkürzt mit $z = f(x)$

$\mathbf{v'(x) = g'(z) \cdot f'(x)}$

Beispiele: $v(x) = g(f(x)) = \sqrt{2x^3+1}$

Term der inneren Funktion $z = f(x) = 2x^3+1$

Term der äußeren Funktion $g(z) = \sqrt{z}$

$v'(x)$ ist gleich Ableitung von g nach z mal Ableitung von f nach x

$$(\sqrt{2x^3+1})' = \frac{1}{2\sqrt{z}} \cdot 6x^2 = \frac{1}{2\sqrt{2x^3+1}} \cdot 6x^2$$

Beim Verketten kommt es auf die Reihenfolge an.
Tausch von innerer und äußerer Funktion:

$w(x) = f(g(x)) = 2(\sqrt{x})^3+1 = 2z^3+1$ mit $z = \sqrt{x}$

$$(2(\sqrt{x})^3+1)' = 6z^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 6(\sqrt{x})^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Weil $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2}-x)$ ist,

kann man mit der Kettenregel die Kosinusfunktion ableiten:

$$(\cos x)' = (\sin(\tfrac{\pi}{2}-x))' = (\cos(\tfrac{\pi}{2}-x)) \cdot (-1) = -\sin x$$

$$\boxed{\mathbf{(\cos x)' = -\sin x}}$$

Weil $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ist,

kann man mit der Quotientenregel die Tangensfunktion ableiten:

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{(\cos x)^2} = \frac{(\cos x)^2+(\sin x)^2}{(\cos x)^2} = \frac{1}{(\cos x)^2}$$

oder $$= \frac{(\cos x)^2}{(\cos x)^2} + \frac{(\sin x)^2}{(\cos x)^2} = 1+(\tan x)^2$$

$$\boxed{\mathbf{(\tan x)' = \frac{1}{(\cos x)^2} = 1 + (\tan x)^2}}$$

Beispiel: **Mehrfachverkettung** $f(x) = (\cos\sqrt{x})^4$

Hier sind 3 Funktionen verschachtelt: $f(x) = g(h(i(x)))$

Abkürzungen: $w = i(x)$, $v = h(w)$, $u = g(v)$

außen	$(\ldots)^4$	hoch 4	$u = v^4$	$u' = 4v^3$
dazwischen	$\cos\ldots$	Kosinus	$v = \cos w$	$v' = -\sin w$
innen	$\sqrt{\ldots}$	Wurzel	$w = \sqrt{x}$	$w' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$f'(x) = g'(h(i(x))) \cdot h'(i(x)) \cdot i'(x)$$

$$f'(x) = u' \cdot v' \cdot w' = 4v^3 \cdot (-\sin w) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 4(\cos x)^3 \cdot (-\sin\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Übersicht über die Ableitungsregeln

	Term	Ableitungsterm
Summenregel	$f(x) \pm g(x)$	$f'(x) \pm g'(x)$
Produktregel	$f(x) \cdot g(x)$	$f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Sonderfall	$k \cdot f(x)$	$k \cdot f'(x)$
Quotientenregel	$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{g(x)f'(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$
Sonderfall	$\frac{k}{g(x)}$	$\frac{-k \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
Kettenregel	$f(g(x))$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Übersicht über die Ableitungen der Grundfunktionen

	Term	Ableitungsterm
Potenzfunktion	$x^z,\ z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$	$z \cdot x^{z-1}$
Wurzelfunktion	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
Sinusfunktion	$\sin x$	$\cos x$
Kosinusfunktion	$\cos x$	$-\sin x$
Tangensfunktion	$\tan x$	$\frac{1}{(\cos x)^2} = 1 + (\tan x)^2$

Zum Nachdenken

❶ Zusammenhang zwischen den Nullstellen von f(x) und f'(x) bei Polynomen

$f(x) = (x-a)^v \cdot g(x)$, $g(a) \neq 0$ a ist genau v-fache Nullstelle von f(x)

Auf Seite ••99 haben wir behauptet, dass a dann auch genau (v–1)-fache Nullstelle von f'(x) ist. Das beweisen wir jetzt mit der Produkt- und Kettenregel:

$f'(x) = v(x-a)^{v-1} \cdot g(x) + (x-a)^v \cdot g'(x) = (x-a)^{v-1} \cdot (v \cdot g(x) + (x-a) \cdot g'(x))$

$f'(x) = (x-a)^{v-1} \cdot h(x)$, wobei $h(x) = v \cdot g(x) + (x-a) \cdot g'(x)$

wegen $h(a) = v \cdot g(a) \neq 0$ ist damit die Behauptung bewiesen.

Ist also a genau v-fache Nullstelle von f(x),
dann ist a auch genau (v–1)-fache Nullstelle von f'(x),
dann ist a auch genau (v–2)-fache Nullstelle von f''(x),
… ,
dann ist a auch genau 1-fache Nullstelle von $f^{(v-1)}(x)$,
dann ist a **keine** Nullstelle von $f^{(v)}(x)$.

Kurz: Wenn a genau v-fache Nullstelle von f(x) ist,
dann gilt: $f(a) = f'(a) = f''(a) = \ldots f^{(v-1)}(a) = 0$ und $f^{(v)}(a) \neq 0$

Auch die Umkehrung dieses Satzes ist richtig:
Wenn gilt: $f(a) = f'(a) = f''(a) = \ldots f^{(v-1)}(a) = 0$ und $f^{(v)}(a) \neq 0$,
dann ist a genau v-fache Nullstelle von f(x).
Beweis: Weil a Nullstelle von f(x) ist, gilt mit einem geeigneten k
$f(x) = (x-a)^k \cdot g(x)$, $g(a) \neq 0$.
Nach dem oben Gezeigten ist damit a Nullstelle von f'(x) bis $f^{(k-1)}(x)$ und keine Nullstelle von $f^{(k)}(x)$. Also muss k gleich v sein.

❷ Mehrfache Nullstellen bei beliebigen Funktionstermen

Oft ist es nicht möglich, den Faktor (x–a) abzuspalten, obwohl a eine Nullstelle ist.
So ist 0 eine Nullstelle von $\cos x - 1$, aber der Faktor $(x-0)=x$ lässt sich nicht abspalten von $\cos x - 1$. Hier hilft eine verallgemeinerte

> Definition: a ist genau v-fache Nullstelle von f, wenn gilt:
> $f(a) = f'(a) = f''(a) = \ldots f^{(v-1)}(a) = 0$ und $f^{(v)}(a) \neq 0$

So gilt für $f(x) = \cos x - 1$: $f(0) = 1 - 1 = 0$
$f'(x) = -\sin x$, $f'(0) = 0$
$f''(x) = -\cos x$, $f''(0) = -1 \neq 0$,
also ist 0 genau 2-fache Nullstelle von $\cos x - 1$.

Ohne langes Ableiten erkennt man die Vielfachheit v bei Termen $(x-a)^v \cdot g(x)$, $g(a) \neq 0$, bei denen g(x) kein Polynom ist. So hat $(x+7)^5 \sin x$ die 5-fache Nullstelle –7.

Wenn nicht genügend Ableitungen existieren, dann lässt sich die Vielfachheit nicht angeben. Welche Vielfachheit hat zum Beispiel die Nullstelle 0 der Betragfunktion mit $f(x)=|x|$?
1.Ableitung: $f'(x) = \operatorname{sgn} x$, $x \neq 0$. Weil f'(0) nicht existiert, kann man nach unsrer Definition die Vielfachheit der Nullstelle 0 nicht angeben.

❸ 2 hinreichende Bedingungen für Wendestellen

Wir kennen 2 hinreichende Bedingungen dafür, dass bei a ein Wendepunkt ist:

B1: a ist genau 3-fache Schnittstelle von Kurve und Tangente

B2: $f''(a) = 0$ und $f'''(a) \neq 0$.

Wir beweisen, dass B1 und B2 gleichwertig sind.

a ist genau 3-fache Schnittstelle von Kurve f(x) und Tangente $t(x) = f'(a)\cdot(x-a) + f(a)$ ist gleichbedeutend damit, dass a genau 3-fache Nullstelle ist von
$d(x) = f(x) - t(x) = f(x) - [f'(a)\cdot(x-a) + f(a)]$

Aus B1 folgt B2: $d'(x) = f'(x) - f'(a) \Rightarrow d''(x) = f''(x) \Rightarrow d'''(x) = f'''(x)$
B1: $d(a) = d'(a) = d''(a) = 0$ und $d'''(a) \neq 0 \Rightarrow$ B2: $f''(a) = 0$ und $f'''(a) \neq 0$.

Aus B2 folgt B1: $d(a) = f(a) - t(a) = 0$
$d'(a) = f'(a) - f'(a) = 0$
$d''(a) = f''(a) = 0$
$d'''(a) = f'''(a) \neq 0$, also ist a genau 3-fache Schnittstelle.

Aufgaben

Der Exponent n ist eine natürliche Zahl.

1 Berechne die Grenzwerte für $x \to 0$ und verwende dabei $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

a) $\frac{x}{\sin x}$ **b)** $\frac{\sin 2x}{2x}$ **c)** $\frac{\sin x}{2x}$ **d)** $\frac{\sin 2x}{3x}$ **e)** $\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$

f) $\frac{\tan x}{\sin x}$ **g)** $\frac{\tan x}{x}$ **h)** $\frac{\tan 2x}{\sin x}$ **i)** $\frac{\tan 2x - \sin 3x}{\sin 4x}$

◊2 Gegeben ist ein Funktionsterm f(x). Bestimme f'(x) sowie $D_{f_{max}}$ und $D_{f'}$.

a) $x^n\sqrt{x}$ **b)** $x^n \sin x$ **c)** $x^n \cos x$ **d)** $x^n \tan x$

e) $\sqrt{x}\sin x$ **f)** $\sqrt{x}\cos x$ **g)** $\sqrt{x}\tan x$

h) $\sin x \cos x$ **i)** $\sin x \tan x$ **j)** $\cos x \tan x$

◊3 Gegeben ist ein Funktionsterm f(x). Bestimme f'(x) sowie $D_{f_{max}}$ und $D_{f'}$.

a) $(2x-1)(x^2-2x-1)$ **b)** $(1-x)(x^3-3)(x^2+x+1)$

c) $(2x-2x^3)\sqrt{x}$ **d)** $2x(x+2)(x-3)\sqrt{x}$

◊4 Gegeben ist ein Funktionsterm f(x). Bestimme f'(x) sowie $D_{f_{max}}$ und $D_{f'}$.

a) $\frac{x^n}{\sqrt{x}}$ **b)** $\frac{x^n}{\sin x}$ **c)** $\frac{x^n}{\cos x}$ **d)** $\frac{x^n}{\tan x}$

f) $\frac{\sqrt{x}}{\sin x}$ **h)** $\frac{\sqrt{x}}{\cos x}$ **i)** $\frac{\sqrt{x}}{\tan x}$ **m)** $\frac{\sin x}{\tan x}$ **n)** $\frac{\cos x}{\tan x}$

◊5 Gegeben ist ein Funktionsterm f(x). Bestimme f'(x) sowie $D_{f\,max}$ und $D_{f'}$.

a) $\frac{1-x}{3+x^2}$ **b)** $\frac{x^2-5}{3-x}$ **c)** $\frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+1}$ **d)** $\frac{(x-2)(x^2-8x+12)}{x^2}$

e) $\frac{x+5}{(x+2)(1-3x)}$ **f)** $\frac{2x^2-6x}{3\sqrt{x}}$ **g)** $\frac{\sqrt{x}-1}{x}$ **h)** $\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

6

gegeben	gesucht: Schachtelterm f(x) und $D_{f\,max}$				
	a)	**b)**	**c)**	**d)**	**e)**
$p(x) = x^n$	p(p(x))	p(w(x))	p(s(x))	p(c(x))	p(t(x))
$w(x) = \sqrt{x}$	w(p(x))	w(w(x))	w(s(x))	w(c(x))	w(t(x))
s(x) = sin x	s(p(x))	s(w(x))	s(s(x))	s(c(x))	s(t(x))
c(x) = cos x	s(p(x))	s(w(x))	s(s(x))	s(c(x))	s(t(x))
t(x) = tan x	t(p(x))	t(w(x))	t(s(x))	t(c(x))	t(t(x))

7 Leite die Schachtelterme in **5** ab und bestimme $D_{f'}$.

8 Bilde die 2. Ableitungen der Grundfunktionen.

9 f sei differenzierbar. Leite ab:

a) $(f(x))^n$ **b)** $\sqrt{f(x)}$ **c)** sin f(x)

10 f sei differenzierbar. Leite ab:

a) f(2x) **b)** f(x+2) **c)** $f(x^n)$ **d)** $f(\sqrt{x})$ **e)** f(cos x)

•11 f sei differenzierbar. Leite ab:

a) f(x+f(1)) **b)** f(x+f(x)) **c)** f(x·f(x))

d) $f^2(x) = f(f(x))$ **e)** $f(x^2)$ **e)** $(f(x))^2$

12 Welche Symmetrie zum Koordinatensystem hat $G_{f'}$, falls

a) f(x) = f(–x) **b)** f(x) = –f(–x)

:13 Bei einer Verkettung sei die Kurve der inneren Funktion

a) symmetrisch zur y-Achse

b) symmetrisch zum Ursprung.

Untersuche, welche Symmetrie-Eigenschaften die äußere Funktion haben muss, wenn die Kurve der verketteten Funktion symmetrisch zum Koordinatensystem sein soll.

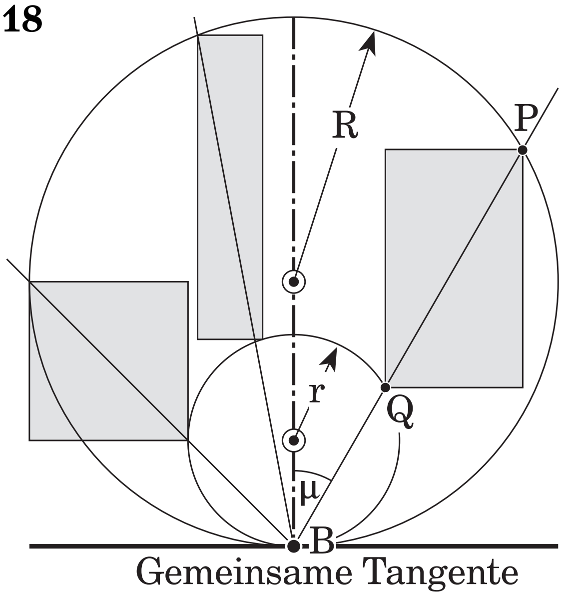
•14 Leite ab:
a) $(\sin(3x^2+2x))^3$ **b)** $\sqrt{\cos(\sqrt{x})}$ **c)** $\sqrt{\sqrt{\sqrt{x^4+3}}}$

•15 $f(x) = x^{10}$ $g(x) = x^2 - x$ $h(x) = \cos x$
Bestimme den Term v(x) der Verkettung, bei der f, g und h genau einmal drankommt, und seine 1. Ableitung. (6 Möglichkeiten!)

:16 $f(x) = \sqrt{x}$ $g(x) = x^2 + 1$ $h(x) = \tan x$
Bestimme den Term v(x) der Verkettung, bei der f, g und h genau einmal drankommt, seine 1. Ableitung. (6 Möglichkeiten!) sowie $D_{v\,max}$ und $D_{v'}$.

•17 Bestimme die ersten 3 Ableitungen und gib dann die 100. Ableitung an.
a) $\frac{1}{x-1}$ **b)** $\frac{1}{(x-1)^2}$

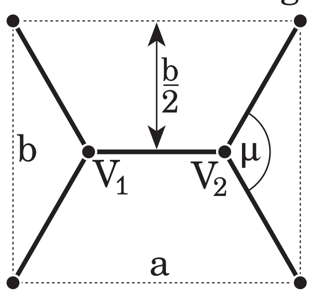
:18



Durch den Berührpunkt B zweier Kreise mit den Radien r und R gehen Geraden. Die Punkte P und Q, in denen eine Gerade beide Kreise schneidet sind Gegenecken eines Rechtecks; 2 Seiten eines solchen Rechtecks sind parallel zur gemeinsamen Tangente der Kreise. Bestimme den Flächeninhalt des größten Rechtecks.
Wie groß ist dann der Winkel μ ?

•19

Kürzeste Leitung



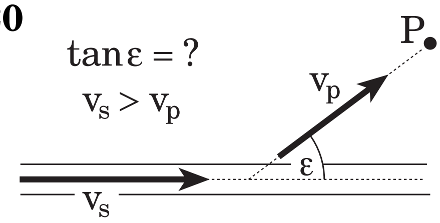
Die 4 Ecken eines Rechtecks mit den Seiten a und b sollen über eine möglichst kurze Rohrleitung miteinander verbunden werden.

a) Berechne die Länge dieser Leitung und den Winkel μ in einem Verzweigungspunkt V.

b) Zeige: Eine solche Leitung ist kürzer als eine Verbindung längs den Rechteckseiten oder längs den Rechteck-Diagonalen.

c) Bei welchem Rechteck (Seitenverhältnis=?) fallen die Verzweigungspunkte zusammen?

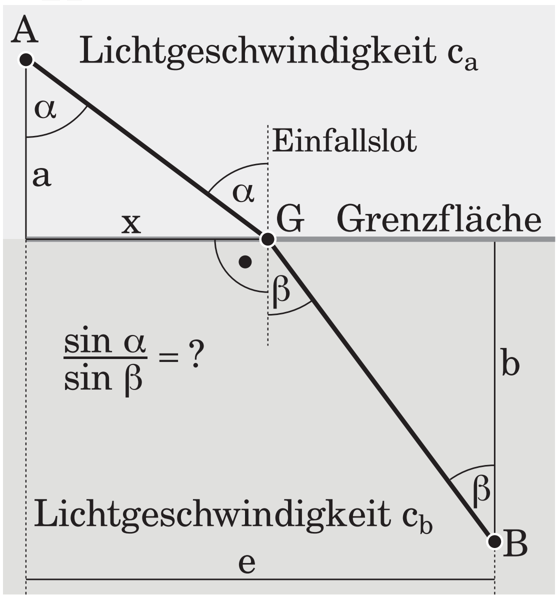
•20



Auf einer Straße nähert sich jemand dem Ort P. Auf der Straße kommt er voran mit der Geschwindigkeit v_s , im Gebiet von P mit der Geschwindigkeit v_p ($<v_s$).

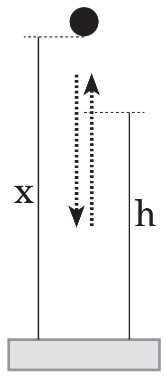
In welchem Winkel ε muss er von der Straße in Richtung P abbiegen, wenn er möglichst bald in P ankommen will?

•21



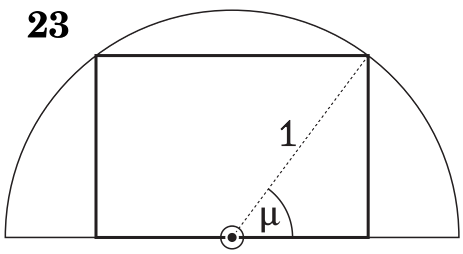
Fermatsches Prinzip
Licht nimmt seinen Weg immer so, dass es ihn in der kürzesten Zeit zurücklegt. (Pierre de FERMAT, französischer Mathematiker, 1601 bis 1665)
Zwischen den Punkten A und B soll eine Lichtverbindung hergestellt werden:
A liegt in einem Stoff, in dem die Lichtgeschwindigkeit c_a ist,
B in einem Stoff mit der Lichtgeschwindigkeit c_b . G ist ein Punkt der Fläche, in der die beiden Stoffe aneinandergrenzen. Der Lichtstrahl geht durch G.

Für den »schnellsten« Lichtweg (der nicht immer der kürzeste ist) berechne man den Ausdruck $(\sin\alpha):(\sin\beta)$ in Abhängigkeit von den Lichtgeschwindigkeiten c_a und c_b .
(Brechungsgesetz von SNELLIUS, Willebrord Snell van Rojen, holländischer Mathematiker und Physiker, 1580 bis 1626)



•22 Eine ruhende Kugel fällt aus der Höhe x und prallt am Boden elastisch nach oben ab.
Aus welcher Höhe x muss die Kugel fallen, wenn sie in möglichst kurzer Zeit eine Steighöhe h ($<x$) erreichen soll?

23

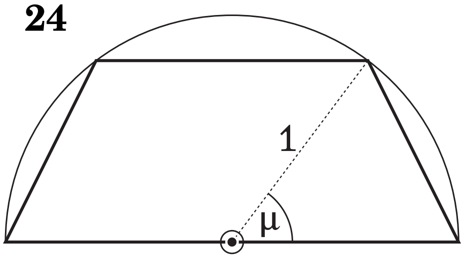


Einem Halbkreis mit Radius 1 ist ein Rechteck einbeschrieben.
Für welchen Winkel μ hat das Rechteck

a) maximalen Flächeninhalt

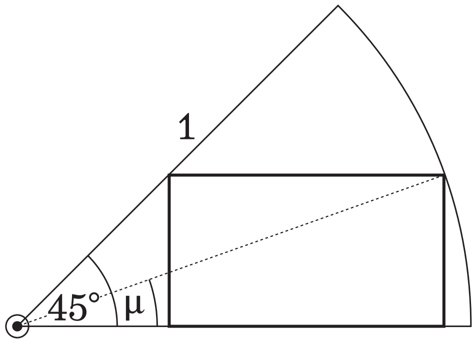
b) extremen Umfang (Maximum, Minimum?)

24



Einem Halbkreis mit Radius 1 ist ein gleichschenkliges Trapez einbeschrieben.
Für welchen Winkel μ hat das Trapez maximalen Flächeninhalt?

25 Einem Kreissektor mit Radius 1, Mittelpunktwinkel 45°, ist ein Rechteck einbeschrieben.
Für welchen Winkel μ hat das Rechteck maximalen Flächeninhalt?



26 Ein gerader Kreiszylinder habe das Volumen V.
Bei welchem Grundkreisradius r und Höhe h ist seine Oberfläche minimal, wenn

a) beide Deckel zur Oberfläche zählen

b) nur ein Deckel zur Oberfläche zählt

c) kein Deckel zur Oberfläche zählt.

27 Einer Halbkugel mit Radius 1 ist ein gerader Kreiszylinder einbeschrieben. (Dieselbe Anordnung entsteht auch, wenn die Figur in Aufgabe **23** um ihre Symmetrieachse rotiert.)
Bei welchem Zylinderradius ist das Zylindervolumen möglichst groß?

•28 Eine Ölkanne soll die Form eines Zylinders erhalten, dem ein Kegel von gleichem Grundkreis-Durchmesser aufgesetzt ist. Die Höhe dieses Kegels soll $\frac{2}{3}$ des gemeinsamen Grundkreis-Durchmessers betragen.
Die Ölkanne habe den Rauminhalt V= 6π.
Wie sind die Abmessungen der Kanne (Grundkreisradius x, Zylinderhöhe y und Kegelhöhe h) zu wählen, wenn man einen möglichst kleinen Materialverbrauch erreichen will?
Wie groß ist in diesem Fall die Oberfläche S der Ölkanne?
(Aus der Reifeprüfung 1957)

•29 Aus einem quadratischen Karton von 10 cm Seitenlänge werden 4 kongruente gleichschenklige Dreiecke, deren Grundseiten die Quadratseiten sind, so herausgeschnitten, dass das Netz einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche übrig bleibt.

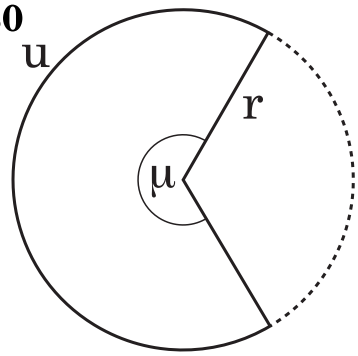
a) Wie lang ist die Grundkante der Pyramide zu wählen, damit das Volumen der Pyramide ein Maximum wird?

b) Berechne das Volumen und die Oberfläche der Pyramide für diesen Fall.

c) Wieviel Prozent der Kartonfläche müssen weggeschnitten werden?

