

Analysis anschaulich II

von

Friedrich BARTH und Gert KRUMBACHER

Vorwort

Mit der vorliegenden Neuauflage versuchen wir, die Stärken der früheren Anschaulichen Analysis zu wahren und zugleich mit unsern Erfahrungen der letzten 20 Jahre zu bereichern.

Ziel ist nach wie vor eine möglichst anschauliche Darstellung ohne Verzicht auf mathematische Exaktheit. Lehrtext und Übungen, darunter viele Bildaufgaben, betonen mehr die Einsicht in die Sachverhalte und weniger die theoretischen und technischen Details. So wird die Mathematik leichter zugänglich, ihre Schönheit schneller spürbar.

- Bei der Integralrechnung haben wir vor allem Wert gelegt auf die Anwendungen und den Umgang mit Integralen. Die Problematik des Flächeninhalts und die Konvergenzprobleme sind in den Hintergrund gerückt. Halb verstandene Lösungen sind schlimmer als offene Fragen !
- Die Identität $f(f^{-1}(x)) = x$ verwenden wir als entscheidendes Hilfsmittel beim Arbeiten mit Umkehrfunktionen (Umformung von Gleichungen und Ungleichungen, Ableitungen).
- Nach wie vor bieten wir den bewährten direkten Weg zur e-Funktion an, weil wir sie so ihrer Bedeutung entsprechend herausstellen können, sie also nicht als bloßes Anhängsel der ln-Funktion betrachten.
Der didaktische Trick von Felix Klein ist aber als Gegenstück angeboten, um dem Lehrplan Genüge zu tun.
- Bei der Technik des Integrierens schlagen wir übersichtliche und leicht nachvollziehbare Schemata vor, um dem Schüler die Arbeit zu erleichtern.

Im »Nachdenken« finden sich spannende Ausblicke und Anregungen zu tiefer gehender Beschäftigung, zum Beispiel in Facharbeiten.

Die Fülle von Anwendungsbeispielen und Aufgaben zeigt die Bedeutung der Mathematik auch in andern Disziplinen.

In 5 Zusätzen »Computer-Einsatz« führen wir dem Leser vor, wie der Rechner als Hilfsmittel dient. Wir verwenden die Software »Mathematica«, eines der mächtigsten Werkzeuge für Mathematik am Computer.