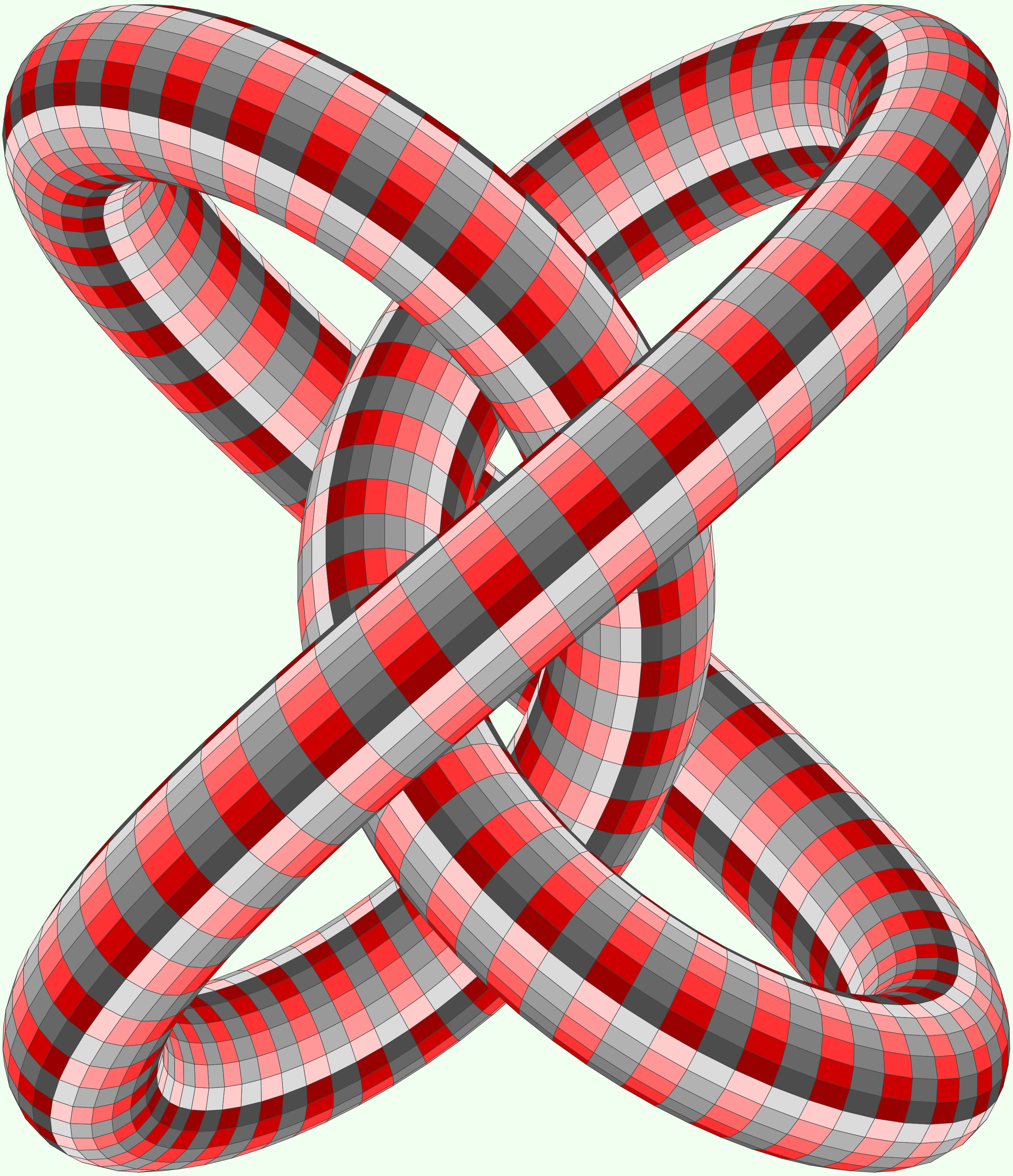
(Aus der Reifeprüfung 1957)

:30



Aus einem Kreis mit Radius r soll ein Sektor mit Mittelpunktwinkel μ so geschnitten werden, dass er sich zu einem Kegel biegen lässt, der möglichst großes Volumen hat.
Berechne den Winkel μ sowie vom Trichter:
Radius R, Höhe h, Volumen V und Öffnungswinkel σ.

:31 Einer Kugel mit Radius r soll ein gerader Kreiskegel mit möglichst kleinem Volumen V_{min} umbeschrieben sein. Berechne $V_{min}:V_{Kugel}$.



VII. Stetigkeit und Grenzwert

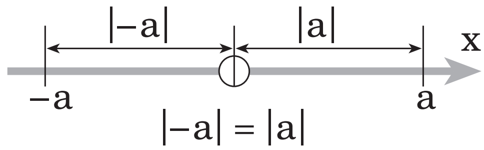
1. Betrag und abschnittweise definierte Funktion

Bisher haben wir uns hauptsächlich mit Polynomfunktionen beschäftigt:
Ihre Graphen sind glatte Kurven, das heißt, Kurven ohne Ecken und Sprünge. Es gibt aber auch Funktionen, deren Graphen solche Besonderheiten haben: Die einfachsten sind die Betragfunktion und die Signumfunktion.

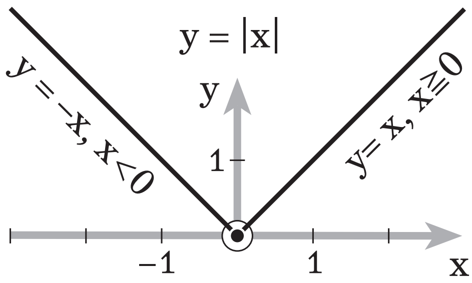
Betragfunktion $f(x) = |x|$

Definition $|x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$

$|x|$ ist die Entfernung der Zahl x vom Ursprung,
ist die Länge des zu x gehörigen Zahlenpfeils,
ist nach Definition nicht negativ.



Man kann die Betragstriche auch vermeiden, wenn man die Wurzelfunktion ausnutzt: $\mathbf{|x|} = \sqrt{\mathbf{x^2}}$.
Der Graph von $y=|x|$ hat die Ecke $(0|0)$.
Der Inhalt der Betragstriche ist gewöhnlich ein Term $t(x)$. Beim Arbeiten mit Beträgen ist es oft sehr hilfreich, wenn man die Betragstriche mit einer Fallunterscheidung beseitigt:



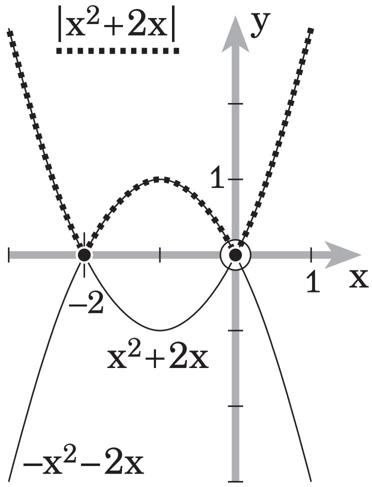
$$|t(x)| = \begin{cases} t(x) & \text{für } t(x) \geq 0 \\ -t(x) & \text{für } t(x) < 0 \end{cases}$$

Hier ist es jetzt die Kunst, die Zahlen x zu bestimmen, für die der Term $t(x)$ negativ ist, also eine der beiden Ungleichungen zu lösen. Das gelingt am besten mit einer Übersicht übers Vorzeichen von $t(x)$. Und diese findet man über die Nullstellen von $t(x)$. Das =-Zeichen darf dabei an jeder Nahtstelle nur einmal vergeben werden.

1. Beispiel: $f(x) = |x^2+2x|$ soll ohne Betragstriche geschrieben werden.
Nullstellen von x^2+2x : $x^2+2x = x(x+2) = 0 \;\Rightarrow\; x=0$ oder $x=-2$

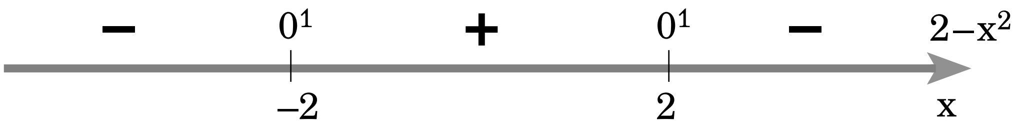
$$f(x) = |x^2+2x| = \begin{cases} x^2+2x & \text{für } x \leq -2 \text{ oder } 0 \leq x \\ -x^2-2x & \text{für } \quad -2 < x < 0 \end{cases}$$

Man nennt die Schreibung ohne Beträge auch abschnittweise Darstellung oder stückweise Darstellung. Bei dieser Stückelung entstehen neue Terme, die Teilterme. Jeder Teilterm ist nur in seinem Abschnitt (x-Ungleichung) definiert.



Die Nullstellen des Inhalts der Betragstriche sind die Stellen, bei denen die Abschnitte aneinander grenzen; man nennt sie deswegen auch Naht- oder Trennstellen. Wenn eine Kurve Ecken hat, dann bei Nahtstellen. Auch Ecken zählen zu den charakteristischen Kurvenpunkten.
Zeichne zuerst die Teilkurven dünn mit Bleistift vor, die zu den Teiltermen gehören, ohne auf die Teilbereiche (=Abschnitte) zu achten. Überlege dann, wo eine Teilkurve definiert ist, und hebe diesen Kurventeil deutlich hervor.

2. Beispiel: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - |2-\frac{1}{2}x^2|$ soll abschnittweise dargestellt werden.
Nullstellen von $2-\frac{1}{2}x^2$: $4-x^2=0 \Rightarrow x=\pm 2$ sind die Nahtstellen



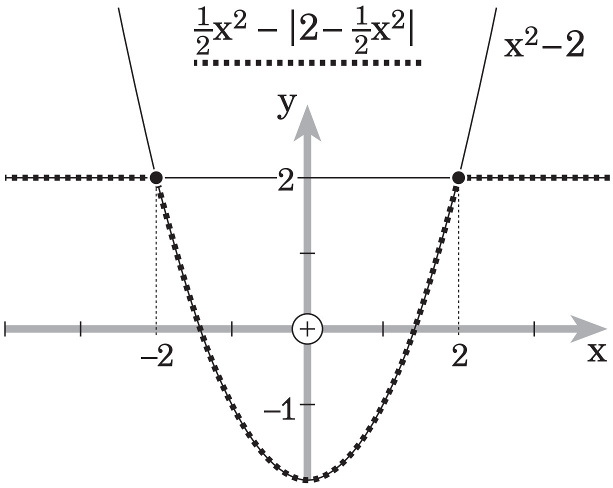
$-2 \leqq x \leqq 2$: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - (2-\frac{1}{2}x^2) = x^2 - 2$

$x<-2$ oder $2<x$: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - [-(2-\frac{1}{2}x^2)] = \frac{1}{2}x^2 + (2-\frac{1}{2}x^2) = 2$

Damit ist die Aufgabe erledigt; schöner schaut das Ergebnis so aus:

$$f(x) = \tfrac{1}{2}x^2 - \left|2-\tfrac{1}{2}x^2\right| = \begin{cases} x^2-2 & \text{für } -2 \leq x \leq 2 \\ 2 & \text{für } x < -2 \text{ oder } 2 < x \end{cases}$$

Kurvenpunkte in den Nahtstellen: (–2|2) und (2|2).



Spannender wird die Angelegenheit, wenn bei einer Nahtstelle der Nenner 0 ist, wenn also eine Nahtstelle zugleich auch Definitionslücke ist.

3. Beispiel: $f(x) = \dfrac{|x^2-1|}{x-1}$ soll stückweise dargestellt werden.

Nahtstellen: $x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm 1$; die Nahtstelle 1 ist Definitionslücke.

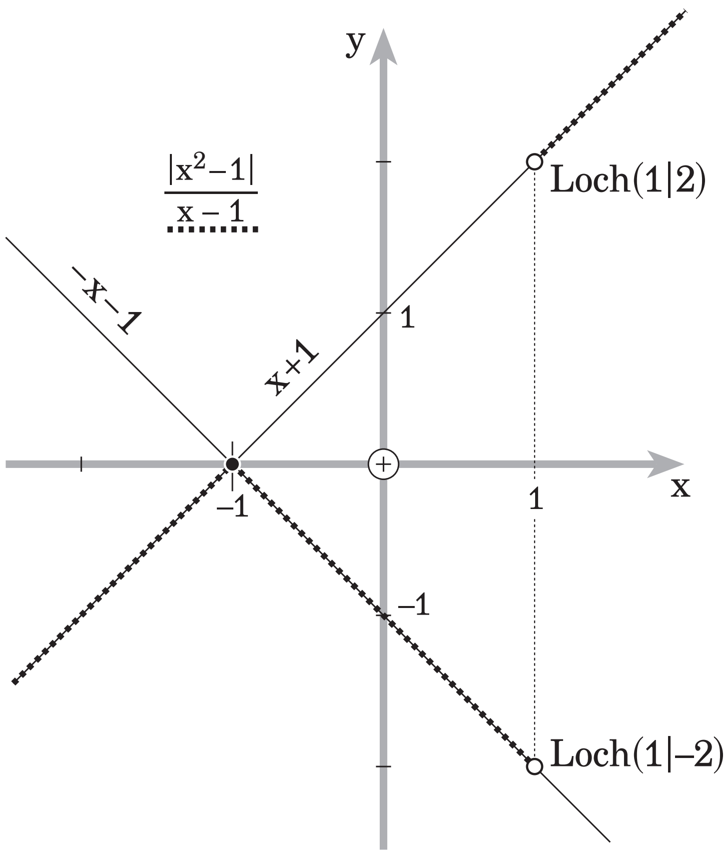
$x \leqq -1$ oder $1<x$: $\quad f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1} = \dfrac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x+1$

$-1<x<1$: $\quad f(x) = \dfrac{-(x^2+1)}{x-1} = \dfrac{-(x+1)(x-1)}{x-1} = -x-1$

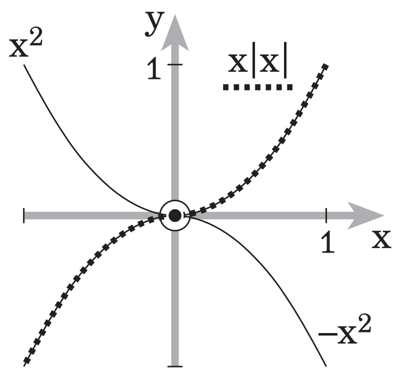
Dass 1 Definitionslücke ist, bringt man in den beiden Ungleichungen zum Ausdruck: die 1 ist nur umrahmt vom <- oder >-Zeichen.

$$f(x) = \frac{|x^2-1|}{x-1} = \begin{cases} -x-1 \text{ für } & -1 \le x < 1 \\ x+1 \text{ für } & x<-1 \text{ oder } 1<x \end{cases}$$

Bei der definierten Nahtstelle –1 gibt es den Kurvenpunkt (–1|0). Für die andere Nahtstelle 1 lässt sich mit jedem Teilterm ein y-Wert errechnen: der obere Teilterm liefert –2, der untere 2.
(1|2) und (1|–2) sind aber keine Kurvenpunkte, sie sitzen ja an Definitionslücken. Wir nennen sie **Löcher**.
Auch Löcher sind charakteristisch für den Kurvenverlauf.



In den bisherigen Beispielen waren Ecken an allen definierten Nahtstellen des Graphen. Das muss aber nicht immer so sein.

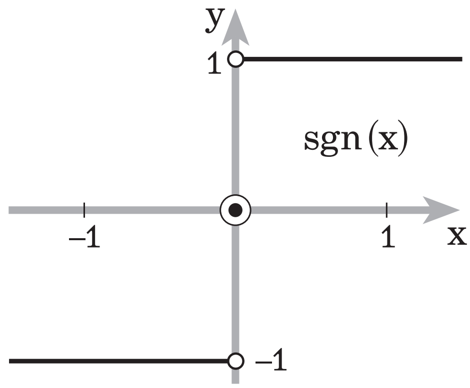


4. Beispiel: $f(x) = x|x| = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{für } x < 0 \end{cases}$

Vorzeichenfunktion sgn
(Signumfunktion)

Definition $\quad \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} +1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$

sgn ist die Abkürzung von signum (=Zeichen).
Die Vorzeichenfunktion sgn(x) ordnet zu
- jeder **positiven** Zahl den **positiven** Wert +1
- der 0 den Wert 0
- jeder **negativen** Zahl den **negativen** Wert –1



Ist kein Missverständnis möglich, so kann man auch einfacher sgn x schreiben statt sgn(x). In allen Zweifelsfällen verwende man zur Sicherheit Klammern, zum Beispiel:

sgn 2x bedeutet sgn (2x)
sgn 2·x könnte gedeutet werden als sgn(2)·x,
doch das sollte man dann deutlicher schreiben als x sgn 2
Unentbehrlich aber sind Klammern bei Summen:
sgn x + 2 versteht man als sgn (x) + 2 = 2 + sgn x und nicht als sgn (x+2).

Der Graph G_{sgn} hat eine Besonderheit, die wir noch nicht kennen:
Vom Graphenpunkt (0|0) erreicht man den restlichen Graphen nur im Sprung; man sagt: (0|0) ist Sprungpunkt, 0 ist Sprungstelle.

Ähnlich wie die Betragstriche kann man sgn mit einer Fallunterscheidung (Stückelung) beseitigen:

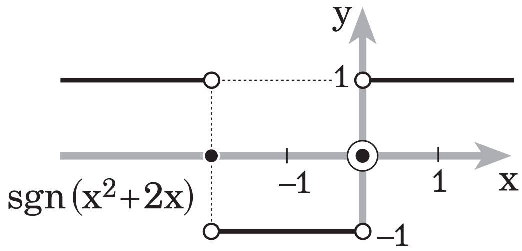
$$\operatorname{sgn} t(x) = \begin{cases} +1 & \text{für } t(x) > 0 \\ 0 & \text{für } t(x) = 0 \\ -1 & \text{für } t(x) < 0 \end{cases}$$

Entscheidend für Kurvenverläufe mit sgn sind wieder die Nullstellen von t(x) mit ihrer Vielfachheit; sie sind wieder die Nahtstellen, an denen die Teilbereiche aneinandergrenzen.

5. Beispiel: $\operatorname{sgn}(x^2+2x)$ hat x^2+2x als Argument, es hat dieselbe Vorzeichenübersicht wie das 1. Beispiel mit dem Funktionsterm $|x^2+2x|$.

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x^2+2x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x<-2 \text{ oder } 0>x \\ 0 & \text{für} \quad x=-2 \text{ oder } x=0 \\ -1 & \text{für} \quad -2<x<0 \end{cases}$$

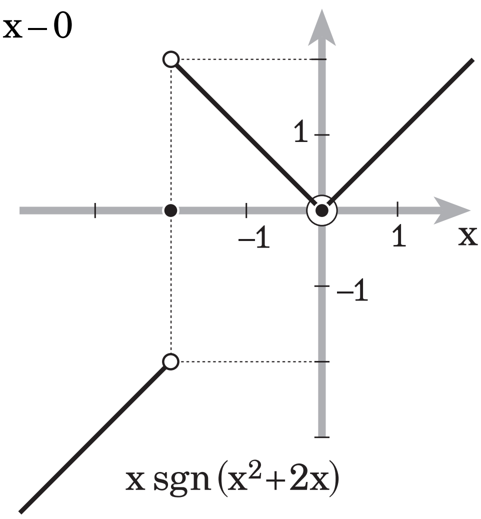
–2 und 0 sind Sprungstellen,
(–2|0) und (2|0) sind Sprungpunkte,
die y-Werte der Löcher errechnen sich wie im 3. Beispiel: man setzt –2 und 2 in die Teilterme ein.



Nicht immer ist eine Nahtstelle auch eine Sprungstelle.

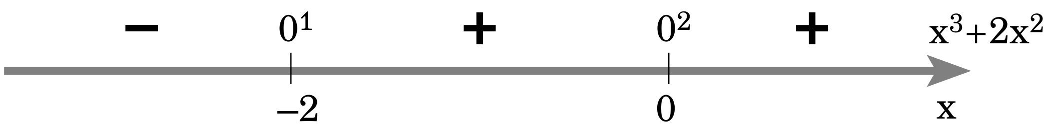
6. Beispiel: $f(x) = x \cdot \operatorname{sgn}(x^2+2x) = \begin{cases} x & \text{für} \quad x<-2 \text{ oder } 0>x \\ 0 & \text{für} \quad x=-2 \text{ oder } x=0 \\ -x & \text{für} \quad -2<x-0 \end{cases}$

Die Nahtstelle –2 ist Sprungstelle,
(–2|0) ist Sprungpunkt;
die Nahtstelle 0 ist keine Sprungstelle,
(0|0) ist Ecke.



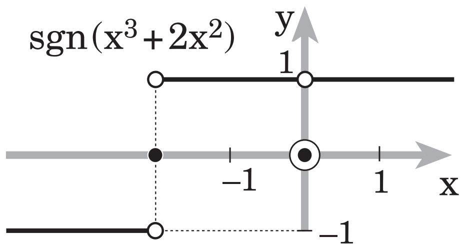
Sprünge können auch nur in eine Richtung gehen.

7. Beispiel: $f(x) = \operatorname{sgn}(x^3 + 2x^2)$
Vorzeichenübersicht des Arguments $t(x) = x^3 + 2x^2 = x^2(x + 2)$



$$f(x) = \operatorname{sgn}(x^3+2x^2) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad -2<x<0 \text{ oder } 0<x \\ 0 & \text{für} \quad x=-2 \text{ oder } x=0 \\ -1 & \text{für} \quad x<-2 \end{cases}$$

–2 und 0 sind Sprungstellen,
(–2|0) und (2|0) sind Sprungpunkte.



Zusammenhang zwischen Betrag- und Vorzeichenfunktion

$$\boxed{\begin{gathered}|x| = x\,\mathrm{sgn}(x)\\ x = |x|\,\mathrm{sgn}(x)\\ \mathrm{sgn}(x) = \frac{|x|}{x} \quad \text{für } x \neq 0\end{gathered}}$$

Oft lassen sich Funktionen überhaupt nur mit Teiltermen beschreiben.
Die Splinefunktionen haben wir schon kennen gelernt. Zur Erinnerung:

8. Beispiel: Der Term g(x) ist aus 4 Teiltermen zusammengesetzt.

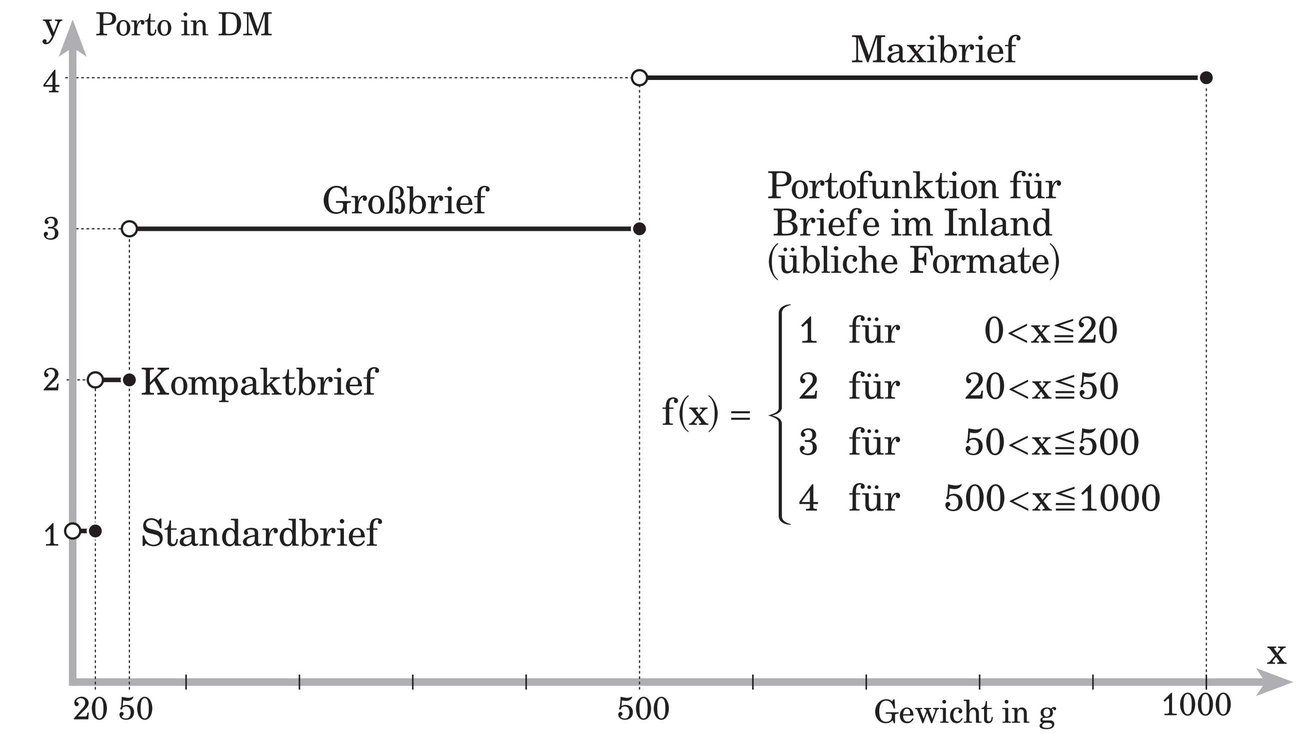
$$g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}(x^3+12x^2+40x+24) & \text{für } -4 \leq x < -2\\ \frac{x}{2}(x^2+3x-2) & \text{für } -2 \leq x < 0\\ -\frac{1}{8}x(3x^2-12x+8) & \text{für } 0 \leq x < 2\\ \frac{1}{4}(x^3-9x^2+26x-20) & \text{für } 2 \leq x \leq 3\end{cases}$$

Im Abschnitt Anwendungen von Kapitel IV ist die zugehörige Interpolationskurve abgebildet.

Portofunktionen

9. Beispiel: Porto der Deutschen Post AG für Briefsendungen im Inland (1996):

Standardbrief	bis 20 g	1 DM
Kompaktbrief	bis 50 g	2 DM
Großbrief	bis 500 g	3 DM
Maxibrief	bis 1000 g	4 DM

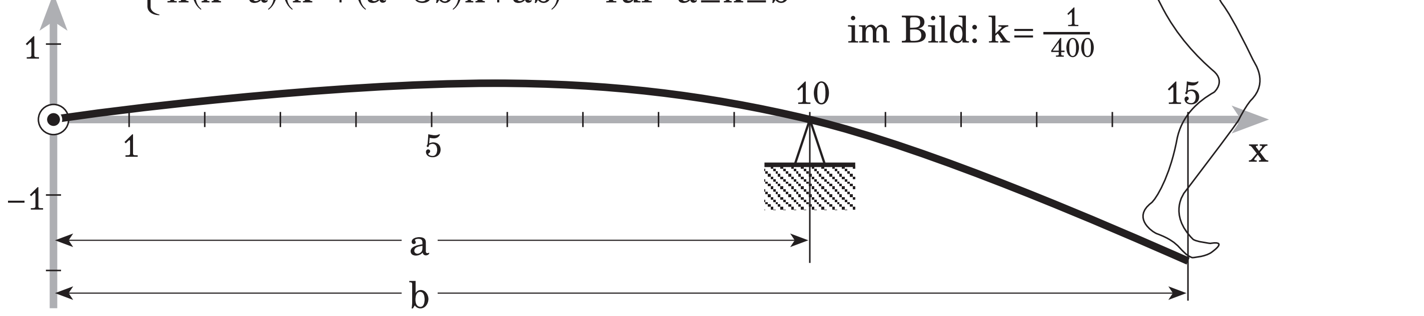


Funktionen von Biegelinien

10. Beispiel: Ein belastetes Brett verformt sich, es nimmt die Gestalt einer »Biegelinie« an. Eine Biegelinie ist Stück einer Polynomkurve oder aus Stücken von Polynomkurven zusammengesetzt. Das Bild zeigt ein Sprungbrett, das am rechten Ende belastet ist; das Sprungbrett liegt in den Punkten (0|0) und (a|0) fest auf.

$$f(x) = \begin{cases} k\,\frac{b-a}{a}\,x(a^2 - x^2) & \text{für } 0 \leqq x < a \\ k(x-a)(x^2+(a-3b)x+ab) & \text{für } a \leqq x \leqq b \end{cases}$$

im Bild: $k = \frac{1}{400}$

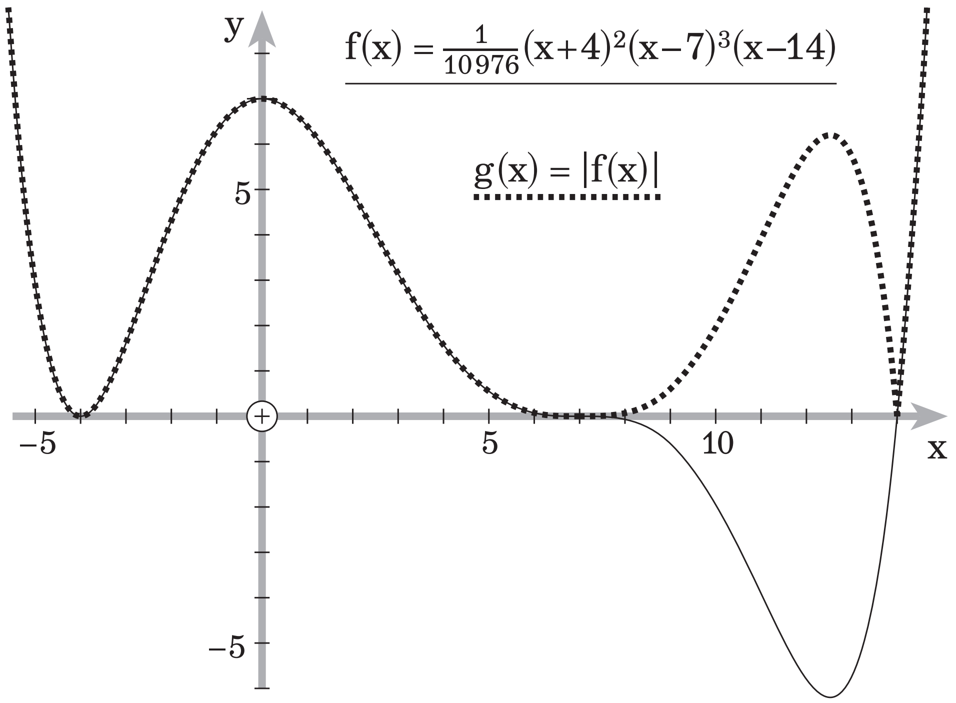


Die Besonderheiten abschnittweise definierter Funktionen liegen in den Nahtstellen: Hier können Sprünge oder Ecken auftreten. Mehr darüber im nächsten Kapitel.

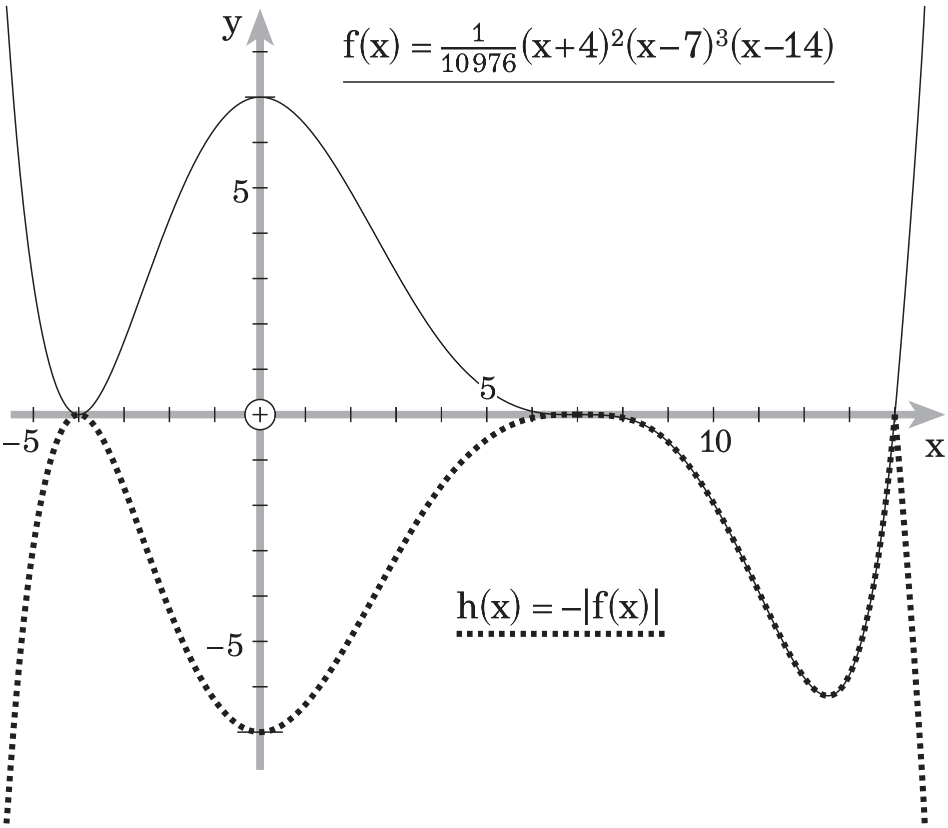
Zum Nachdenken

❶ Betrag und Funktionsterm

Ist der Graph einer Funktion f bekannt, so lässt sich der Graph der Funktion g mit g(x) =|f(x)| sofort zeichnen. Wegen $|g(x)| = \begin{cases} g(x) & \text{für } g(x) \geq 0 \\ -g(x) & \text{für } g(x) < 0 \end{cases}$ bleibt der Kurventeil über der x-Achse erhalten, der darunter liegende Kurventeil ist an der x-Achse nach oben gespiegelt.



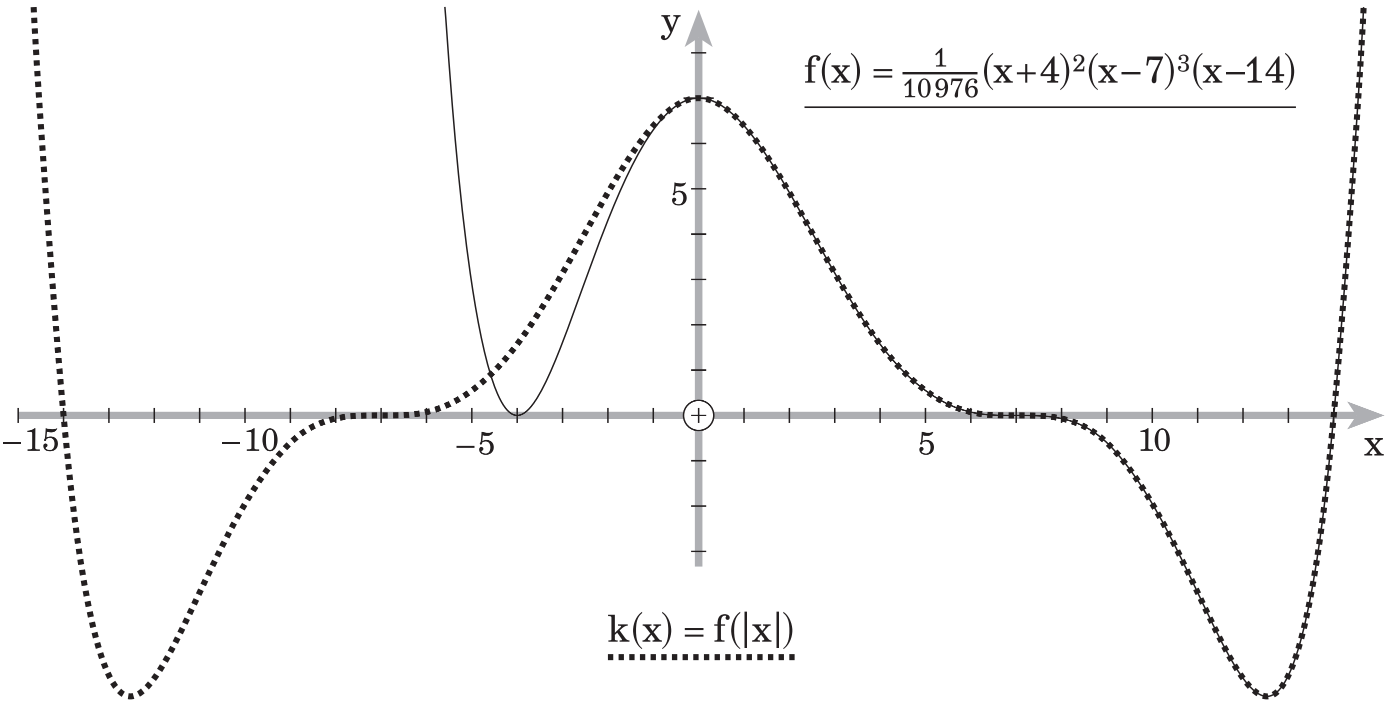
Entsprechend bleibt bei $h(x) = -|f(x)|$ der unter der x-Achse liegende Kurventeil erhalten, und der obere ist nach unten geklappt.



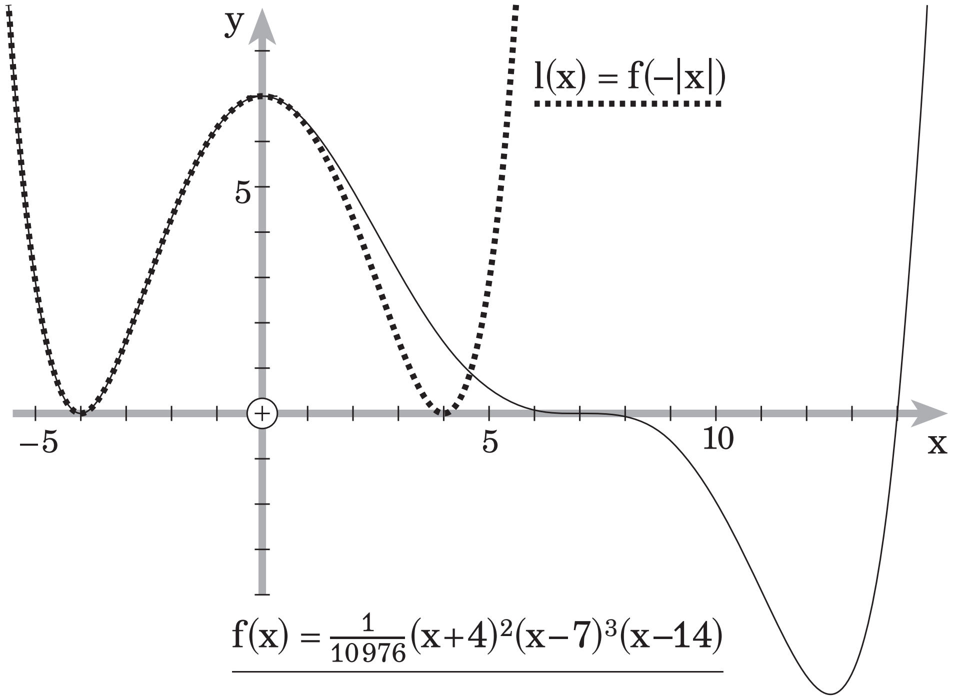
Anders sieht es aus, wenn der Betrag nur aufs Argument wirkt:

$$k(x) = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & \text{für} \quad x \geq 0 \\ f(-x) & \text{für} \quad x < 0 \end{cases}$$

Der Kurventeil links von der y-Achse geht verloren; an seine Stelle tritt der an der y-Achse gespiegelte rechte Kurventeil.

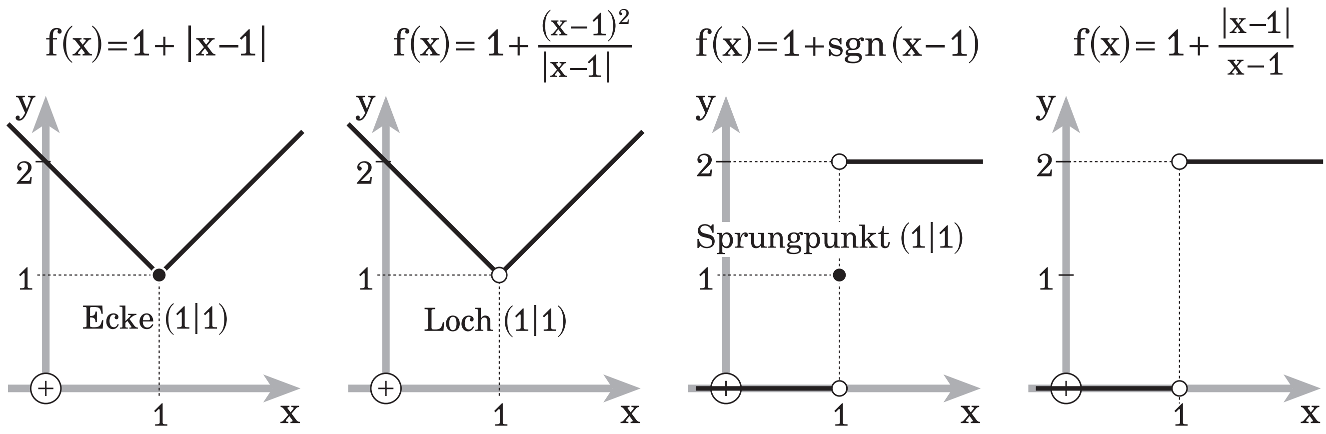


Umgekehrt geht bei l(x) = f(–|x|) der rechte Kurventeil verloren, und an seine Stelle tritt das Spiegelbild des linken.



❷ Ecke und Sprung

Diese Bezeichnungen verwenden wir nur dann, wenn die Funktionen an der jeweiligen Nahtstelle auch definiert sind.



Sprung bei 1,
1 ist Sprungstelle

kein Sprung bei 1,
1 ist Definitionslücke

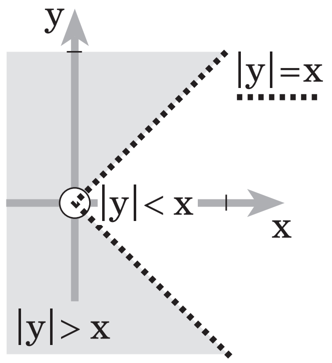
❸ Punktmenge und Betrag

Mit dem Betrag lassen sich auch kompliziertere Punktmengen beschreiben.

|y|= x, Fallunterscheidung:

$y = x$ für $y \geqq 0$

$-y = x$ für $y < 0$



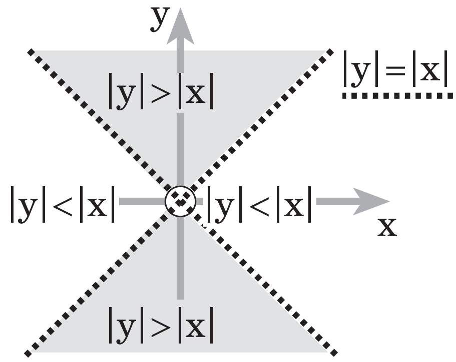
$|y| \leqq |x|$, Fallunterscheidung:

$y \leqq x$ für $x \geqq 0$ und $y \geqq 0$

$y \leqq -x$ für $x < 0$ und $y \geqq 0$

$-y \leqq x \Rightarrow y \geqq -x$ für $x \geqq 0$ und $y < 0$

$-y \leqq -x \Rightarrow y \geqq x$ für $x < 0$ und $y < 0$



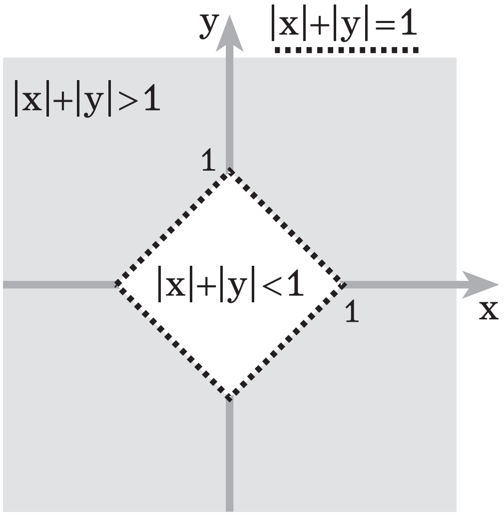
$|x|+|y| = 1$, Fallunterscheidung:

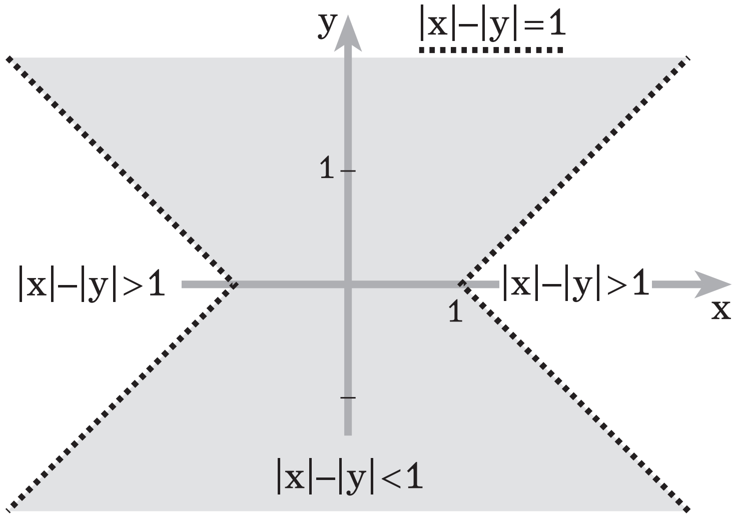
$x + y = 1 \Rightarrow y = -x + 1$ für $x \geqq 0$ und $y \geqq 0$

$x - y = 1 \Rightarrow y = x - 1$ für $x \geqq 0$ und $y < 0$

$-x + y = 1 \Rightarrow y = x + 1$ für $x < 0$ und $y \geqq 0$

$-x - y = 1 \Rightarrow y = -x - 1$ für $x < 0$ und $y < 0$





$|x|-|y| < 1$, Fallunterscheidung:

$x - y < 1 \Rightarrow y > x - 1$ für $x > 0$ und $y > 0$

$x + y < 1 \Rightarrow y < -x + 1$ für $x > 0$ und $y < 0$

$-x - y < 1 \Rightarrow y > -x - 1$ für $x < 0$ und $y > 0$

$-x + y < 1 \Rightarrow y < x + 1$ für $x < 0$ und $y < 0$

Aufgaben

◊1 Zeichne die Graphen der Funktionen mit

a) $f(x) = -|x|$ **b)** $f(x) = 1 - |x|$

c) $f(x) = |x| + 1$ **d)** $f(x) = |x+1|$ **e)** $f(x) = \operatorname{sgn}(x+1)$

2 Zeichne die Graphen der Funktionen mit

a) $f(x) = |2x - 4|$ **b)** $f(x) = -|2x + 4|$

◊3 Zeichne die Graphen der Funktionen mit

a) $f(x) = 4 - 2x$ **b)** $f(x) = |4 - 2x|$

c) $f(x) = 4 - 2|x|$ **•d)** $f(x) = |4 - 2|x||$

4 Zeichne die Graphen der Funktionen mit

a) $f(x) = \frac{1}{2}x - |x|$ **b)** $f(x) = x - \frac{1}{2}|x|$ c) $f(x) = x + \frac{1}{2}|x|$

•5 Zeichne die Graphen der Funktionen mit

a) $f(x) = |x+1| + |x-1|$ **b)** $f(x) = |x+1| - |x-1|$

c) $f(x) = |x| - |x-1| + |x-2|$ **d)** $f(x) = |x + |x+1||$

6 Zeichne die Graphen der Funktionen mit

a) $f(x) = x\,\mathrm{sgn}(x)$ **b)** $f(x) = x\,\mathrm{sgn}(x-1)$ **c)** $f(x) = (x-1)\,\mathrm{sgn}(x)$

7 Zeichne die Graphen der Funktionen mit

a) $f(x) = \mathrm{sgn}\ x$ **b)** $f(x) = \mathrm{sgn}(-x)$ **c)** $f(x) = \mathrm{sgn}\ \frac{1}{x}$

d) $f(x) = \frac{1}{\mathrm{sgn}\ x}$ **e)** $f(x) = \mathrm{sgn}(x^2)$ **f)** $f(x) = (\mathrm{sgn}\ x)^2$

g) $f(x) = (\frac{1}{\mathrm{sgn}\ x})^2$ **h)** $f(x) = (\mathrm{sgn}\ x)^{2000}$ **i)** $f(x) = (\mathrm{sgn}\ x)^{2001}$

8 Zeichne die Graphen der Funktionen mit

a) $f(x) = x\,\mathrm{sgn}(1-x)$ **b)** $f(x) = |x|\mathrm{sgn}(1-x)$

c) $f(x) = x\,\mathrm{sgn}(1-|x|)$ **d)** $f(x) = x\,\mathrm{sgn}|1-x|$

9 Zeichne die Graphen der Funktionen mit

a) $f(x) = \frac{x}{|x|}$ **b)** $f(x) = -\frac{x^2}{|x|}$ **c)** $f(x) = \frac{x-|x|}{x}$

d) $f(x) = \frac{|x|}{x}(x+1)$ **e)** $f(x) = \frac{x|x+1|}{x+1}$

•10 Zeichne die Graphen der Funktionen mit

a) $f(x) = \frac{|x^2-1|}{x^2-1}$ **b)** $f(x) = \frac{|x^2-x|}{x}$ **c)** $f(x) = \frac{x-x^3}{|x^2-1|}$

d) $f(x) = \frac{|4-x^2|}{2+|x|}$ **e)** $f(x) = \frac{|x^2-4|}{|x|-2}$ **f)** $f(x) = \frac{x|x^2-9|}{|x|(x+3)}$

11 Zeichne die Graphen der Funktionen mit

a) $f(x) = (x-1)(x-3)$ **b)** $f(x) = |(x-1)(x-3)|$

c) $f(x) = |x-1|(x-3)$ **d)** $f(x) = (x-1)|x-3|$

e) $f(x) = |x-1||x-3|$ **f)** $f(x) = (|x|-1)(x-3)$

d) $f(x) = (x-1)(|x|-3)$ **e)** $f(x) = (|x|-1)(|x|-3)$

f) $f(x) = |x-1|(|x|-3)$ **g)** $f(x) = (|x|-1)|x-3|$

12 Zeichne die Graphen der Funktionen mit

a) $f(x) = \dfrac{x^3-x^2}{|x|}$ und $f(x) = (x2-x)\ \mathrm{sgn}(x)$

b) $f(x) = \dfrac{x^3-x}{|x|}$ und $f(x) = (x2-1)\ \mathrm{sgn}(x)$

c) $f(x) = \dfrac{|x^4-1|}{x^2-1}$ und $f(x) = (x2+1)\ \mathrm{sgn}(x2-1)$

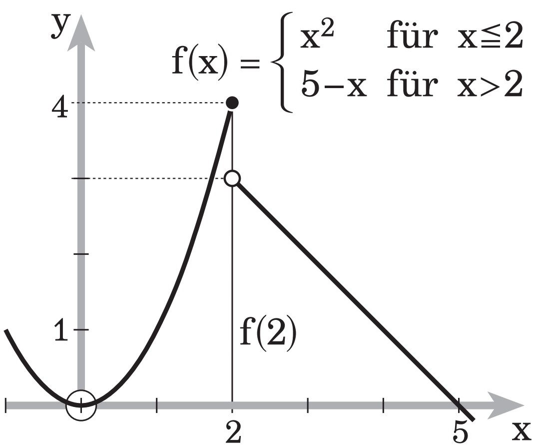
13 Zeichne den Graphen der Portofunktion für »Maxibriefe« in Europa nach den Angaben der Deutschen Post AG:

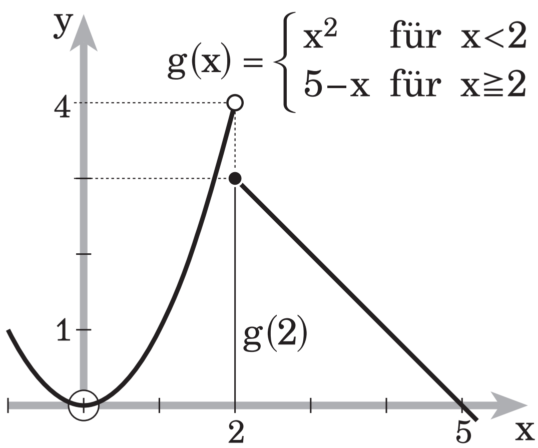
bis	50	g		3 DM
über	50	bis	100 g	5 DM
über	100	bis	250 g	8 DM
über	250	bis	500 g	12 DM
über	500	bis	750 g	16 DM
über	750	bis	1000 g	20 DM
über	1000	bis	1500 g	28 DM
über	1500	bis	2000 g	36 DM

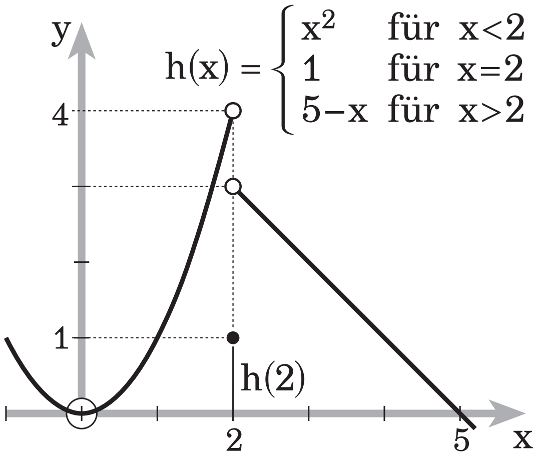
2. Unstetigkeit und Grenzwert bei Polynomen

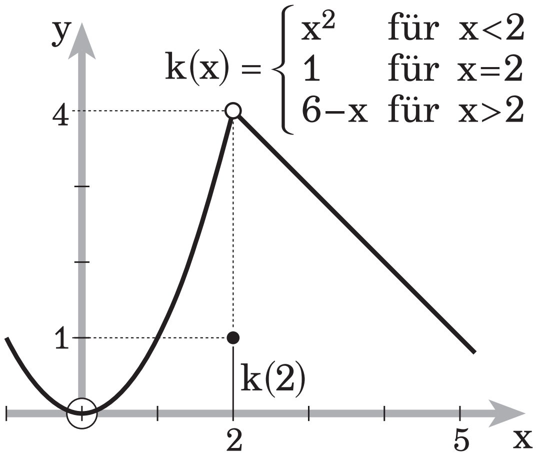
Im vorigen Kapitel haben wir Funktionen kennengelernt, deren Graphen Sprünge haben. Eine solche Funktion ist in einem Intervall überall definiert und ändert an einer Nahtstelle schlagartig den Wert. Vorerst behandeln wir nur Funktionen, die rechts und links von einer Sprungstelle a durch Polynome p(x) dargestellt werden: $f(x) = \begin{cases} p_1(x) & \text{für } x \le a \\ p_2(x) & \text{für } x > a \end{cases}$

Je nach Definition von f gibt es 4 Möglichkeiten für einen Sprung bei a:









Funktionen, die bei a einen Sprung haben, sind unstetig bei a. Rechnerisch zeigt sich die Unstetigkeit, wenn sich beim Einsetzen der Nahtstelle a in die Teilterme $p_1(x)$ und $p_2(x)$ einer der Werte $p_1(a)$ oder $p_2(a)$ vom Funktionswert f(a) unterscheidet. Für das Einsetzen in Polynome verwenden wir die lim-Schreibweise; diese werden wir in VII. 3 für allgemeine Funktionen präzisieren. Ein Größer- oder Kleiner-Zeichen über dem Pfeil gibt an, welches Intervall gemeint ist; in den zugehörigen Teilterm setzt man die Nahtstelle a ein.