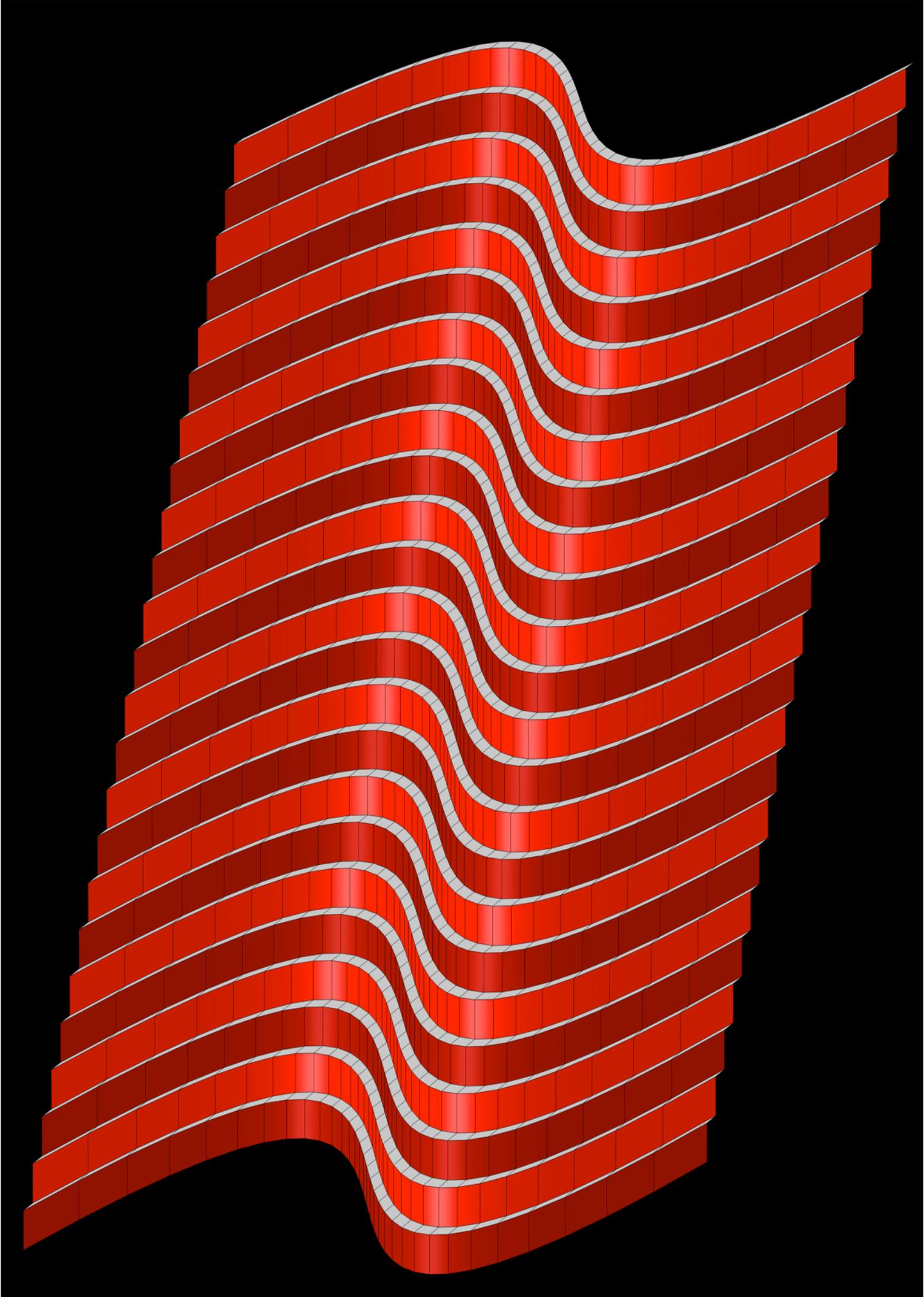
Symbole vor den Aufgaben-Nummern kennzeichnen den Typ:

- ◇ zur Übung sehr empfohlen
- schwierig
- schwieriger
- sehr schwierig

Friedrich Barth
München 2000

Gert Krumbacher

| | |
|---|-----|
| I. Stammfunktion | |
| 1. Blick zurück und Definition | 7 |
| 2. Unbestimmtes Integral | 11 |
| II. Bestimmtes Integral | |
| 1. Allgemeines | 22 |
| 2. Streifenmethode und Definition | 23 |
| 3. Eigenschaften | 33 |
| III. Hauptsatz | |
| 1. Integralfunktion | 42 |
| 2. Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung | 44 |
| IV. Anwendung der Integralrechnung | |
| 1. Flächeninhalt | 64 |
| 2. Volumen von Rotationskörpern | 71 |
| 3. Weg | 75 |
| 4. Arbeit | 76 |
| 5. Mittelwert | 79 |
| V. Umkehrfunktion und ihre Ableitung | |
| 1. Zur Erinnerung | 90 |
| 2. Ableitung der Umkehrfunktion | 94 |
| 3. Integration mit der Umkehrfunktion | 96 |
| VI. Exponentialfunktion | |
| 1. Definition | 99 |
| 2. Ableitung | 100 |
| 3. Eigenschaften | 102 |
| 4. Polynom- und Exponentialfunktion | 110 |
| 5. Integration | 113 |
| 6. Kurvendiskussion | 118 |
| 7. Anwendungen | 129 |
| 8. Ein anderer Zugang zur Exponentialfunktion | 139 |
| Logarithmusfunktion | |
| 1. Eigenschaften | 143 |
| 2. Grenzwerte und Kurvendiskussion | 154 |
| Rationale Funktion | |
| 1. Definitionen und Eigenschaften | 173 |
| 2. Anwendungen | 194 |
| Technik des Integrierens | |
| 1. Partielle Integration | 202 |
| 2. Substitutionsregel | 206 |
| 3. Uneigentliches Integral | 212 |
| Wurzel- und Arkus-Funktionen | |
| 1. Potenzfunktion mit rationalen Exponenten | 221 |
| 2. Arkusfunktionen | 226 |
| Anhang: Vollständige Induktion | 245 |