$p_1(a)$ oder $p_2(a)$ sind einseitige Grenzwerte:

Der Wert $p_1(a)$ heißt **linksseitiger Grenzwert** von f(x) bei Annäherung (von links) an a; entsprechend heißt $p_2(a)$ **rechtsseitiger Grenzwert**:

linksseitiger Grenzwert $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} a} f(x) = p_1(a)$

rechtsseitiger Grenzwert $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} a} f(x) = p_2(a)$

> Definition: f heißt **unstetig an einer Nahtstelle a**, wenn f(a) existiert und einer der beiden einseitigen Grenzwerte von f(x) ungleich f(a) ist.

Jede der Funktionen f, g, h und k ist unstetig bei 2:

$f(2) = p_1(2) = 4$

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 2} f(x) = p_1(2) = 4$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2} f(x) = p_2(2) = 3 \neq f(2)$

$\Rightarrow$ f ist unstetig bei 2.

$g(2) = p_2(2) = 3$

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 2} g(x) = p_1(2) = 4 \neq g(2)$

$\Rightarrow$ g ist unstetig bei 2.

$\left[\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2} g(x) = p_2(2) = 3\right]$

$h(2) = 1$

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 2} h(x) = p_1(2) = 4 \neq h(2)$

$\Rightarrow$ h ist unstetig bei 2.

$\left[\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2} h(x) = p_2(2) = 3\right]$

$k(2) = 1$

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 2} k(x) = p_1(2) = 4 \neq k(2)$

$\Rightarrow$ k ist unstetig bei 2.

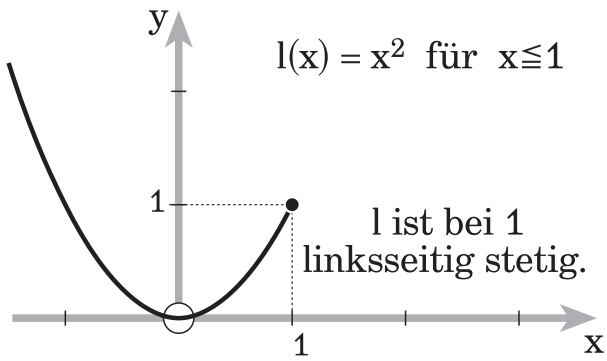
$\left[\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2} k(x) = p_2(2) = 4\right]$

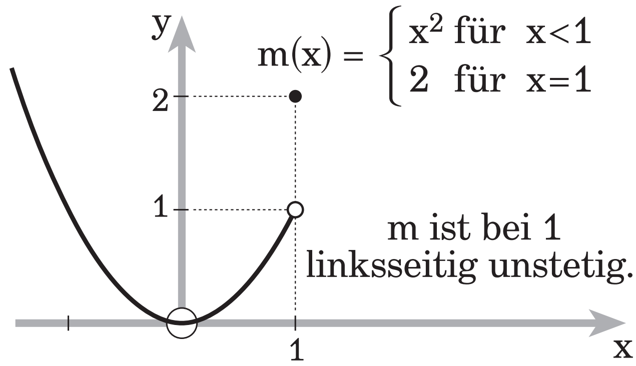
Anschaulich äußert sich die Unstetigkeit einer Funktion f bei a darin, dass man beim Zeichnen der Kurve den Stift bei a absetzen muss, obwohl f(a) definiert ist. Dagegen lässt sich die Kurve einer stetigen Funktion in einem Zug zeichnen.

> Definition: f heißt **stetig an einer Nahtstelle a**,
> wenn gilt $f(a) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} a} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} a} f(x)$

In Kapitel VII.3 zeigen wir, dass jede Polynomfunktion stetig ist. Weil Polynomfunktionen stetig sind, darf man beim Berechnen von $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} a} f(x)$, $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} a} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ im Polynom f(x) das x durch a ersetzen.

Bisher haben wir angenommen, dass a im Innern von D_f liegt. Die Definitionen gelten aber auch dann, wenn a eine Randstelle von D_f ist. In diesem Fall gibt es bloß **einen** einseitigen Grenzwert:

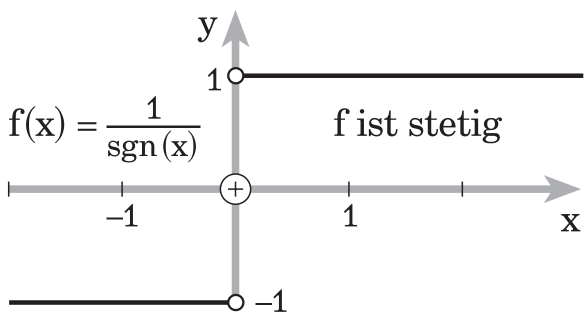


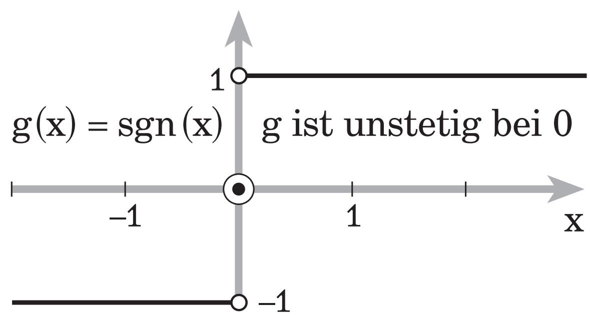


Beachte: Stetigkeit und Unstetigkeit sind Eigenschaften einer Funktion. Deshalb hat es nur dann Sinn, von Stetigkeit oder Unstetigkeit einer Funktion an einer Stelle zu reden, wenn die Funktion dort definiert ist. An Definitionslücken dagegen ist es sinnlos, von Stetigkeit oder Unstetigkeit zu reden, weil dort die Funktion gar nicht existiert.

Sagt man von einer Funktion f, dass sie stetig ist, dann ist immer gemeint:

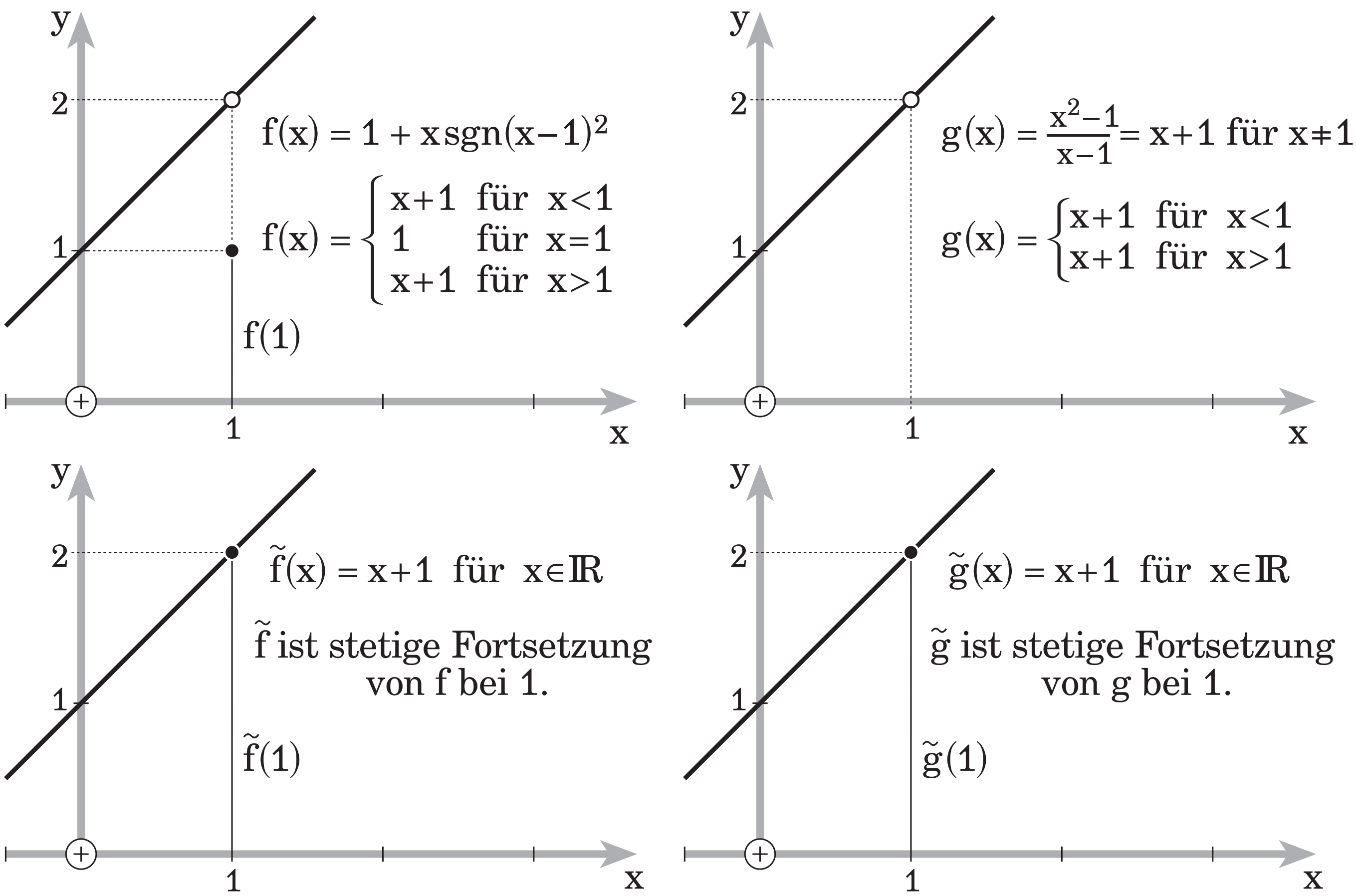
f ist an jeder Stelle $a \in D_f$ stetig. So ist f mit $f(x) = \frac{1}{\mathrm{sgn}(x)}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ eine stetige Funktion. Dagegen ist g mit $g(x) = \mathrm{sgn}(x)$, $D_f = \mathbb{R}$ eine bei 0 unstetige Funktion.





StetigeFortsetzung

Bei gewissen Funktionen lässt sich eine Unstetigkeitsstelle a oder Definitionslükke a beheben: Man definiert für diese Nahtstelle a einen Funktionswert so, dass die so erzeugte Funktion dort stetig ist. Die neue Funktion heißt **stetige Fortsetzung** (oder stetige Ergänzung). Eine Funktion und ihre stetige Fortsetzung unterscheiden sich nur an einer Stelle a. Mit $\tilde{f}$ bezeichnen wir die stetige Fortsetzung einer Funktion f.



1 ist »stetig behebbare Unstetigkeitsstelle« von f
1 ist »stetig behebbare Definitionslücke« von g

Der wichtigste Fall der stetigen Fortsetzung kommt bei Bruchtermen vor:
Wenn man den Faktor kürzen kann, der für die Definitionslücke verantwortlich ist, dann ist der gekürzte Term zugleich auch Term der stetigen Fortsetzung, siehe Funktion g im Bild oben.
Nicht alle Unstetigkeitsstellen oder Definitionslücken sind stetig behebbar, wie die Beispiele $g(x) = \mathrm{sgn}(x)$ und $f(x) = \frac{1}{\mathrm{sgn}(x)}$ zeigen.

Grenzwert

Mit der stetigen Fortsetzung definieren wir den Grenzwert einer Funktion an einer Stelle a.

Definition:	Eine Funktion f hat bei a den Grenzwert b genau dann, wenn sie nach Ausschluss eines eventuell vorhandenen Funktionswerts bei a eine stetige Fortsetzung $\tilde{f}$ mit $\tilde{f}(a) = b$ hat.

Man unterscheidet 3 Fälle:

I f ist stetig bei a $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Beispiel: $\lim\limits_{x \to 1}(x+1) = 2$

II f ist bei a unstetig oder nicht definiert, f ist durch $\tilde{f}$ stetig ergänzbar bei a

$\Rightarrow$ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \tilde{f}(a)$

Beispiele: a) $\lim\limits_{x \to 1}[1 + x \cdot \operatorname{sgn}(x - 1^2)] = \lim\limits_{x \to 1}(x+1) = 2$

b) $\lim\limits_{x \to 1}\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right) = \lim\limits_{x \to 1}(x+1) = 2$

III f ist bei a unstetig oder nicht definiert, aber bei a nicht stetig ergänzbar

$\Rightarrow$ $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existiert nicht

Beispiel: $\lim\limits_{x \to 1} \operatorname{sgn}(x)$ existiert nicht,
weil die sgn-Funktion bei 0 nicht stetig ergänzbar ist.

Im Fall III existiert der Grenzwert zwar nicht, wohl aber die beiden einseitigen Grenzwerte, sie sind allerdings verschieden:

linksseitig: $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \operatorname{sgn}(x) = -1$ rechtsseitig: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \operatorname{sgn}(x) = 1$

Allgemein gilt: Ein Grenzwert existiert, wenn die beiden einseitigen Grenzwerte existieren und gleich sind $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} a} f(x)$

Aufgaben

◊**1** Untersuche auf Stetigkeit und zeichne den Graphen

a) $f(x) = \begin{cases} 3 - 2x & \text{für } x \leq 1 \\ 5x - 4 & \text{für } x > 1 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{für } x < -1 \\ -x - 1 & \text{für } x \geq -1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{für } x \leq -1 \\ 1 - x^2 & \text{für } x > -1 \end{cases}$ **d)** $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{für } x < 0 \\ x^2 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{für } x < 1 \\ x^2 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$

◊2 Untersuche auf Stetigkeit und zeichne den Graphen

a) $f(x) = |x| - 1$ **b)** $f(x) = x - |x|$

c) $f(x) = x^2 \operatorname{sgn}(1-x)$ **d)** $f(x) = (1-x)\operatorname{sgn}(x^2)$

d) $f(x) = 1 - x \cdot \operatorname{sgn}(x^2)$ **e)** $f(x) = (1 - x \cdot \operatorname{sgn}(x))^2$

•3 Untersuche, ob f bei 6 stetig ist, und gib – falls möglich – die stetige Fortsetzung $\tilde{f}$ an. Zeichne G_f.

a) $f(x) = \frac{1}{2}x + 4$ **b)** $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 48}{2x - 12}$

c) $f(x) = \frac{x^2 + 2|x-6| - 36}{2x - 12}$ **d)** $f(x) = \frac{1}{2}x + 2 + 2\operatorname{sgn}(x-6)^2$

e) $f(x) = \frac{1}{2}x + 1 + \operatorname{sgn}(x-6) + 2\operatorname{sgn}(x-6)^2$

•4 Bestimme k so, dass f an der Nahtstelle stetig ist.

a) $f_k(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{für } x < 1 \\ kx - 2 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$ **b)** $f_k(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{für } x < 0 \\ k^2 - x^2 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$

c) $f_k(x) = (x+1)\operatorname{sgn}(x-k)$

5 Entscheide, ob die Grenzwerte für $x \to a$, $x \overset{<}{\to} a$ und $x \overset{>}{\to} a$ existieren, und berechne sie gegebenenfalls.

a) $f(x) = \frac{x}{x}$, $a = 0$ **b)** $f(x) = \frac{|x|}{x}$, $a = 0$ **c)** $f(x) = -\frac{x^2}{|x|}$, $a = 0$

d) $f(x) = \frac{x-2}{2-x}$, $a = 2$ **e)** $f(x) = \frac{x - |x|}{x}$, $a = 0$ **f)** $f(x) = \frac{x - \operatorname{sgn}(x)}{\operatorname{sgn}(x)}$, $a=0$

g) $f(x) = \frac{|x^2 - 1|}{|x| - 1}$, $|a| = 1$

•6 Berechne

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 + x^3}{x^2}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$ **c)** $\lim\limits_{x \to -4} \frac{16 + x^2 + 8x}{-x - 4}$

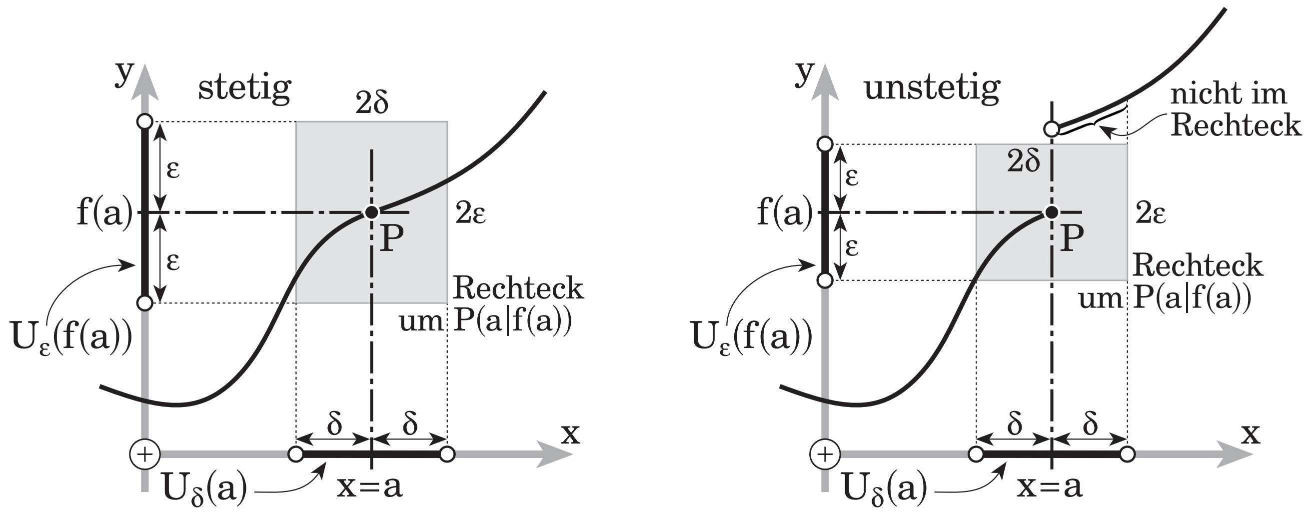
d) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{8x - x^2 - 12}{2x - 4}$ **e)** $\lim\limits_{x \to 3} \frac{4x^3 - 24x^2 + 36x}{3x^2 - 9x}$

7 Berechne

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{x^2 - 3x + 2}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{x^2 - 3x + 2}$ **c)** $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{x^2 - 3x + 2}$

3. Stetigkeit und Grenzwert

Will man Stetigkeit auch bei allgemeinen Funktionen untersuchen, so muss man ihre Definition präzisieren. Die Definition der Stetigkeit an einer Stelle a beruht auf einer anschaulichen Vorstellung: Man denkt sich den Graphenpunkt (a|f(a)) als Mittelpunkt eines Rechtecks, dessen Seiten parallel sind zu den Koordinatenachsen. Wenn die Höhe des Rechtecks 2ε beliebig klein sein kann, und trotzdem alle Graphenpunkte über einer passenden Rechteckbreite 2δ im Rechteck liegen, dann ist f stetig bei a.



Man formuliert diese Vorstellung algebraisch:

Stetigkeit an einer Stelle

> Definition: Eine Funktion f heißt stetig bei a,
> wenn es zu jedem $\varepsilon>0$ eine δ-Umgebung $U_\delta(a)$ von a so gibt,
> dass für alle x dieser Umgebung gilt: $f(x) \in U_\varepsilon(f(a))$.
> Andere Formulierung:
> Eine Funktion f heißt stetig bei a, falls es
> zu jedem $\varepsilon>0$ ein $\delta>0$ so gibt,
> dass für alle x mit $|x-a|<\delta$ gilt: $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$.

Die Definition setzt stillschweigend voraus, dass f definiert ist in $U_\delta(a)$.

Stetigkeit in einem Intervall

> Definition: Eine Funktion f heißt stetig in einem Intervall I,
> wenn f stetig ist für alle x dieses Intervalls.

11. Beispiel: Stetigkeit einer affinen Funktion
f mit $f(x) = 2x - 1$ ist stetig bei a=2. Beweis:
$|f(x) - f(a)| = |(2x-1) - 3| = |2x-4| = 2|x-2| < 2\delta$
Zu jedem $\varepsilon>0$ wählt man $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Für alle x mit $|x-2|<\delta$
gilt dann: $|f(x) - f(2)| < \varepsilon$ $(=2\delta)$. Also ist f stetig bei 2.

Dieser Nachweis ist noch verhältnismäßig harmlos. Aber schon bei der einfachsten quadratischen Funktion sind raffinierte Abschätzungen nötig.

12. Beispiel: f mit $f(x)=x^2$ ist stetig bei 2.   Beweis:

Zu jedem $\varepsilon>0$ müssen wir ein $\delta>0$ so bestimmen, dass für $|x-2|<\delta$ gilt: $|f(x)-4|<\varepsilon$.

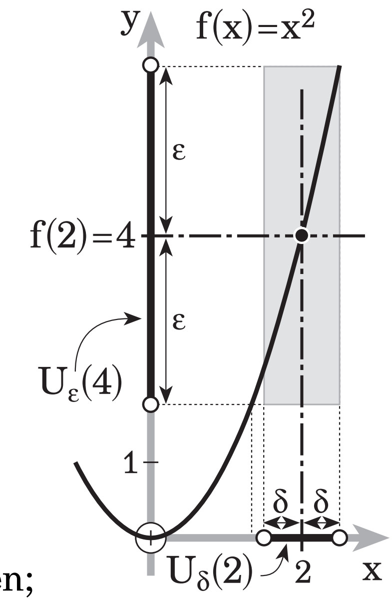
Überlegung:

$$\begin{aligned}|f(x)-f(2)| = |x^2-4| = |x-2||x+2| &< \delta\cdot|x-2+4| \\ &\leqq \delta\cdot(|x-2|+4) \\ &< \delta\cdot(\delta+4)\end{aligned}$$

Damit $|f(x)-f(2)|<\varepsilon$ gilt, setzt man $\delta(\delta+4)=\varepsilon$ und löst nach δ auf:

$$\begin{aligned}\delta^2+4\delta+4 &= \varepsilon+4 \\ (\delta+2)^2 &= \varepsilon+4 \\ |\,\delta+2\,| &= \sqrt{\varepsilon+4} \\ (\text{wegen } \delta>0 \quad 0<(\delta+2)) &= \sqrt{\varepsilon+4} \\ 0<\delta &= \sqrt{\varepsilon+4}-2\end{aligned}$$

Zu jedem $\varepsilon>0$ kann man $\delta = \sqrt{\varepsilon+4}-2$ wählen; dann gilt für $x\in U_\delta(2)$: $|f(x)-f(2)|<\varepsilon$ q.e.d.



Mit der Stetigkeit definiert man auch den Grenzwert an einer Stelle a

> Definition: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ ist gleichbedeutend mit:
> f ist bei a stetig mit $f(a)=b$ oder
> f ist bei a stetig ergänzbar mit $\tilde{f}(a)=b$.
> Andere Formulierung:
> $$\lim_{x\to a} f(x) = b \;:\Longleftrightarrow\; \tilde{f} \text{ mit } \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x\neq a \\ b & \text{für } x=a \end{cases} \text{ ist stetig bei a.}$$

Genau so haben wir es bisher mit der Polynomfunktion gemacht – Beispiele:

$\lim\limits_{x\to 3}(x^2-4x) = 3^2-4\cdot3 = -3$ bedeutet: f mit $f(x) = x^2 - 4x$ ist stetig bei 3.

$\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-4x}{x-4} = \lim\limits_{x\to 4} x = 4$ bedeutet:

f mit $f(x) = \frac{x^2-4x}{x-4}$ ist bei 4 stetig ergänzbar durch $\tilde{f}$ mit $\tilde{f}(x) = x$.

Für Grenzwerte im Unendlichen muss man die Definition verändern.

> Definition: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$ ist gleichbedeutend mit:
> Zu jedem $\varepsilon>0$ gibt es eine reelle Zahl r so, dass für alle $x>r$ gilt: $|f(x)-b|<\varepsilon$.

Das entspricht der Stetigkeitsdefinition, wenn man das Intervall $]r;\infty[$ versteht als »δ-Umgebung der Stelle ∞«.
Für $x \to -\infty$ gilt entsprechend: Zu jedem $\varepsilon>0$ gibt es eine reelle Zahl r so, dass für alle $x<r$ gilt: $|f(x)-b| < \varepsilon$.

13. Beispiel: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1+2x}{1+x} = 2$ — Beweis:

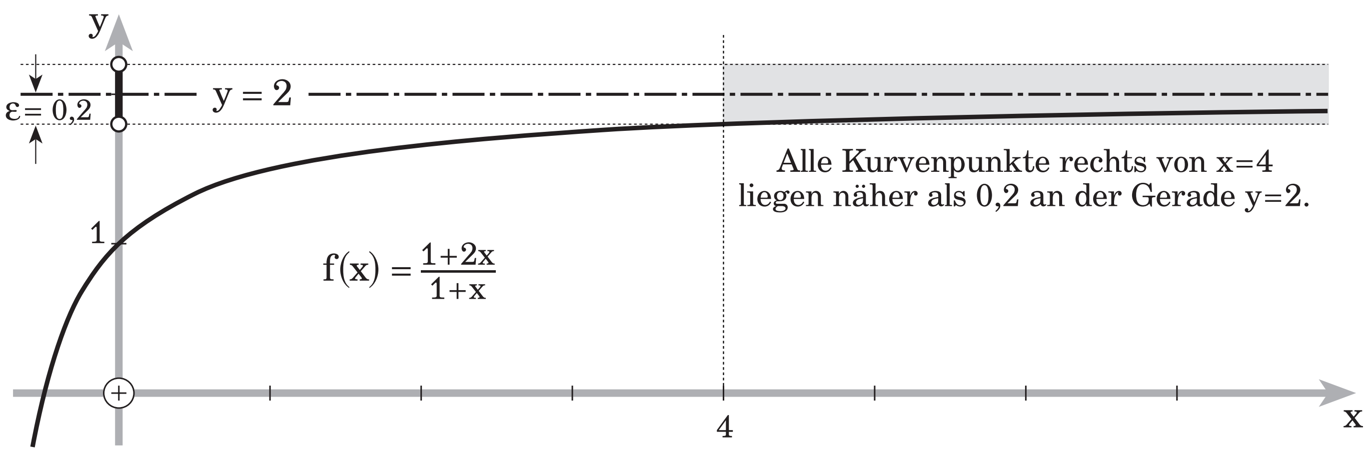
$$|f(x)-2| = \left|\frac{1+2x}{1+x}-2\right| = \frac{1}{|1+x|}$$

Bedingung: $\frac{1}{|1+x|} < \varepsilon \Rightarrow |1+x| > \frac{1}{\varepsilon}$

wegen $x \to +\infty$ können wir $x>0$ annehmen: $1+x > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow x > \frac{1}{\varepsilon} - 1$

$r = \frac{1}{\varepsilon} - 1$ erfüllt die Bedingung der Definition.

Soll sich der Funktionswert vom Grenzwert zum Beispiel um weniger als 0,01 unterscheiden, so muss gelten: $x > \frac{1}{0{,}01} - 1$, also $x>99$.



Einseitige Stetigkeit – einseitiger Grenzwert

Beschränkt man sich beim Definieren von Stetigkeit und Grenzwert auf »halbe δ-Umgebungen von a«, das heißt $a<x<a+\delta$ (rechtsseitig) oder $a-\delta<x<a$ (linksseitig), dann kommt man zu den Begriffen »einseitige Stetigkeit« und »einsei-tiger Grenzwert«. So ist die Wurzelfunktion rechtsseitig stetig bei 0, und es gilt: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \sqrt{x} = 0$

Verknüpfung stetiger Funktionen

Mit den 4 Grundrechenarten lassen sich aus den Termen f(x), g(x) der stetigen Funktionen f und g neue Funktionsterme bilden. Bei geeigneter Definitionsmenge gilt dann für die

– Addition:	Summenfunktion	$f+g$	mit	$s(x) = f(x) + g(x)$
– Subtraktion:	Differenzfunktion	$f-g$	mit	$d(x) = f(x) - g(x)$
– Multiplikation:	Produktfunktion	$f\cdot g$	mit	$p(x) = f(x)\cdot g(x)$
– Division:	Quotientenfunktion	$f:g$	mit	$q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Es gelten die **Stetigkeitssätze**

Sind f und g stetig an einer Stelle a, dann sind dort auch stetig:
die Summenfunktion $f+g$, die Differenzfunktion $f-g$
die Produktfunktion $f \cdot g$, die Quotientenfunktion $f:g$.

Ist f stetig bei a und g bei f(a),
dann ist auch die Schachtelfunktion $g \circ f$ bei a stetig.
Mit diesen Sätzen lässt sich die Stetigkeit komplizierter Funktionen zurückführen auf die Stetigkeit einiger elementarer Funktionen.

Die Stetigkeit von Funktionen zu beweisen, ist meist ein recht mühseliges Geschäft! Die Beweise fußen auf der Definition – für den einfachsten Fall der Summenfunktion geht das so:
Sind f und g stetig bei a, dann gibt es für jedes α eine δ-Umgebung um a so, dass für beide Funktionen für alle x dieser Umgebung gilt:

$$f(a) - \alpha < f(x) < f(a) + \alpha$$
$$g(a) - \alpha < g(x) < g(a) + \alpha$$

Addition: $$\underbrace{f(a) + g(a)}_{s(a)} - 2\alpha < \underbrace{f(x) + g(x)}_{s(x)} < \underbrace{f(a) + g(a)}_{s(a)} + 2\alpha$$

Zu $\alpha = {}^{\varepsilon}\!/2$ findet man also immer $U_\delta(a)$ so, dass $s(a) - \varepsilon < s(x) < s(a) + \varepsilon$ gilt.
Also ist s stetig bei a.

Die Polynomfunktion p ist stetig in $\mathbb{R}$.

Die konstante Funktion f mit $f(x)=k$ ist stetig in $\mathbb{R}$.
Die identische Funktion g mit $g(x)=x$ ist stetig in $\mathbb{R}$. (Siehe Aufgabe 1)
Also ist die Polynomfunktion p mit $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ in $\mathbb{R}$ stetig, weil sich p(x) mit den Grundrechenarten erzeugen lässt.

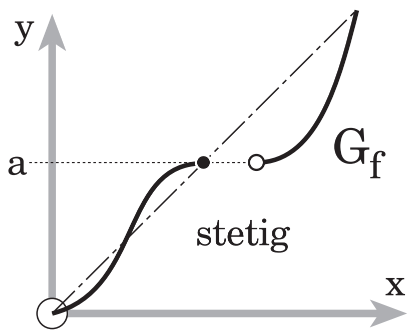
Die rationale Funktion r ist stetig in D_r.

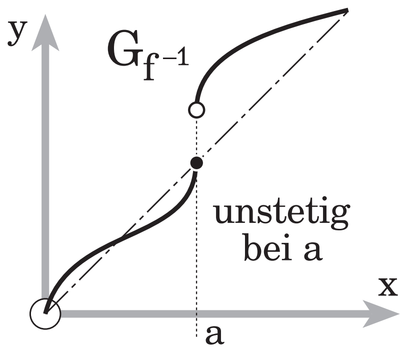
Der Term r(x) ist ein Quotient von Polynomen;
z(x) ist das Polynom im Zähler, n(x) ist das Polynom im Nenner:

$$r(x) = \frac{z(x)}{n(x)}, \quad D_r = \mathbb{R} \setminus \{x \mid n(x)=0\}$$

r ist als Quotient stetiger Funktionen stetig.

Die Umkehrfunktion f^{-1} einer stetigen Funktion muss nicht stetig sein:





Erfreulicherweise ist die Umkehrfunktion der stetigen Quadratfunktion stetig:

Die Wurzelfunktion w mit $w(x)=\sqrt{x}$ ist stetig in $\mathbb{R}$.

δ-Umgebung von a: $|x-a|<\delta$

$$|w(x)-w(a)| = |\sqrt{x}-\sqrt{a}| = \left|\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\right|$$

$$= \frac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} < \frac{\delta}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} < \frac{\delta}{\sqrt{a}}$$

Für $\delta = \varepsilon\sqrt{a}$ liegen die Funktionswerte für $x \in U_\delta(a)$ in $U_\varepsilon(w(a))$.
Also ist w stetig. Bei 0 ist w rechtsseitig stetig.

Weil die Verkettung stetiger Funktionen eine stetige Funktion ergibt, ist damit zum Beispiel auch eine Funktion f stetig mit $f(x) = x\sqrt{\frac{x^2+1}{x-1}}$.

Die trigonometrischen Funktionen sind stetig.

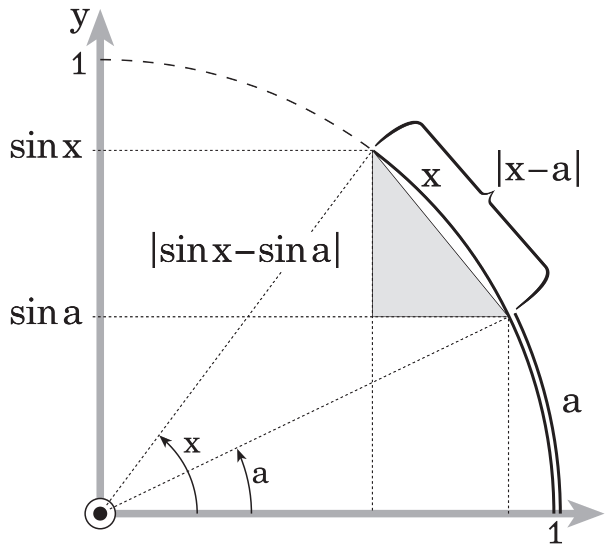
Am Einheitskreis überlegt man sich, dass die Differenz der Sinuswerte $\sin(x)$ und $\sin(a)$ dem Betrag nach immer kleiner ist als der Betrag der Differenz von x und a. Das graue Dreieck im Bild zeigt, dass die Kathete $|\sin x - \sin a|$ kürzer ist als die Hypotenuse und diese kürzer als der Bogen $|x-a|$. Also gilt

$$|\sin x - \sin a| < |x-a| < \delta.$$

Weil $|\sin x - \sin a|$ kleiner als ε sein soll, kann man $\delta = \varepsilon$ wählen. Damit ist

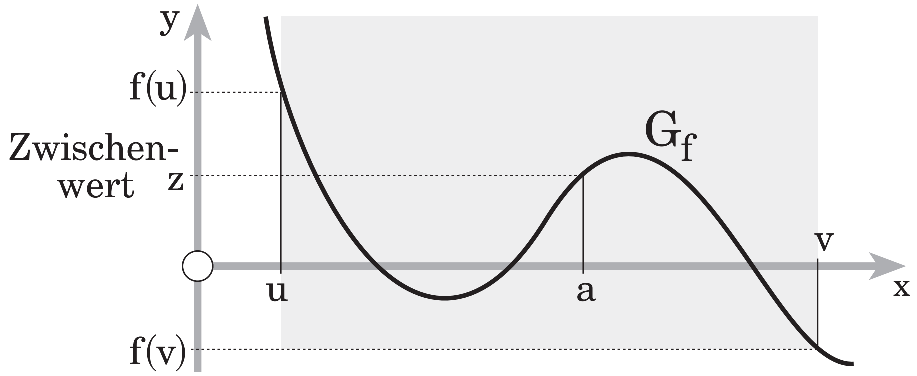
$$|\sin x - \sin a| < \varepsilon \text{, falls } |x-a|<\varepsilon.$$

Die Sinusfunktion ist also stetig.



Wegen $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2}-x)$ und $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ sind auch die Kosinus- und Tangensfunktion stetig.

Der Graph einer stetigen Funktion f hat keine Sprünge. Ist f definiert auf einem Intervall $[u;v]$, dann muss deshalb jeder Wert zwischen f(u) und f(v) mindestens einmal als Funktionswert vorkommen.



Das ist der **Zwischenwertsatz** von Bernard BOLZANO, einem böhmischen Priester, Philosophen und Mathematiker (Prag 1781 bis 1848 Prag). 1817 hat BOLZANO auch die wichtigste Anwendung seines Satzes angegeben: » … dass zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege. « In unserer Sprache ist das der

Nullstellensatz
Ist eine Funktion f definiert und stetig auf [u;v] und f(u)<0<f(v), so gibt es zwischen u und v mindestens eine Nullstelle von f.
Beim Beweis des Zwischenwertsatzes braucht man eine wichtige Eigenschaft der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen. Richard DEDEKIND hat sie erst 1872 in voller Schärfe formuliert. Diese Eigenschaft ist die

Vollständigkeit der Menge der reellen Zahlen

Anschauliche Deutung: Die reellen Zahlen füllen die Zahlengerade lückenlos. Im Unterschied dazu liegen die rationalen Zahlen zwar auch beliebig dicht, lassen aber noch Lücken für die irrationalen Zahlen. Für die Menge der rationalen Zahlen gilt der Zwischenwertsatz nicht, Beispiel:
f mit $f(x) = x^2-2$ ist stetig auf [1;2] und es gilt
$f(1) = -1 < 0 < 2 = f(2)$. Trotzdem hat f keine rationale Nullstelle zwischen 1 und 2.

Wir haben gesehen, dass der Grenzwert $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ in engem Zusammenhang steht mit der Stetigkeit der Funktion f an der Stelle a. Deshalb lassen sich die Stetigkeitssätze auch als **Grenzwertsätze** formulieren.

Bei den 4 Grundrechenarten setzen wir voraus, dass f und g bei a einen Grenzwert haben. Dann gilt:

Summen-Grenzwert $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to a}f(x)+\lim\limits_{x\to a}g(x)}$

Differenz-Grenzwert $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a}(f(x)-g(x)) = \lim\limits_{x\to a}f(x)-\lim\limits_{x\to a}g(x)}$

Produkt-Grenzwert $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}g(x)}$

Quotienten-Grenzwert $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a}(f(x):g(x)) = \lim\limits_{x\to a}f(x):\lim\limits_{x\to a}g(x)}$, falls $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$

Beim Verketten setzen wir voraus, dass $\lim\limits_{x\to a} g(x) = z$ existiert und f bei z stetig ist. Dann gilt:

Schachtel-Grenzwert: $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a}f(g(x)) = f(\lim\limits_{x\to a}g(x))}$

Der Sinn dieser Sätze besteht darin, komplizierte Grenzwert-Berechnungen auf einfache zurückzuführen.

14. Beispiel: $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{\sin x}{x-1}-\frac{\sin x}{x^2-x}\right)$

Den Satz zum Differenz-Grenzwert dürfen wir nicht anwenden, weil die Grenzwerte $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{\sin x}{x-1}\right)$ und $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{\sin x}{x-1}\right)$ nicht existieren.

Wir vereinfachen den Term für $x \neq 0$ und $x \neq 1$

$$\frac{\sin x}{x-1}-\frac{\sin x}{x^2-x}=\frac{x\cdot\sin x-\sin x}{x(x-1)}=\frac{(x-1)\sin x}{x(x-1)}=\frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sin x}{x-1}-\frac{\sin x}{x^2-x}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

2 Möglichkeiten bieten sich an:

Stetigkeit $\frac{\sin x}{x}$ ist Term einer bei 1 stetigen Funktion.

Also setzt man x=1 ein: $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{\sin 1}{1}=\sin 1$

Satz zum Quotienten-Grenzwert

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{\lim\limits_{x\to 1}\sin x}{\lim\limits_{x\to 1}x}=\frac{\sin 1}{1}=\sin 1$$

15. Beispiel: $\lim\limits_{x\to 0,5}\sqrt{x^9(x-1)^{11}}$

Wieder gibt es 2 Möglichkeiten:

Stetigkeit Der Wurzelterm ist Term einer bei 0,5 stetigen Funktion. Also setzt man ein:

$$\lim_{x\to 0,5}\sqrt{x^9(x-1)^{11}}=\sqrt{0{,}5^9\cdot 0{,}5^{11}}=\sqrt{0{,}5^{20}}=0{,}5^{10}=\frac{1}{1024}$$

Satz zum Schachtel-Grenzwert

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0,5}\sqrt{x^9(x-1)^{11}} &= \sqrt{\lim_{x\to 0,5}(x^9(x-1)^{11})}\\ &= \sqrt{(\lim_{x\to 0,5}x^9)(\lim_{x\to 0,5}(x-1)^{11})}\\ &= \sqrt{(\lim_{x\to 0,5}x)^9(\lim_{x\to 0,5}(x-1))^{11}}\\ &= \sqrt{0{,}5^9\cdot 0{,}5^{11}}=\frac{1}{1024}\end{aligned}$$

Grenzwert im Unendlichen

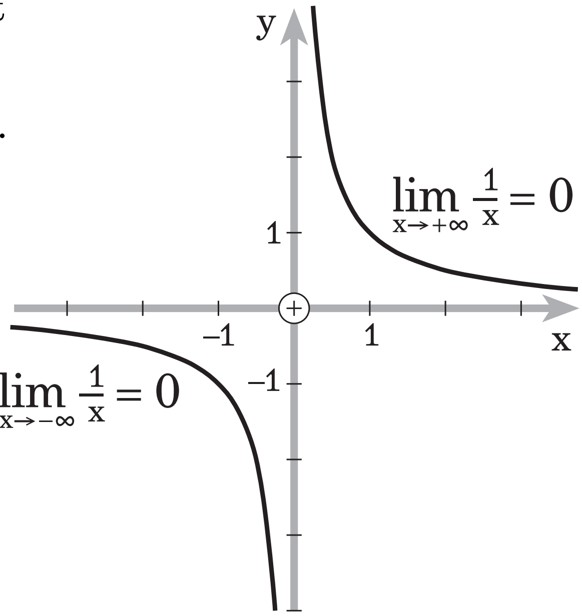
Die Grenzwertsätze gelten auch für einseitige Grenzwerte und für Grenzwerte im Unendlichen der Form $\lim\limits_{x\to+\infty}\ldots$ und $\lim\limits_{x\to-\infty}\ldots$. Kennt man den Grenzwert für $x\to+\infty$, dann lässt sich dies mit der ε-δ-Methode nachweisen (••Seite 180). Wie aber findet man solche Grenzwerte?

Bei Polynomen entscheidet das der Koeffizient der höchsten x-Potenz (siehe II 2.1).
Sonst genügt es zu wissen, dass $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ ist.
Der Beweis ist einfach:

Für $x>1/\varepsilon$ ist $1/x<\varepsilon$.
Für $r=1/\varepsilon$ gilt also
ist $x>r$, so ist $|f(x)-0| < \varepsilon$.
Analog ist $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

Zusammenfassend schreibt man:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = \lim_{|x|\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$



Gelingt es, den Funktionsterm so umzuformen, dass x nur noch in Teiltermen $\frac{1}{x}$ vorkommt, dann geht die Grenzwert-Bestimmung mit den Grenzwert-Sätzen leicht von der Hand. Die geeignete Form ergibt sich oft erst durch geschicktes Kürzen:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1+2x}{1+x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{x}+2}{\frac{1}{x}+1} = \frac{0+2}{0+1} = 2$$

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{2-x^2}{2x^2-2x+1} = \lim_{|x|\to\infty} \frac{\frac{2}{x^2}-1}{2-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{0-1}{2-0+0} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \sin\frac{1}{x} = \sin 0 = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1} = \frac{\sqrt{1+0}}{1} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1} = -\frac{\sqrt{1+0}}{1} = -1$$

Beachte: $a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2 b}$ für $a<0$

Beim Arbeiten mit Grenzwerten sind noch besondere Sprechweisen üblich:

Konvergenz liegt vor, wenn der Grenzwert existiert, zum Beispiel

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1+2x}{1+x} = 2 \quad \text{oder} \quad \lim_{x\to 1} \frac{1+2x}{1+x} = \frac{3}{2}$$

Divergenz liegt vor, wenn der Grenzwert nicht existiert.
Man unterscheidet 2 Fälle:

Bestimmte Divergenz

Die Funktion nimmt beliebig große (+∞) oder beliebig kleine (–∞) Werte an.

$\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^3 + 100x^2 + 50) = -\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} (-x^3 + 100x^2 + 50) = +\infty$

Der wichtigste Fall von bestimmter Divergenz liegt vor, wenn in einem Bruch der Nenner gleich 0 ist, nicht aber der Zähler. Dann ist der Grenzwert dem Betrag nach ∞, über sein Vorzeichen entscheiden die Faktoren im Zähler und Nenner:

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{x+2}{x^2-x} = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{x+2}{x(x-1)} = »\frac{+3}{+3\cdot(+0)}« = +\infty$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{x+2}{x^2-x} = \lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{x+2}{x(x-1)} = »\frac{+3}{+3\cdot(-0)}« = -\infty$$

Unbestimmte Divergenz

Die Funktion nimmt mindestens 2 Werte immer wieder an.

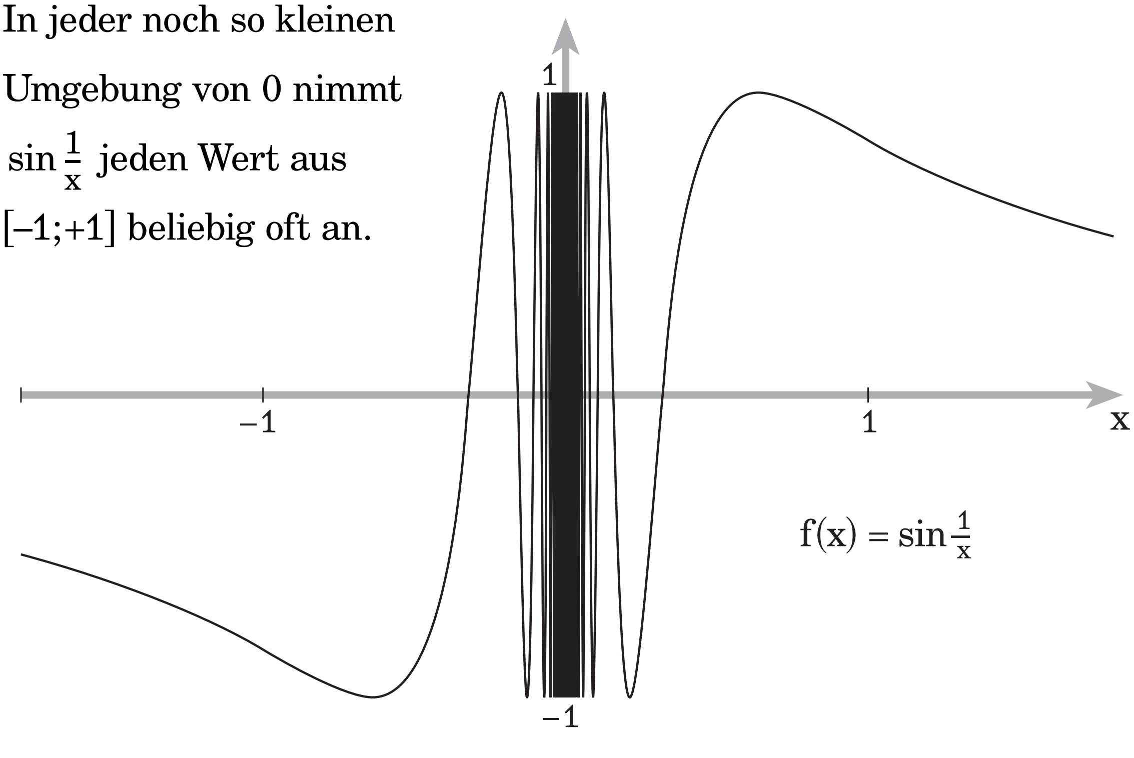
Für natürliche Zahlen n gilt: $\lim\limits_{n \to +\infty} (-1)^n$ ist unbestimmt, denn $(-1)^n$ springt zwischen –1 und 1 beliebig oft und immer wieder.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \sin x$ ist unbestimmt, denn $\sin x$ nimmt für $x \to +\infty$ jeden Wert aus [–1;+1] beliebig oft und immer wieder an.