I. Stammfunktion

1. Blick zurück und Definition

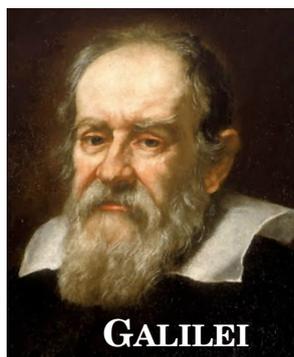


DESCARTES

Bisher haben wir uns beschäftigt mit einem der wichtigsten Probleme in der Geschichte der Mathematik, dem **Tangentenproblem**: Wie findet man in einem Kurvenpunkt die Tangente?

Die Griechen behandelten das Tangentenproblem bloß konstruktiv, und das nur bei Tangenten von Kreisen und Kegelschnitten.

René DESCARTES (1596 bis 1650) hielt das Tangentenproblem für eines der nützlichsten und allgemeinsten Probleme der Mathematik.



GALILEI

Auch Galileo GALILEI (1564 bis 1642) und Pierre de FERMAT (1601 bis 1665) erkannten Anfang des 17. Jahrhunderts die Bedeutung dieses Problems und fanden Lösungen für Sonderfälle. GALILEI kam von der Physik; er war durchdrungen von der Vorstellung, dass das »Buch der Natur« in mathematischer Sprache geschrieben sei. Damit fand er die grundlegenden Bewegungsgesetze der Mechanik und nahm so den Ableitungsbegriff vorweg. Sein Zeitgenosse FERMAT befasste sich intensiv mit Tangente und Ableitung bei Kurven. Er hatte nämlich einen Weg entdeckt, mit dem sich Extrempunkte von Polynomkurven finden ließen. Das Verfahren, nach dem wir im Band »Analysis Anschaulich 1« vorgegangen sind, folgt seinen Gedanken.



FERMAT

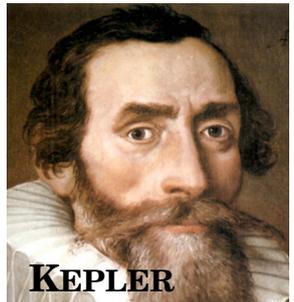
Neben der Tangentenfrage beschäftigte die Mathematiker ein weiteres, nicht minder wichtiges Thema:

das **Flächenproblem**: Wie bestimmt man den Inhalt einer Fläche, die von einer Kurve begrenzt ist?



CAVALIERI

Auch hier waren es wieder die Griechen, die Pionierarbeit geleistet haben. So hat ARCHIMEDES (287 bis 212 v.Chr.) den Flächeninhalt von Kreis und Parabelsegmenten berechnet. Sein Weg beruhte auf dem Exhaustionsverfahren (Ausschöpfung) von EUDOXOS (408 bis 355 v.Chr.). Dieser hatte den damals ja noch nicht vorhandenen Grenzwertbegriff so raffiniert umgangen, dass sich viele seiner Nachfolger von der Kompliziertheit seiner Rechentechnik abgeschreckt fühlten und sich mit weniger präzisen Verfahren und Begriffen zufrieden gaben.

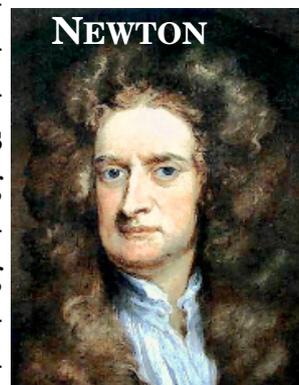


KEPLER

Auch Bonaventura CAVALIERI (1598 bis 1647) und Johannes KEPLER (1571 bis 1630) fanden erstaunliche Lösungen zu Flächen- und Volumenproblemen.

Bis zur Mitte des 17. Jahrhunderts war die Analysis eine Ansammlung von Einzelproblemen, deren jedes seine eigene mehr oder weniger komplizierte Lösung hatte. Erst den Bahnbrechern NEWTON und LEIBNIZ blieb es vorbehalten, die vielen Einzelabhandlungen in einer neuen großen Theorie zusammenzufassen.