Auch im Endlichen gibt es unbestimmte Divergenz – berühmtestes Beispiel:

16. Beispiel: $\lim\limits_{x \to 0} \sin\frac{1}{x}$

In jeder noch so kleinen Umgebung von 0 nimmt $\sin\frac{1}{x}$ jeden Wert aus [–1;+1] beliebig oft an.



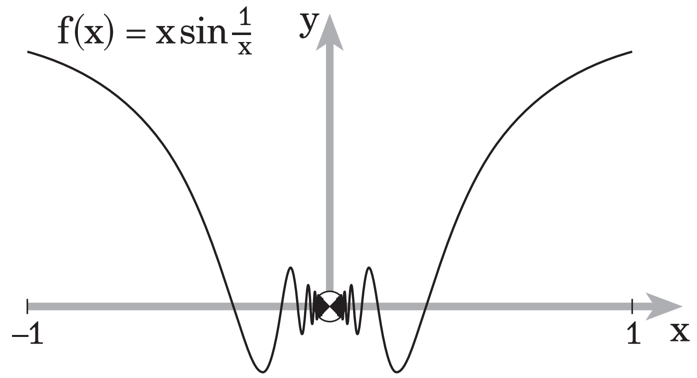
Für manche Anwendung ist der folgende Satz wertvoll:

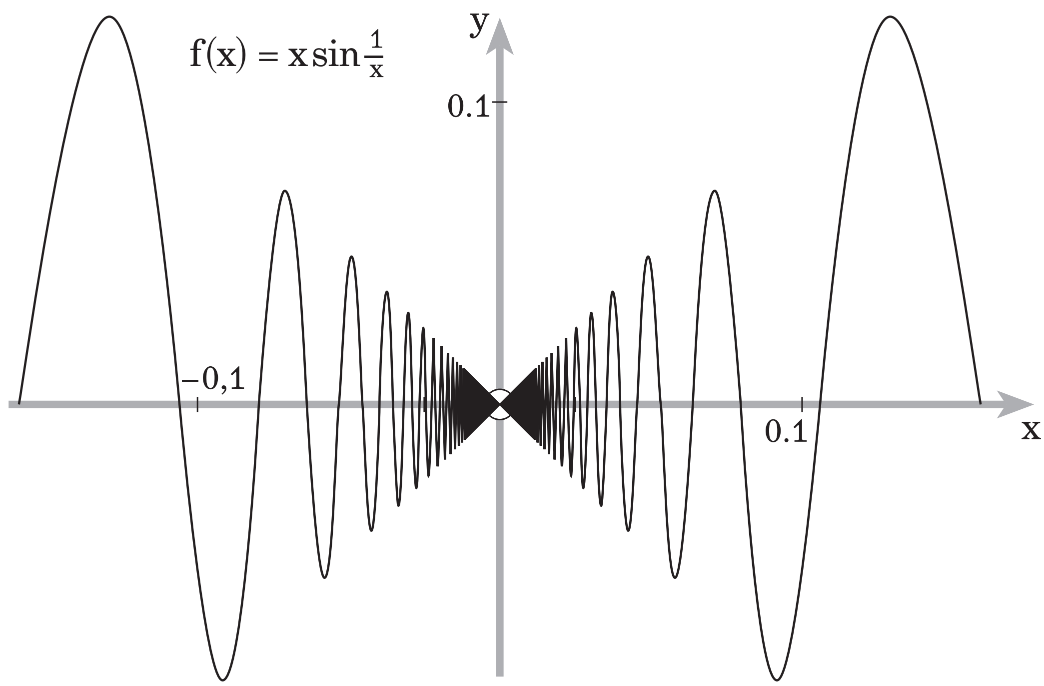
Konvergiert bei einem Produkt $f(x) \cdot g(x)$ ein Faktor nach 0: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$,

während der Grenzwert des andern Faktors endlich bleibt: $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq \pm\infty$,

dann gilt: $\lim\limits_{x \to a}(f(x)g(x)) = 0$

17. Beispiel: $\lim\limits_{x \to 0} x \cdot \sin\frac{1}{x} = 0$, denn es gilt: $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$ und $\left|\sin\frac{1}{x}\right| \leq 1$.





Zum Nachdenken

❶ Folgen

Tests geben oft einige Zahlen an und fragen nach passenden Fortsetzungen, zum Beispiel: 1, 2, 5, 12, 27, 58 …
Die 6 Zahlen haben durch die Reihenfolge, in der sie aufgeführt sind, eine (unsichtbare) Platznummer bekommen. Die Tabelle macht es deutlich:

Platznummer	1	2	3	4	5	6	…	n
zugeordnete Zahl	1	2	5	12	27	58	…	a_n

Die Tabelle erinnert an die Wertetabelle einer Funktion mit der Definitionsmenge $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{N}_0$. Man definiert

> Definition: Eine Funktion a heißt Folge, wenn die Definitionsmenge $\mathbb{N}$ ist.
> Statt a(n) schreibt man Folgeglieder kurz a_n.

Im Beispiel ist $a_1 = 1$ $a_2 = 2$ $a_3 = 5$ $a_4 = 12$ $a_5 = 27$ $a_6 = 58$
Im Test soll man einen Funktionsterm finden, der auf die ersten 6 Zahlen passt, und mit ihm weitere Folgeglieder berechnen. So liefert zum Beispiel der Term $a_n = 2^n-n$ die gegebenen Werte von a_1 bis a_6 und für a_7 den Wert $2^7-7 = 121$.

Die bei Funktionen bekannten Begriffe wie Monotonie und Grenzwert tauchen auch bei Folgen auf; wichtig aber ist nur der Grenzwert von a_n für $n\to+\infty$.
So wächst die Folge a mit $a_n = 2^n-n$ echt monoton, denn für $n\in\mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} a_{n+1}-a_n &= [2^{n+1}-(n+1)]-[2^n-n] \\ &= 2\cdot 2^n-2^n-n-1+n \\ &= 2^n-1 > 1 > 0 \end{aligned}$$

Allgemein: **Eine Folge a wächst echt monoton, wenn gilt $a_{n+1} > a_n$ für $n\in\mathbb{N}$.**
Dann folgt aus n>m: $a_n>a_m$; das ist das Monotoniekriterium für Funktionen.

Eine Folge a heißt nach oben beschränkt, wenn es eine Zahl M so gibt, dass gilt: $a_n<M$ für $n\in\mathbb{N}$. Die Folge im Beispiel ist nach oben nicht beschränkt, denn jedes Folgeglied ist mindestens um 1 größer als sein Vorgänger. Also gilt auch $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Geometrische Folgen

Eine Folge mit dem Term $a_n = a_1\cdot q^{n-1}$ mit $a_1, q\in\mathbb{R}$ heißt geometrische Folge.
Jedes Folgeglied (n>1) ist das q-fache seines Vorgängers.
Geometrische Folgen kommen vor bei:
Renten- und Zinseszins-Berechnungen in der Finanzmathematik,
gedämpften Schwingungen und radioaktivem Zerfall in der Physik.
Der seltsame Name »geometrisch« erklärt sich aus der Eigenschaft, dass bis aufs erste jedes Folgeglied das geometrische Mittel seiner beiden Nachbarn ist:
$a_n = \sqrt{a_{n-1}\cdot a_{n+1}}$ (für $a_n>0$).

Für q>1 und $a_1>0$ wächst die geometrische Folge echt monoton und ist nach oben nicht beschränkt: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$

Für 0<q<1 und $a_1>0$ fällt die geometrische Folge echt monoton und hat den Grenzwert 0: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Für q<0 wechselt das Vorzeichen von Folgeglied zu Folgeglied, man spricht dann von einer alternierenden Folge.

❷ Reihen

Aus einer gegebenen Folge a entsteht eine neue Folge s nach der Vorschrift:

$$s_1 = a_1$$
$$s_2 = a_1 + a_2$$
$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$\dots$$
$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n =: \sum_{i=1}^{n} a_i$$
$$\dots$$

Diese Vorschrift lässt sich in einer Definition zusammenfassen:

$s_0 = 0$ und $s_n = s_{n-1} + a_n$ mit $n \in \mathbb{N}$.

Eine derartige Folge heißt auch **Reihe**; ihr n-tes Glied s_n ist die Summe der ersten n Glieder der ursprünglichen Folge a.

Geometrische Reihen

Ist die ursprüngliche Folge a geometrisch, so heißt die daraus entstandene Reihe **geometrische Reihe**. Wir beschränken uns auf geometrische Reihen, weil sie die wichtigsten Reihen sind und sich recht einfach berechnen lassen. Für sie gilt:

$s_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \dots + a_1 \cdot q^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_1 \cdot q^i$ multipliziert mit q ergibt

$q \cdot s_n = a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 + \dots + a_1 \cdot q^n = \sum_{i=0}^{n-1} a_1 \cdot q^{i+1}$, subtrahiert von der oberen Zeile

ergibt $s_n(1-q) = a_1 - a_1 q^n$. Für $q \neq 1$ gilt also $\mathbf{s_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}}$.

Für $0<q<1$ hat die geometrische Folge q^n den Grenzwert 0, falls $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = a_1 \cdot \frac{1}{1-q} \quad \text{wegen} \quad \lim_{n\to\infty} q^n = 0 .$$

Derselbe Grenzwert ergibt sich für $-1<q<0$.

Für eine geometrische Reihe mit $|q|<1$ gilt: $\mathbf{\sum_{i=0}^{\infty} a_1 \cdot q^i := \lim_{n\to\infty} s_n = a_1 \cdot \frac{1}{1-q}}$

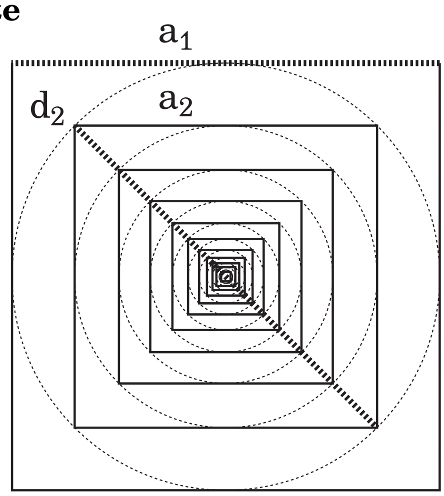
Beispiel aus der Bruchrechnung: **Periodische Dezimalzahl**

$$0,\overline{9} = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \dots + \frac{9}{10^n} + \dots .$$

$0,\overline{9}$ ist also der Grenzwert einer geometrischen Reihe mit $a_1 = \frac{9}{10}$ und $q = \frac{1}{10}$.

Die Formel liefert $0,\overline{9} = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{\frac{9}{10}} = 1$.

Beispiel aus der Geometrie: **Verschachtelte Quadrate**



Einem Quadrat mit Seite a ist ein Kreis einbeschrieben und diesem ein Quadrat und so weiter. Wie groß sind addiert die Umfänge aller Quadrate ?

Die Diagonale d_n des n. Quadrats ist so lang wie die Seite a_{n-1} des (n–1). Quadrats: $d_n = a_n\sqrt{2} = a_{n-1}$.

Aus $a_n = a_{n-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$ folgt $q = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Gesamtlänge der Quadratseiten $l = a_1 + a_2 + \dots = a_1 \cdot \frac{1}{1-q} = a_1 \cdot \frac{1}{1-(\sqrt{2})/2}$

vereinfacht $l = (2+\sqrt{2})a_1 = (2+\sqrt{2})a$.

Gesamtumfang $u = 4l = 4(2+\sqrt{2})a$

Aufgaben

•**1** Zeige: f ist stetig bei a. Gib zu den ε-Werten 0,1 und 0,001 eine passende δ-Umgebung von a an.

a) $f(x) = -x, \quad a = 1$ **b)** $f(x) = \frac{1}{2}x + 3, \quad a = 2$

c) $f(x) = mx + t, \quad a = 1$ **:d)** $f(x) = \frac{1}{x}, \quad a = 3$

2 Berechne **a)** $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} \sqrt{1-x^2}$ **b)** $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ **c)** $\lim\limits_{x \to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$ **d)** $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2} \frac{x^2-4}{\sqrt{x-2}}$

3 $f(x) = \frac{1-x}{x+2}, \quad b = -1$

a) Gib einen Wert r so an, dass für $x>r$ gilt: $|f(x) - b| < \frac{1}{100}$

b) Zeige: Zu jedem $\varepsilon>0$ gibt es einen Wert r so, dass für alle $x>r$ gilt: $|f(x) - b| < \varepsilon$.
Welcher Grenzwert ist damit nachgewiesen ?

c) Zeige: Zu jedem $\varepsilon>0$ gibt es einen Wert s so, dass für alle $x<s$ gilt: $|f(x) - b| < \varepsilon$.
Welcher Grenzwert ist damit nachgewiesen ?

4 Begründe mit den Stetigkeitssätzen, dass f stetig ist. Verwende nur die Stetigkeit von k mit $k(x)=c$, i mit $i(x)=x$, w mit $w(x)=\sqrt{x}$ und s mit $s(x)=\sin x$.

a) $f(x) = \frac{x-1}{2x^2}$ **b)** $f(x) = \sqrt{1-(\sin x)^2}$ **c)** $f(x) = |x|$ **d)** $f(x) = \left|\frac{1-x}{\cos x}\right|$

5 Begründe, dass f in I mindestens 1 Nullstelle hat.

a) $f(x) = x^3 - x^2 - 1, \quad I = [0;2]$ **b)** $f(x) = \frac{1}{2}x - \sin x, \quad I = [1;2]$

c) $f(x) = x - \tan x, \quad I = [4;4{,}5]$

6 Zeige, dass f mit $f(x) = \frac{1}{x-2}$ in $[a;b] = [1;3]$ keine Nullstelle hat, obwohl $f(a)<0$ und $f(b)>0$ ist. Warum widerspricht das nicht dem Nullstellensatz?

•**7** Zeige: f hat in I genau 1 Nullstelle. (Nullstellensatz, Monotonie!)

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2, \quad I_1 = [0;1], \quad I_2 = [3;5]$

b) $f(x) = x^5 + 2x^3 + x - 5, \quad I_1 = [1;2], \quad I_2 = [1;\frac{11}{10}]$

•**8** Bestimme ein Intervall der Länge 1 mit ganzzahligen Grenzen, in dem f mindestens einmal den Wert y annimmt.

a) $f(x) = x^3 - x - 1, \quad y = 10$ **b)** $f(x) = x^4 - 3x^2 - x, \quad y = -1$

9 Berechne die einseitigen Grenzwerte für x gegen a und entscheide, ob die Funktion f bei a stetig ist.

a) $f(x) = \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2-1}}, \ a = 1$ **b)** $f(x) = \sin\frac{|x+1|}{x+1}, \ a = -1$

c) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}+1 & \text{für } 0 \le x < 4 \\ 19 - x^2 & \text{für } 4 \le x \end{cases}, \ a = 4$

10 Berechne **a)** $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \left(\frac{\sqrt{|x|} - x^2}{\sqrt{|x|}} \operatorname{sgn} x \right)$ **b)** $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \left(\frac{\sqrt{|x|} - x^2}{\sqrt{|x|}} \operatorname{sgn} x \right)$

11 Untersuche, ob f stetig ist

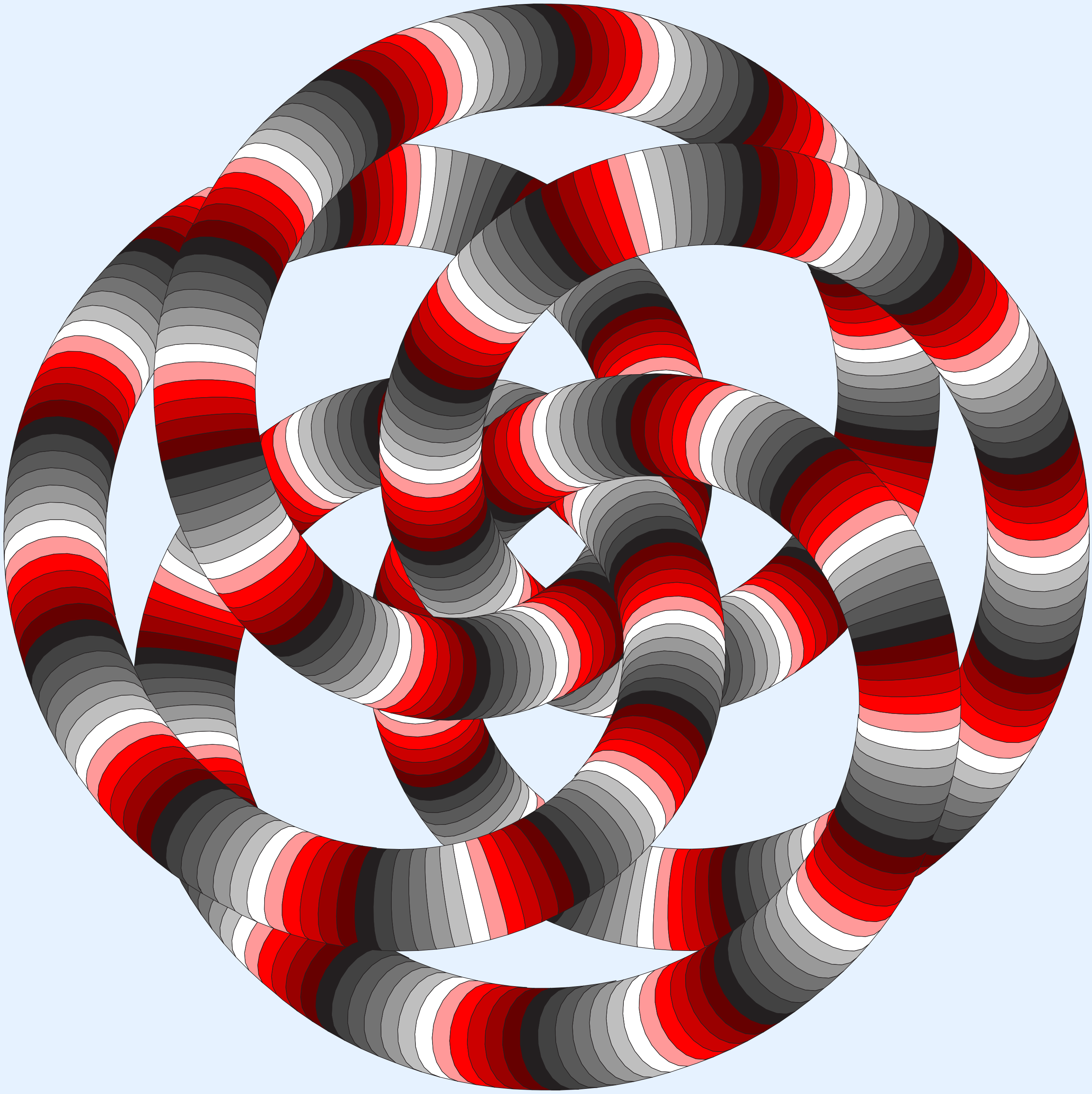
a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \le 1 \\ \sin\frac{\pi}{2x} & \text{für } x > 1 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } x \le 0{,}5 \\ 4\sin\frac{x}{2} & \text{für } x > 0{,}5 \end{cases}$

•**12** $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } x \le a \\ 4\sin\frac{x}{2} & \text{für } x > a \end{cases}$

Zeige, dass es einen Wert a so gibt, dass f stetig ist, und gib ein Intervall der Länge 1 an, in dem dieser a-Wert liegt.

•**13** Berechne **a)** $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x^2-1}{x^3-4x}$ **b)** $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{2-x^3}{x^3-x^2}$ **c)** $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x^3+x^2}{4-x^2}$ **d)** $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2-4}}$

•**14** Berechne **a)** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2-x^3}{x^3-2x^2}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 2} \frac{2-x^3}{x^3-2x^2}$ **c)** $\lim\limits_{x \to \pm 2} \frac{2x}{\sqrt{x^2-4}}$

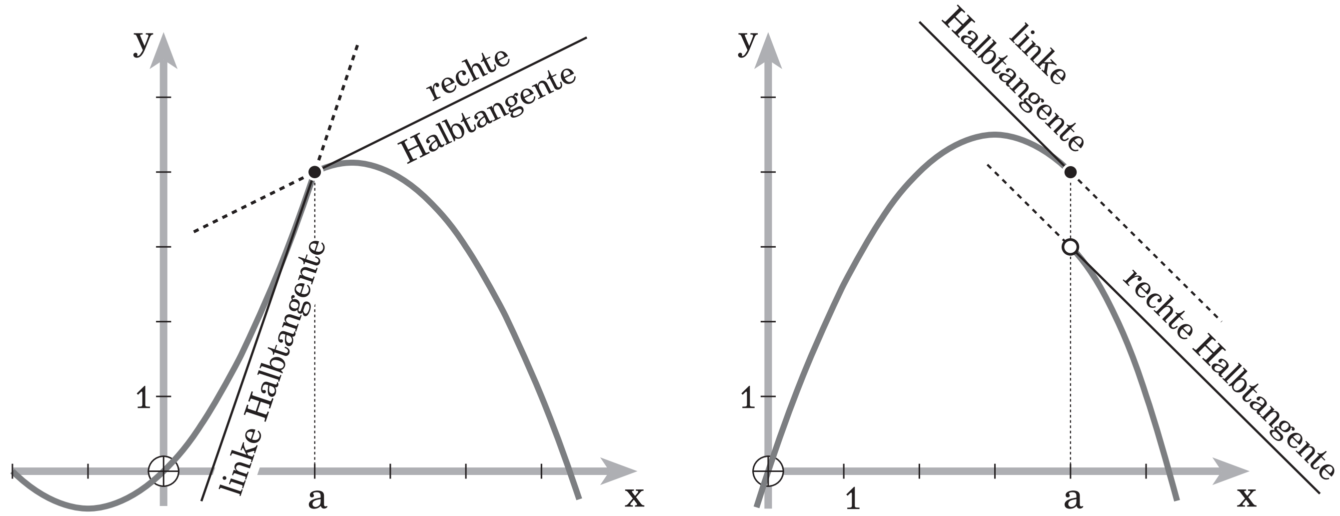


VIII. Differenzierbarkeit

1. Differenzierbarkeit bei Polynomen

Im vorigen Kapitel haben wir gelernt, wie man eine Funktion auf Stetigkeit untersucht. Graphen stetiger Funktionen müssen nicht glatt sein, sie können auch Ecken haben.

An einer Ecke oder einem Sprung hat eine Kurve keine eindeutige Tangente: Es können dort zwar 2 Halbtangenten existieren, aber sie fügen sich nicht zu **einer** Tangente zusammen. In solchen Stellen ist die Funktion nicht differenzierbar. Polynomkurven sind von Haus aus glatt, sie haben in jedem Kurvenpunkt eine Tangente, Polynomfunktionen sind also überall differenzierbar.



Beide Funktionen sind in a nicht differenzierbar.

Ecken können nur beim Stückeln entstehen, und zwar in den Nahtstellen, zum Beispiel in der Nahtstelle a in: $f(x) = \begin{cases} p_1(x) \text{ für } x \leqq a \\ p_2(x) \text{ für } x > a \end{cases}$

Beim Untersuchen auf Differenzierbarkeit berechnet man die Steigungen der Halbtangenten im Kurvenpunkt $(a|f(a))$ als Grenzwerte:

Steigung der linken Halbtangente $\quad m_1 = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} a} p_1'(x)$

Steigung der rechten Halbtangente $\quad m_2 = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} a} p_2'(x)$

Für $m_1 \neq m_2$ hat die Kurve eine Ecke $(a|f(a))$ oder einen Sprung in $(a|f(a))$:

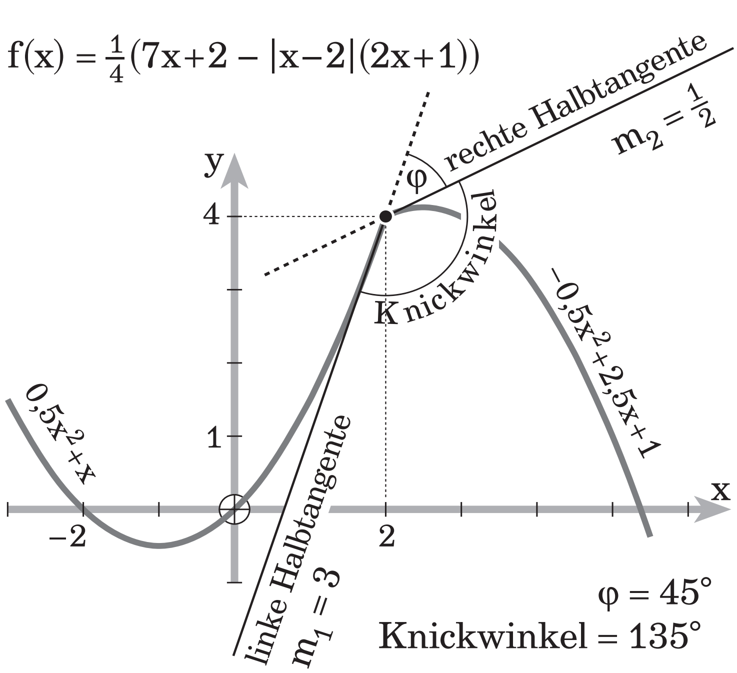
Beispiel: $f(x) = \frac{1}{4}(7x + 2 - |x-2|(2x+1)$

die Nahtstelle ist a=2; die Zerlegung in Teilterme ergibt:

$x \leqq 2$: $p_1(x) = \frac{1}{2}x^2 + x$ $\qquad$ $x > 2$: $p_2(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 1$

Ableitungen der Teilterme:

$x < 2$: $p_1'(x) = x + 1$ $\qquad$ $x > 2$: $p_2'(x) = -x + \frac{5}{2}$



Allgemein ist die Differenzierbarkeit in einer Nahtstelle a zunächst ungeklärt. Man leitet nur für x≠a ab (=-Zeichen weglassen!) und untersucht die Differenzierbarkeit in a später.