Isaac NEWTON (1642 bis 1727) kam wie GALILIEI von der Mechanik. Er entwickelte die »Fluxionsrechnung«. In ihr untersuchte er Größen, die »Fluents«, und ihre Änderungsrate, die »Fluxionen«. So ist die Geschwindigkeit die Änderungsrate des Wegs mit der Zeit. Diese Änderungsrate kennen wir heute als Ableitung des Wegs nach der Zeit. Geometrisch steht dahinter das Tangentenproblem. 1666 fand er einen überraschenden Zusammenhang zwischen dem Tangenten- und dem Flächenproblem: Beide erwiesen sich als die 2 Seiten einer Medaille im »Hauptsatz der Differential- und Integral-Rechnung«. Die Theorie des »Calculus«, der Differential- und Integral-Rechnung also, war geboren.



Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1646 bis 1716) arbeitete zur selben Zeit, aber unabhängig von Newton, an den selben Fragen. Anders als Newton war er mehr von Geometrie und Arithmetik geprägt. Die Erfindung einer Symbolik erleichterte ihm das Entdecken und Beweisen von Sätzen der Differential- und Integral-Rechnung. Um 1675 fand auch er den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Er arbeitete mit unendlich kleinen Größen, was ihm viele Zeitgenossen als unverständlich ankreideten. Er nannte diese Größen »Differenziale« oder »infinitesimale« Größen; daher stammt auch der Begriff »Infinitesimal-Rechnung« für die Differential- und Integral-Rechnung.



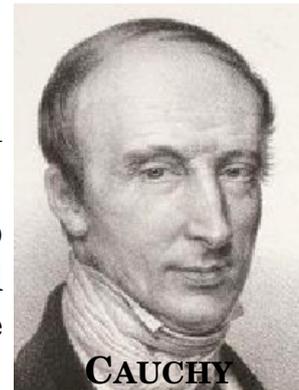
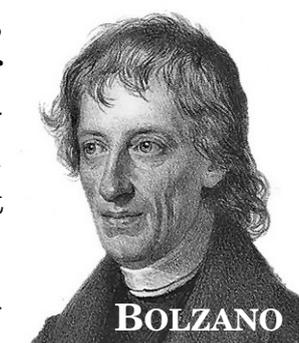
Beiden Meistern fehlte die heute übliche begriffliche Schärfe, weil ein entscheidender Begriff noch nicht bekannt war: der Grenzwert. Deshalb war die Infinitesimalrechnung in den folgenden 150 Jahren der Kritik scharfsinniger Theoretiker ausgesetzt. Andererseits arbeiteten viele Mathematiker ganz unbefangen mit den neuen Techniken und fanden spektakuläre Ergebnisse.

Erst im 19. Jahrhundert gelingt die logisch saubere Grundlegung. Herausragende Leistungen stammen von:

Bernhard BOLZANO (1781 bis 1841), böhmischer Priester, formuliert 1817 den Begriff der **Stetigkeit**.

Augustin-Louis CAUCHY (1789 bis 1857) präzisiert 1821 den **Grenzwert**.

Karl WEIERSTRAB (1815 bis 1897) und Richard DEDEKIND (1831 bis 1916) beschreiben die Menge der reellen Zahlen und festigen damit die Grundlagen der Analysis so, wie wir sie heute kennen.



NEWTON und LEIBNIZ stellten oft fest, dass sie beim Lösen geometrischer oder physikalischer Aufgaben eine Funktion aus ihrer (bekannten) Ableitung rekonstruieren mussten. Weil dieser Vorgang die Umkehrung der Differenziation ist, nannten sie ihn Antidifferenziation.

Eines ihrer Beispiele hätte so aussehen können:

Die Geschwindigkeit v eines Körpers sei abhängig von der Zeit: $v=f(t)=3t$.

Welchen Weg legt der Körper zwischen $t_1=2$ und $t_2=4$ zurück?

Bei Beispielen aus der Physik rechnen wir der Einfachheit halber nur mit den Maßzahlen der Größen.

In heutiger Sprechweise würde man die Lösung so finden:

Die Geschwindigkeitsfunktion f ist die Ableitung der Zeit-Ort-Funktion F .

Es gilt $F'(t)=f(t)$.

Gesucht ist eine Funktion F mit $F'(t)=3t$.