Steigung der linken Halbtangente

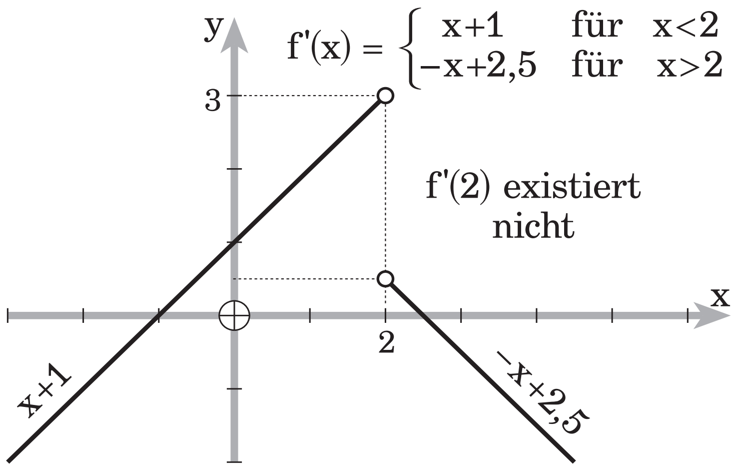
$$m_1 = \lim_{x \overset{<}{\to} 2} p_1'(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 2}(x+1) = 3$$

Steigung der rechten Halbtangente

$$m_2 = \lim_{x \overset{>}{\to} 2} p_2'(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 2}(-x+\tfrac{5}{2}) = \tfrac{1}{2}$$

Wegen $m_1 \neq m_2$ ist die Funktion in 2 nicht differenzierbar, hat die Kurve die Ecke (2|4).

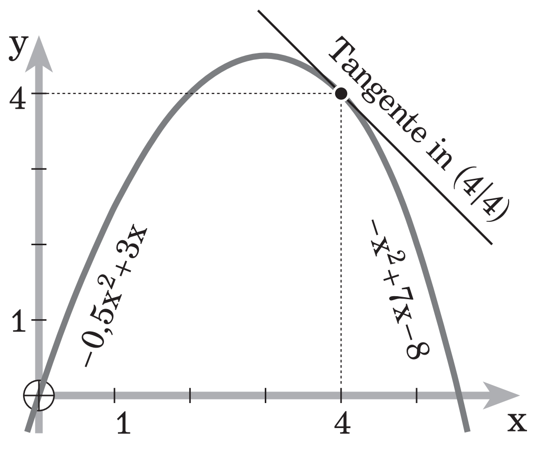
Der Knickwinkel ist der Winkel der Halbtangenten.



Mit $\tan\varphi = \left|\dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}\right|$ findet man den Winkel φ der Geraden, in denen die Halbtangenten liegen; hier ergibt sich tanφ=1, also φ=45°. An der Zeichnung überlegt man sich, ob der Knickwinkel gleich φ oder gleich 180°−φ ist; das Bild zeigt einen stumpfen Knickwinkel, also 180°−45°=135°.

Sind m_1 und m_2 gleich, so fügen sich die Halbtangenten nur dann zu einer Tangente zusammen, wenn die Funktion in a stetig ist. Die Kurve ist dann glatt, hat im Punkt (a|f(a)) eine Tangente; ihre Funktion ist in a differenzierbar.

Beispiel: $f(x) = -\frac{1}{4}(3x^2 + |x-4|(x-4) - 20x + 16)$



Nahtstelle: a=4

Zerlegung in Teilterme:

x≦4: $p_1(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$

x>4: $p_2(x) = -x^2 + 7x - 8$

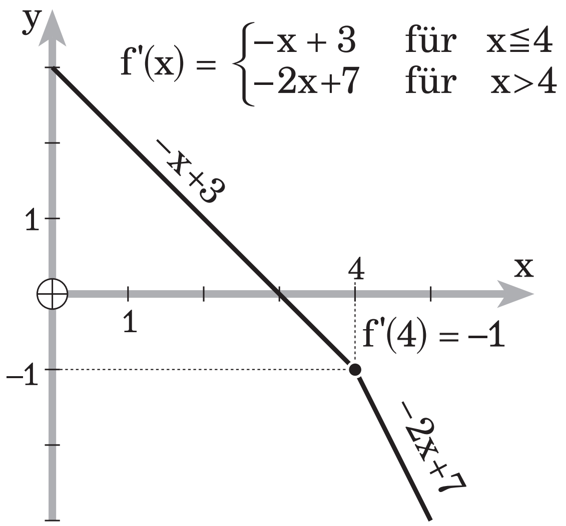
Ableitungen der Teilterme:

x<4: $p_1'(x) = -x + 3$

x>4: $p_2'(x) = -2x + 7$

Steigung der linken Halbtangente

$$m_1 = \lim_{x \overset{<}{\to} 4} p_1'(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 4}(-x+3) = -1$$



Steigung der rechten Halbtangente

$m_2 = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 4} p_2'(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 4}(-2x+7) = -1$

Wegen $m_1 = m_2$ ist die Funktion in 4 differenzierbar, ist $(4|4)$ kein Eckpunkt der Kurve, gibt es dort eine Tangente, wenn die Funktion in 4 stetig ist:

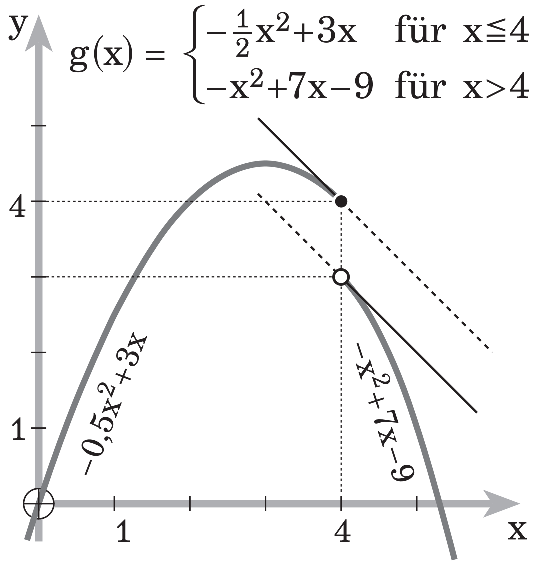
$f(4) = 4$

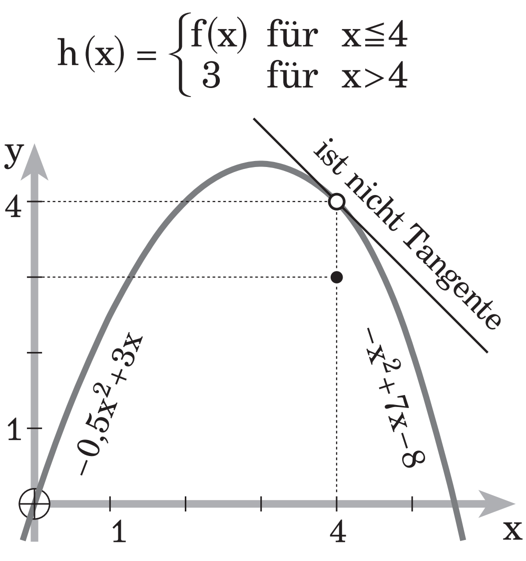
$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 4} p_1(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 4}(-x^2+7x-8) = 4$

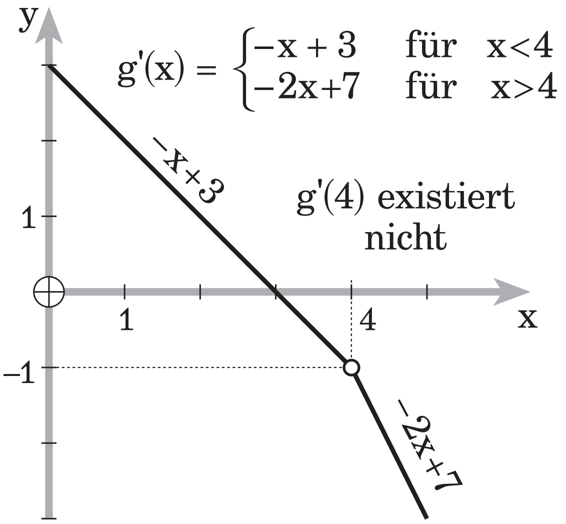
Die Kurve ist also in 4 stetig und differenzierbar.

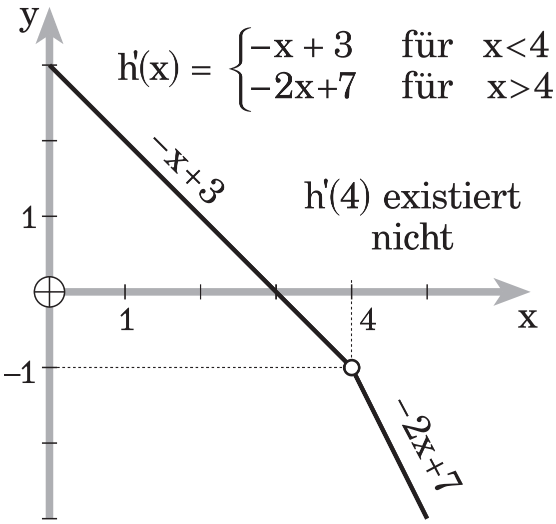
Sind m_1 und m_2 gleich und ist die Funktion in a unstetig, dann ist die Funktion in a auch nicht differenzierbar.

Beispiel: **a)** **b)**









Definition:	f heißt **differenzierbar in a**, wenn gilt: (1) f ist stetig in a, (2) links- und rechtsseitiger Grenzwert von f'(x) stimmen in a überein: $\lim\limits_{x \lesssim a} f'(x) = \lim\limits_{x \gtrsim a} f'(x) = m$ f hat dann in a die Ableitung $f'(a) = m$.

Ist eine der Bedingungen (1) oder (2) nicht erfüllt, dann ist die Funktion in a nicht differenzierbar. Man sagt: Die Ableitung f'(a) existiert nicht.
Das einfachste Beispiel dafür ist die Betragfunktion. Wegen $|x| = \sqrt{x^2}$ kann man sie mit der Kettenregel ableiten:

$$(|x|)' = (\sqrt{x^2})' = \frac{1}{2\sqrt{x^2}} \cdot 2x = \frac{x}{|x|} = \frac{|x|\operatorname{sgn} x}{|x|} = \operatorname{sgn} x,\ x \neq 0 \qquad \boxed{\mathbf{(|x|)' = \frac{x}{|x|} = sgn\,x,\ x \neq 0}}$$

In 0 ist die Betragfunktion nicht differenzierbar, weil die Bedingung (2) nicht erfüllt ist. Es gilt $\lim\limits_{x \lesssim 0} \operatorname{sgn} x = -1 \neq \lim\limits_{x \gtrsim 0} \operatorname{sgn} x = 1$.

Ist f in a differenzierbar, dann kann man auch nach der 2. oder noch höheren Ableitungen in a fragen.

Definition:	f heißt **genau k-mal differenzierbar in a**, wenn $f'(a), f''(a), \dots, f^{(k)}(a)$ existieren, nicht aber die (k+1)-te Ableitung.

Polynomfunktionen sind in jeder Stelle beliebig oft differenzierbar.

Die wichtigsten Sonderfälle enthält das

Beispiel: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+3|x+6|) & \text{für } -9 \leqq x < -3 \\ x(|x|-4) & \text{für } -3 \leqq x \leqq 4 \\ 4x-18 & \text{für } 4 < x < 5 \end{cases}$

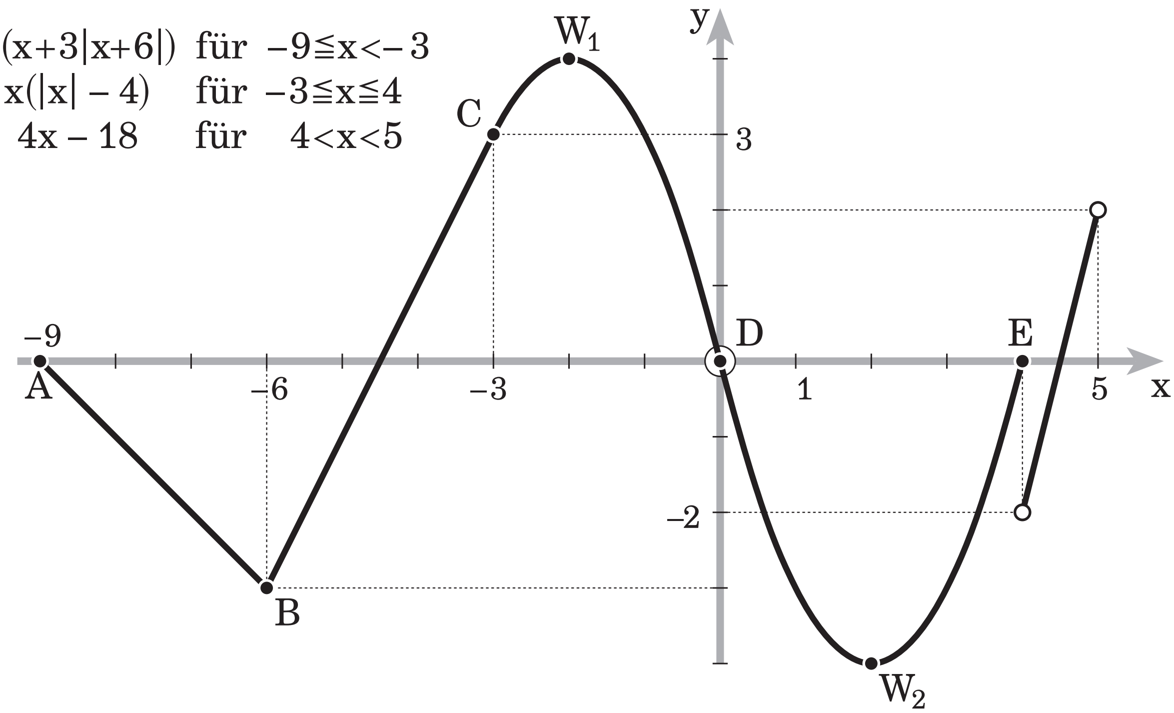
Der 1. Teilterm enthält wegen des Betrags die Nahtstelle −6,
der 2. Teilterm die Nahtstelle 0.
Die vollständige Stückelung in Polynome ergibt:

$$f(x) = \begin{cases} -x-9 & \text{für } -9 \leqq x < -6 \\ 2x+9 & \text{für } -6 \leqq x < -3 \\ -x^2-4x & \text{für } -3 \leqq x < 0 \\ x^2-4x & \text{für } 0 \leqq x \leqq 4 \\ 4x-18 & \text{für } 4 < x < 5 \end{cases}$$

Die Untersuchung auf Stetigkeit in den Nahtstellen ergibt:
f ist überall stetig, außer bei x=4, dort gilt nämlich $f(4) = 0$,
aber $\lim\limits_{x \searrow 4} f(x) = \lim\limits_{x \searrow 4}(4x-18) = -2$

Weil wir für die nächsten Überlegungen den Kurvenverlauf brauchen, ist das Bild von G_f an dieser Stelle wiedergegeben.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+3|x+6|) & \text{für } -9 \leqq x < -3 \\ x(|x|-4) & \text{für } -3 \leqq x \leqq 4 \\ 4x-18 & \text{für } 4 < x < 5 \end{cases}$$



Für die 1. Ableitung gilt bis auf die Nahtstellen:

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } -9 < x < -6 \\ 2 & \text{für } -6 < x < -3 \\ -2x-4 & \text{für } -3 < x < 0 \\ 2x-4 & \text{für } 0 < x < 4 \\ 4 & \text{für } 4 < x < 5 \end{cases}$$

Untersuchung auf Differenzierbarkeit in den Nahtstellen

$x = -6$: $\lim\limits_{x \nearrow -6} f'(x) = -1 \neq 2 = \lim\limits_{x \searrow -6} f'(x)$

f ist in -6 nicht differenzierbar

$x = -3$: $\lim\limits_{x \nearrow -3} f'(x) = 2 = \lim\limits_{x \searrow -3} f'(x)$

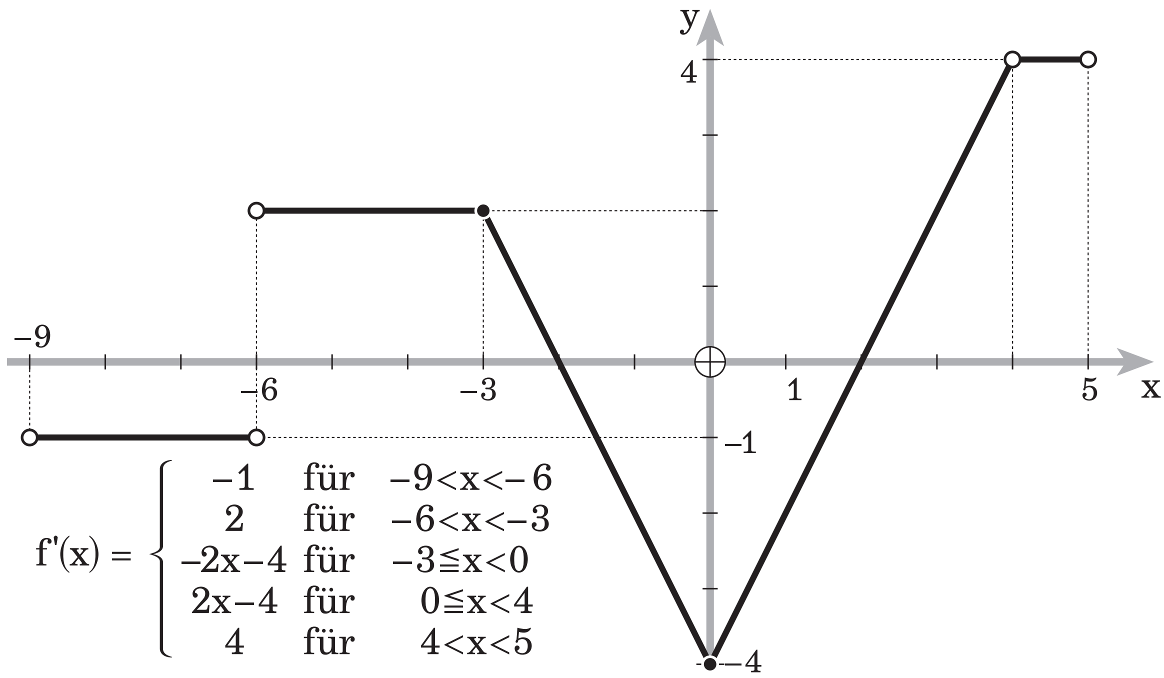
f ist in -3 differenzierbar: $f'(-3) = 2$

$x = 0$: $\lim\limits_{x \nearrow 0} f'(x) = -4 = \lim\limits_{x \searrow 0} f'(x)$

f ist in 0 differenzierbar: $f'(0) = -4$

$x = 4$: f ist in 4 unstetig, also dort nicht differenzierbar, obwohl die einseitigen Grenzwerte von $f'(x)$ den Wert 4 haben.

In den Nahtstellen –3 und 0 ist f differenzierbar. Deshalb fügt man die Gleichheitszeichen beim gestückelten Ableitungsterm ein.



$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } -9<x<-6 \\ 2 & \text{für } -6<x<-3 \\ -2x-4 & \text{für } -3\leqq x<0 \\ 2x-4 & \text{für } 0\leqq x<4 \\ 4 & \text{für } 4<x<5 \end{cases}$$

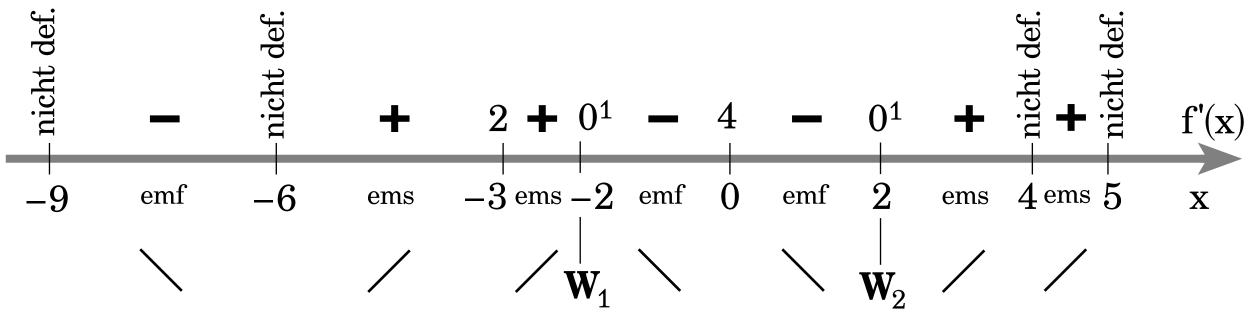
Zur Bestimmung der Extrempunkte brauchen wir die Monotonie-Intervalle.

Waagrechtpunkte: $f'(x) = 0$

$-2x - 4 = 0 \Rightarrow x = -2,\; y = f(-2) = 4,\; W_1(-2|4)$

$2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2,\; y = f(2) = -4,\; W_2(2|-4)$

Monotonie



$E(-6|-3)$ und $W_2(2|-4)$ sind Tiefpunkte, $W_1(-2|4)$ ist Hochpunkt.

Außerdem gilt: $A(-9|0)$ ist ein Rand-Hochpunkt, weil der Graph dort mit negativer Steigung nach rechts verläuft.

$E(4|0)$ ist Hochpunkt, denn:

die linken Nachbarpunkte liegen wegen der Monotonie des Graphen unter E, die rechten Nachbarpunkte liegen trotz der Monotonie des Graphen unter E,

weil $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 4} f(x) = -2$ ist.

$(5|4)$ ist trotz der Monotonie des Graphen kein Rand-Hochpunkt, weil die Funktion dort nicht definiert ist.

Für die 2. Ableitung gilt bis auf die Nahtstellen:

$$f''(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad -9 < x < -6 \\ 0 & \text{für} \quad -6 < x < -3 \\ -2 & \text{für} \quad -3 < x < 0 \\ 2 & \text{für} \quad 0 < x < 4 \\ 0 & \text{für} \quad 4 < x < 5 \end{cases}$$

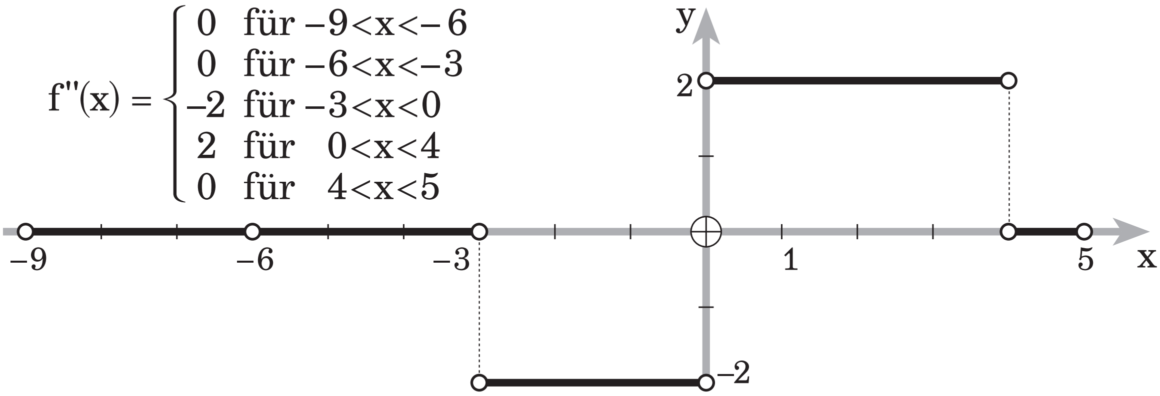
Wir untersuchen f auf 2malige Differenzierbarkeit in den Nahtstellen. Infrage kommen nur noch x=–3 und x=0.

$x = -3$: $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} -3} f''(x) = 0 \neq -2 = \lim\limits_{x \underset{>}{\to} -3} f''(x)$

f ist bei –3 nur 1mal differenzierbar

$x = 0$: $\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 0} f''(x) = -2 \neq 2 = \lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} f''(x)$

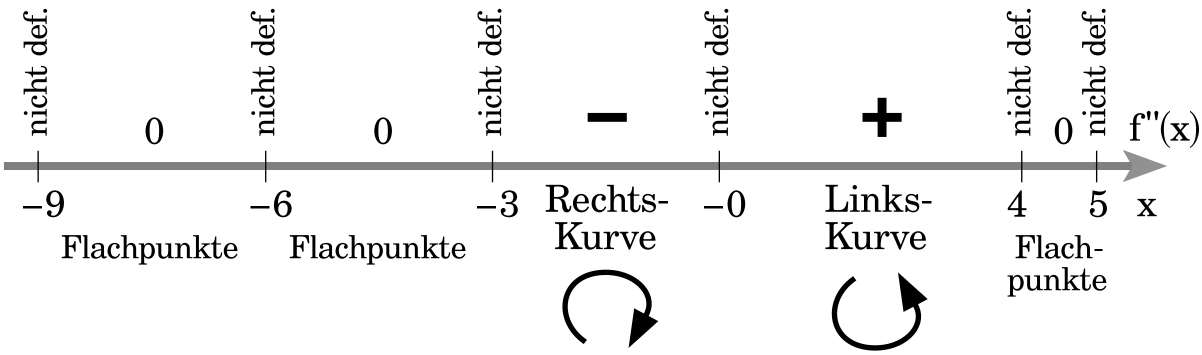
f ist bei 0 nur 1mal differenzierbar



Zur Bestimmung der Wendepunkte brauchen wir die Krümmungs-Intervalle.