Wegen der Ableitungsregeln können wir einen Term $F(t)$ erraten: $F(t)=\frac{3}{2}t^2$.

Der zurückgelegte Weg liegt zwischen den Orten $F(4)=24$ und $F(2)=6$, hat also die Länge $F(4)-F(2)=18$.

Man hätte ebenso den Term $F_{13}(t)=\frac{3}{2}t^2+13$ erraten können, denn auch hier gilt $F'_{13}(t)=3t$.

Doch auf die Weglänge hat das keinen Einfluss:

$$F_{13}(4) - F_{13}(2) = (24+13) - (6+13) = 18$$

Definition: Eine Funktion F heißt **Stammfunktion** der Funktion f auf einem Intervall I , wenn für alle x aus I gilt:
 f ist die Ableitung von F , das heißt $f(x) = F'(x)$ für $x \in I$.

Ist die Definitionsmenge kein Intervall, so wird's schwieriger – siehe Nachdenken 1.

So hat die Funktion f mit $f(x)=3x$ für $x \in \mathbb{R}$ im Beispiel oben Stammfunktionen mit den Termen

$$F_0(x) = \frac{3}{2}x^2$$

$$F_{13}(x) = \frac{3}{2}x^2 + 13$$

Einen tieferen Einblick in den Zusammenhang zwischen einer Funktion f und ihren Stammfunktionen gibt das

Beispiel: $f(x) = -x^2 + 4x - 3$, $I = D_f = \mathbb{R}$

Durch Probieren findet man mit den Ableitungsregeln

$$F_0(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x$$

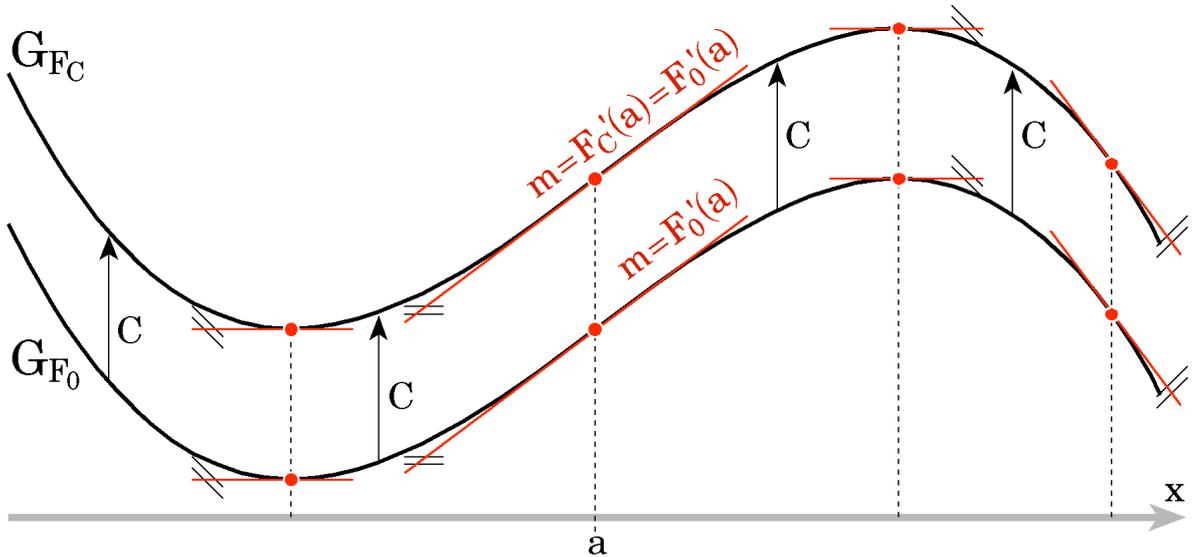
Weil die Ableitung einer Konstante gleich 0 ist, findet man durch Addieren von Konstanten leicht weitere Stammfunktionen. Wir unterscheiden ihre Terme, indem wir die Konstante zugleich als Index von F verwenden