Flachpunkte: f''(x) ist nur gleich 0 in den Intervallen]–9;–6[,]–6;–3[und]4;5[.

Krümmung



Das Vorzeichen von f''(x) wechselt nur in 0; dort ist zwar kein Flachpunkt (f'' ist bei 0 nicht definiert), wohl aber ein Wendepunkt D(0|0):
f' hat bei 0 ein echtes inneres Minimum; die Tangente durchdringt in D den Graphen.

Stetigkeit und Differenzierbarkeit sind Eigenschaften, die das Arbeiten mit Funktionen sehr erleichtern. Vor allem bei der Interpolation (Kapitel IV.3) legt man Wert darauf, dass eine Ersatzkurve möglichst diese Eigenschaften hat:

- Nimmt man einen Streckenzug als Ersatzkurve, dann erreicht man nur Stetigkeit. In den Ecken und Randpunkten ist die Ersatzkurve nicht differenzierbar.
- Mit Parabelbögen erreicht man zumindest 1malige Differenzierbarkeit der Ersatzkurve (bis auf die Randpunkte).
- Noch besser sind kubische Splines; sie sind bis auf die Randpunkte 2mal differenzierbar.

Deutet man den Graphen G_f einer Funktion als Verlauf einer Straße,
dann wird man Stetigkeit als selbstverständlich voraussetzen.
Ist G_f wegen einer Ecke nicht differenzierbar,
so muss man schlagartig die Richtung ändern.
Ist G_f nur 1mal differenzierbar, dann sieht das Auge zwar keinen gefährlichen Knick, aber jetzt ändert sich schlagartig die 2. Ableitung, mit ihr die Krümmung, und damit die Kraft senkrecht zur Fahrrichtung: Die Insassen spüren je nach Geschwindigkeit einen mehr oder weniger starken Ruck zur Seite. Deshalb achtet man beim Straßenbau auch auf die 2. Ableitung.

Auch Biegelinien, die durch Stückeln entstehen, sind Kurven, die trotz Stückelung mindestens 1mal differenzierbar sind.

Aufgaben

◊1 Gegeben ist ein Funktionsterm f(x). Bestimme f'(x) sowie $D_{f_{max}}$ und $D_{f'}$.

a) $x^n|x|$ **b)** $|x|\sqrt{x}$ **c)** $|x|\sin x$ **d)** $|x|\cos x$ **e)** $|x|\tan x$

◊2 Gegeben ist ein Funktionsterm f(x). Bestimme f'(x) sowie $D_{f_{max}}$ und $D_{f'}$.

a) $\frac{x^n}{|x|}$ **b)** $\frac{\sqrt{x}}{|x|}$ **c)** $\frac{|x|}{\sin x}$ **d)** $\frac{|x|}{\cos x}$ **e)** $\frac{|x|}{\tan x}$

3 f sei differenzierbar. Leite ab:
a) $|f(x)|$ **b)** $f(|x|)$

◊4 Ist f in der Nahtstelle stetig, differenzierbar (wie oft?) ? Zeichnung!

a) $f(x) = \begin{cases} 2x-2 & \text{für } x \leqq 2 \\ -x^2+6x-6 & \text{für } x > 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{für } x \leqq 1 \\ x^2-4x+2 & \text{für } x > 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2-6x+12 & \text{für } x \leqq 3 \\ -x^2+6x-7 & \text{für } x > 3 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x(x^2+3x-2) & \text{für } x \leqq 0 \\ -\frac{1}{8}x(3x^2-12x+8) & \text{für } x > 0 \end{cases}$

◊5 Ist f in der Nahtstelle stetig, differenzierbar (wie oft?) ? Zeichnung!

a) $f(x) = x|x|$ **b)** $f(x) = x \cdot \operatorname{sgn}(x)$ **c)** $f(x) = x^2|x|$

d) $f(x) = x^2 \cdot \operatorname{sgn}(x)$ **e)** $f(x) = x|x-1|$ **f)** $f(x) = |x-1|(x-1)$

g) $f(x) = |x-1|(x-1)^2$ **h)** $f(x) = |x-1|^2(x-1)$

6 Bestimme den Parameter a so, dass f stetig ist,
und untersuche, wie oft f in der Nahtstelle differenzierbar ist.

a) $f_a(x) = |x+1|(x-a)$ **b)** $f_a(x) = (x+1)|x-a|$

c) $f_a(x) = (x+1) \cdot \operatorname{sgn}(x-a)$ **d)** $f_a(x) = (x-a) \cdot \operatorname{sgn}(x+1)$

7 Bestimme den Parameter a so, dass f stetig ist,
und untersuche, wie oft f in der Nahtstelle differenzierbar ist.

a) $f_a(x) = \begin{cases} 4-x^2 & \text{für } x \leqq 1 \\ x^2+ax-1 & \text{für } x > 1 \end{cases}$

b) $f_a(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \leqq 1 \\ 2x^2+ax+1 & \text{für } x > 1 \end{cases}$

c) $f_a(x) = \begin{cases} ax-x^2 & \text{für } x \leqq 2 \\ a(2-x) & \text{für } x > 2 \end{cases}$

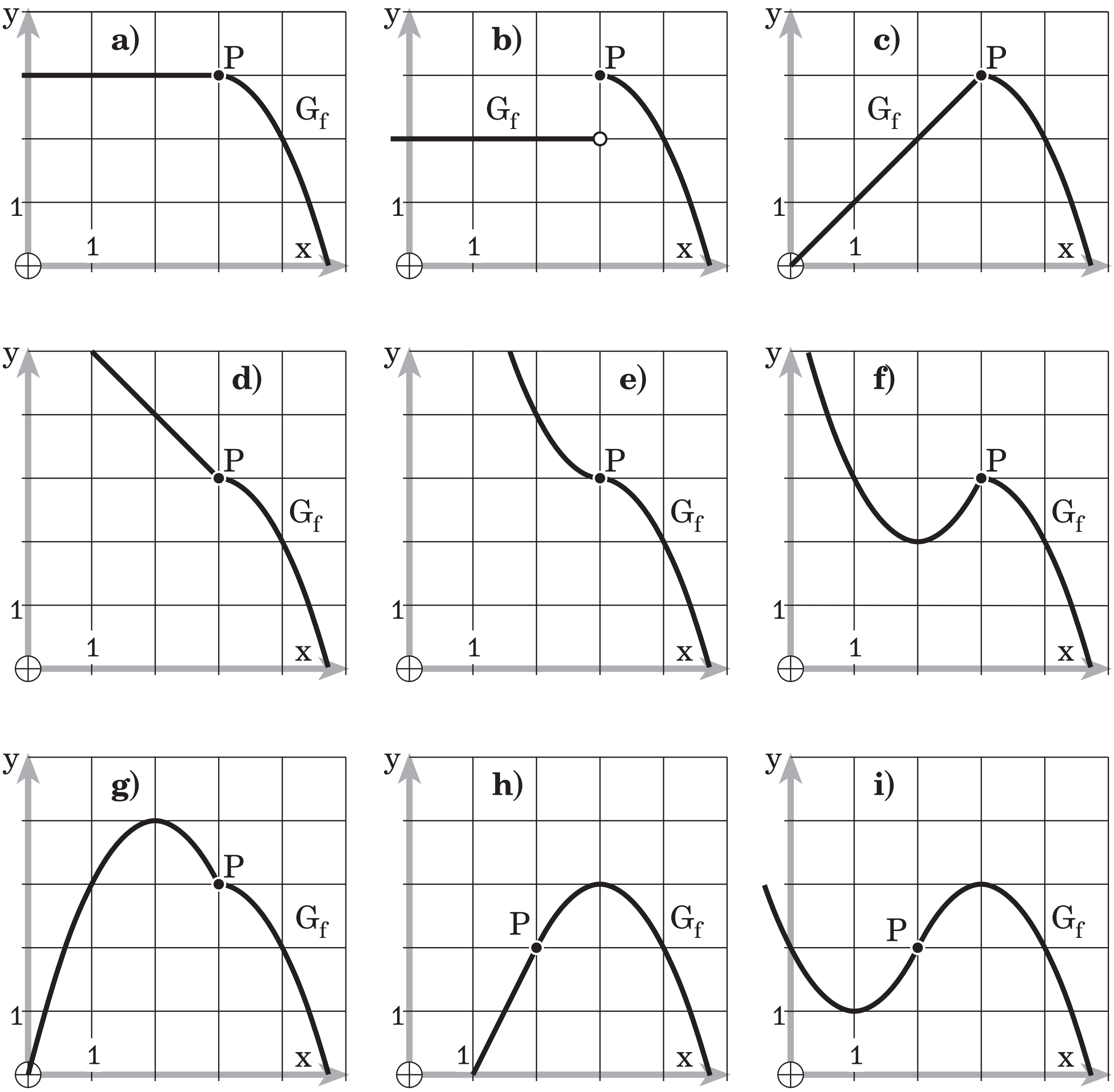
d) $f_a(x) = \begin{cases} a-x^2 & \text{für } x \leqq a \\ x^2-4x+3a & \text{für } x > a \end{cases}$

•8 Bestimme den Parameter a so, dass f stetig ist,
und untersuche, wie oft f in der Nahtstelle differenzierbar ist.

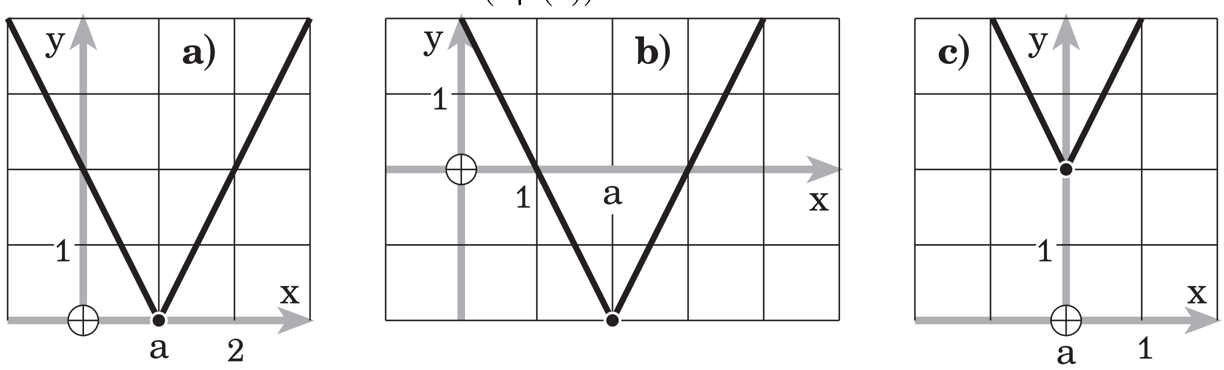
a) $f_a(x) = \begin{cases} ax^2-ax+4-2a & \text{für } x \leq 1 \\ -2x^2+(5-2a^2)x+a & \text{für } x > 1 \end{cases}$

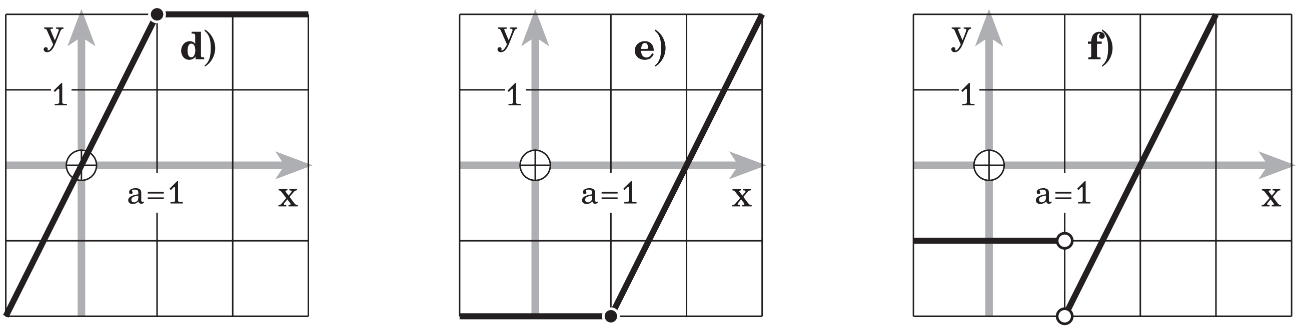
b) $f_a(x) = \begin{cases} ax^2-2ax-20 & \text{für } x \leq a \\ x^2+16x+a^3 & \text{für } x > a \end{cases}$

◊9 Die abgebildeten Graphen bestehen aus Bögen von Normalparabeln und Strecken. Zeichne $G_{f'}$ und $G_{f''}$ und gib die Besonderheit von Punkt P an.

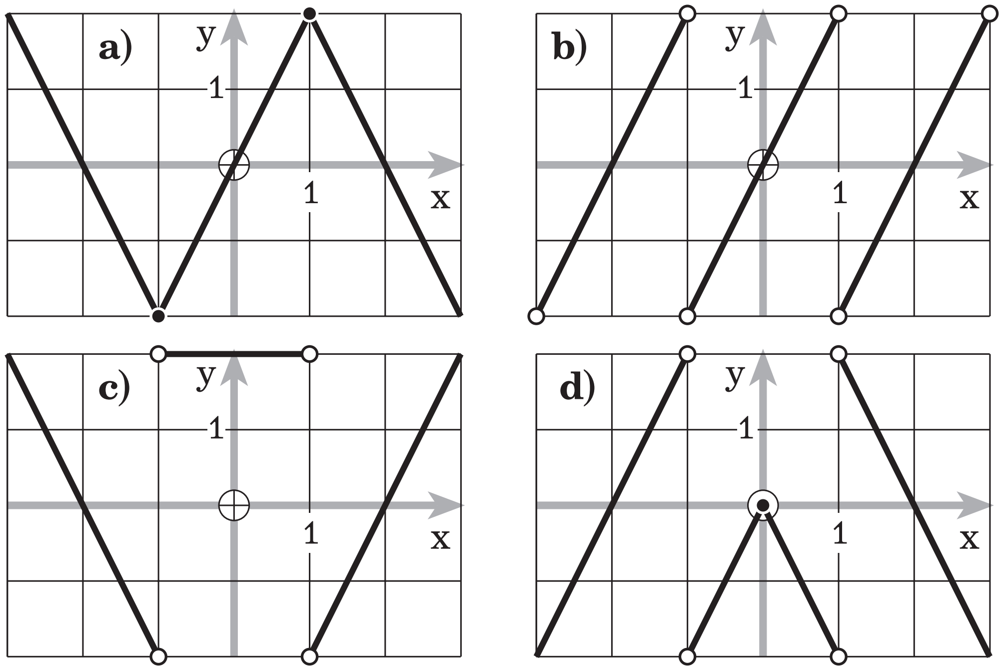


10 Die abgebildeten Streckenzüge sind Graphen $G_{f'}$ der 1. Ableitung einer stetigen Funktion. Zeichne G_f durch den Ursprung und gib die Besonderheit von Punkt P(a|f(a)) an.

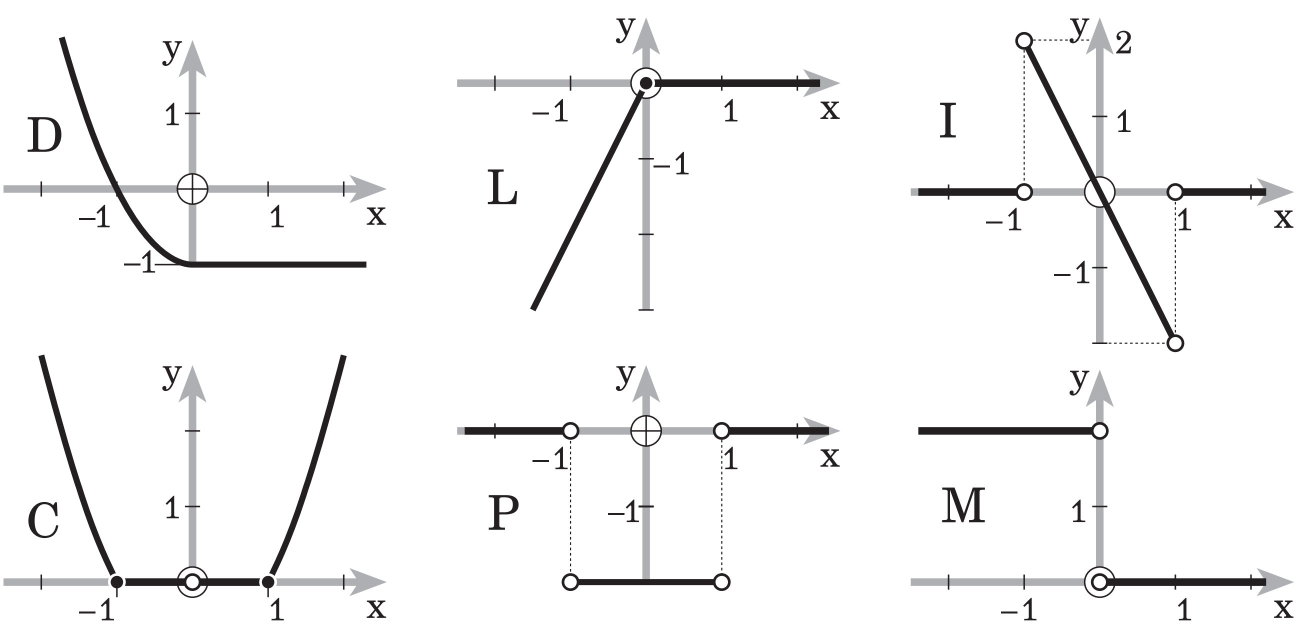


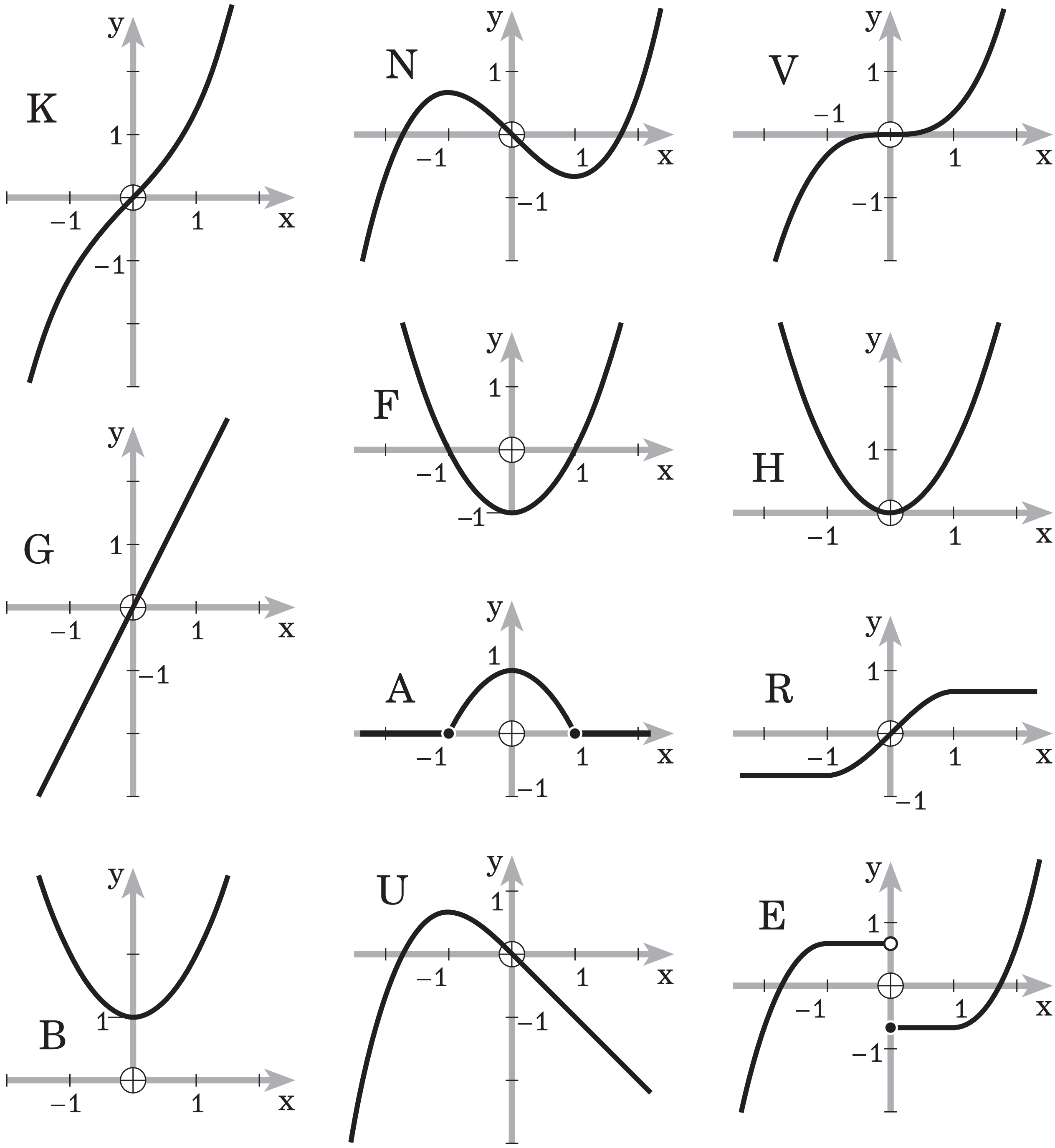


11 Die abgebildeten Streckenzüge sind Graphen $G_{f'}$ der 1. Ableitung einer stetigen Funktion. Zeichne G_f durch den Ursprung. Welcher Symmetrie-Zusammenhang besteht zwischen G_f und $G_{f'}$?



:12 Suche alle Paare von Graphen, so dass der eine Graph G_f und der andere Graph $G_{f'}$ ist.




K
N
V
F
H
G
A
R
B
U
E

2. Allgemeine Definition

Bei Polynomen haben wir die Ableitung definiert als Grenzwert $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.
Dieser Ausdruck bedeutet geometrisch:

$m_s = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ ist die Steigung der Sekante, die die Kurvenpunkte (a|f(a)) und (x|f(x)) verbindet,

$\lim\limits_{x \to a} m_s$ ist die Steigung der Tangente im Kurvenpunkt (a|f(a)).

Dabei entsteht die Tangente als Grenzlage der Sekante, wenn der Sekantenpunkt (x|f(x)) in den Punkt (a|f(a)) übergeht.

So wie wir im vorigen Kapitel die Stetigkeit übertragen haben auf beliebige Funktionen, so erweitern wir jetzt auch den Begriff der Ableitung:

Definition:	Eine Funktion f heißt bei a differenzierbar, wenn der Grenzwert $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existiert. Liegt a am Rand der Definitionsmenge, dann muss der passende einseitige Grenzwert verwendet werden.

Dieser Grenzwert heißt Ableitung von f in der Stelle a, und man schreibt:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Beim praktischen Rechnen ist oft die h-Methode einfacher:

$$f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

Wie hängen Stetigkeit und Differenzierbarkeit zusammen?

Ist eine Funktion in a stetig, dann muss sie dort nicht differenzierbar sein.
Beispiele dazu finden sich im vorigen Kapitel (Ecken in Nahtstellen).

Ist aber eine Funktion in a differenzierbar, dann muss sie dort auch stetig sein. Klar machen kann man sich das so: Der Nenner $x - a$ des Differenzenquotienten hat für $x \to a$ den Grenzwert 0. Der Grenzwert des Differenzenquotienten kann nur dann existieren, wenn auch der Grenzwert des Zählers gleich 0 ist.

Das bedeutet: $\lim\limits_{x \to a}(f(x) - f(a)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) - f(a) = 0$,

das heißt $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, f ist also stetig bei a.

Die Differenzierbarkeit ist eine schärfere Forderung an eine Funktion als die Stetigkeit. Die Stetigkeit in a ist also nur notwendig, nicht aber hinreichend für die Differenzierbarkeit in a.

Aufgaben

1 Berechne die Ableitung $f'(a)$ mit der Definition $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

a) $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $a = 2$ **b)** $f(x) = \sqrt{x+1}$, $a = 3$

2 Berechne die Ableitung $f'(x)$ mit der Definition $f'(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

a) $f(x) = \frac{x}{x+1}$ **b)** $f(x) = \sqrt{x+1}$ **•c)** $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x+1}}$

:3 Zeige: Aus $|f(x)| \leqq x^2$ folgt $f'(0)=0$.

:4 a) Zeige: Ist f differenzierbar bei x, dann gilt $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$.

b) Deute den Term $\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$.

c) Zeige an der Funktion f mit $f(x) = |x|$,
dass die Umkehrung dieses Satzes falsch ist.

d) In der Computer-Numerik zieht man $n = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$ dem Term $m = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ vor, weil n bessere Näherungswerte für $f'(x)$ liefert.
Berechne für $f(x)=x^3$ den genauen Wert $f'(1)$ und die Näherungswerte für $h=0{,}1$ mit beiden Termen der Sekantensteigung.

:5 a) Zeige: Ist G_f symmetrisch zur y-Achse, so ist $G_{f'}$ symmetrisch zu O.

b) Zeige: Ist G_f symmetrisch zu O, so ist $G_{f'}$ symmetrisch zur y-Achse.