$$F_1(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x + 1$$

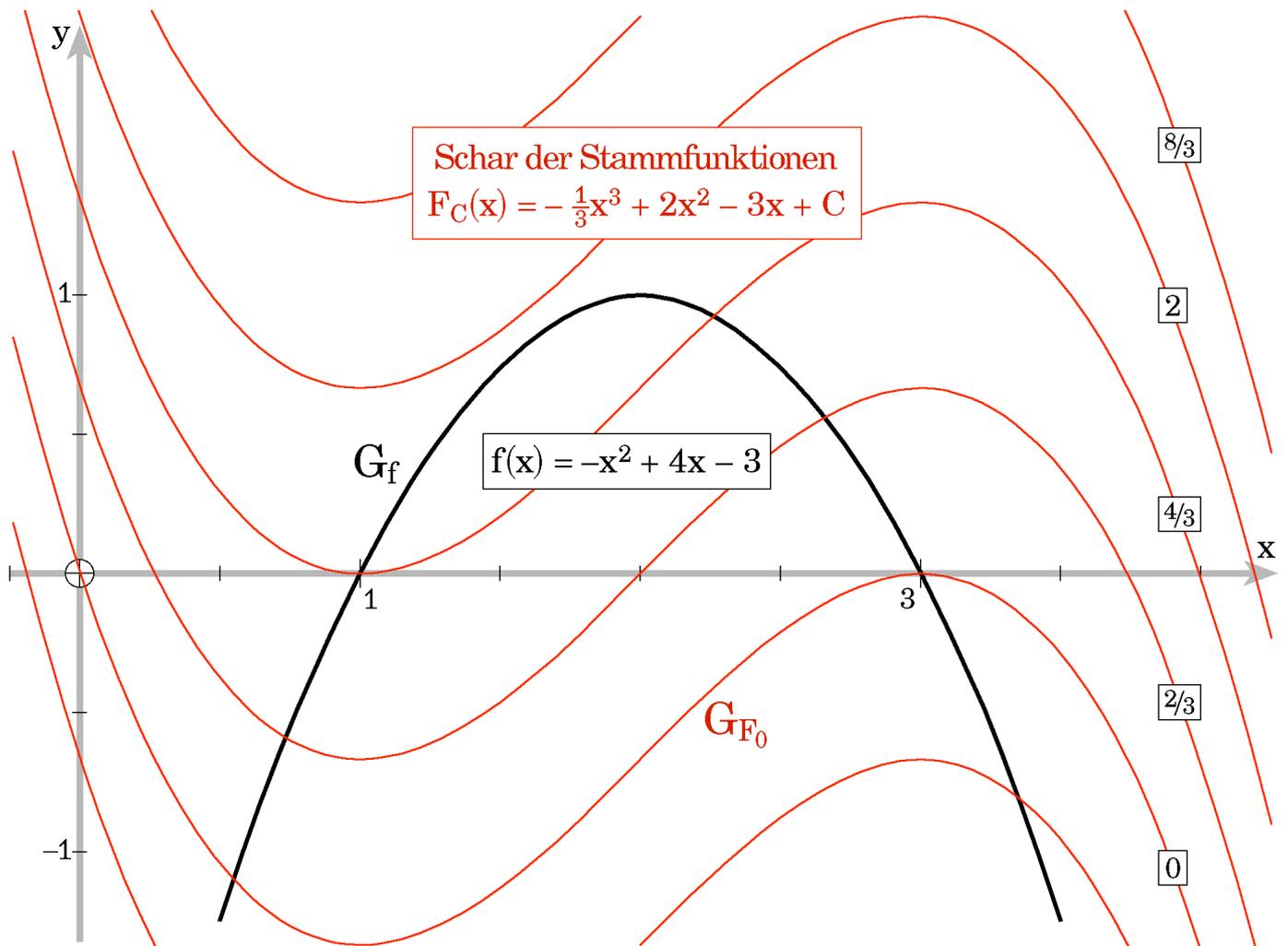
$$F_{-\sqrt{2}}(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x - \sqrt{2}$$

$$F_{1642}(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x + 1642$$

Die Stammfunktionen einer Funktion f bilden eine Schar F_C mit $F_C(x) = F_0(x) + C$. Die Terme $F_C(x)$ entstehen aus $F_0(x)$ durch Addition der Konstante C , die zugehörigen Scharkurven entstehen aus dem Graphen von F_0 durch Verschiebung um C in y -Richtung.



Beim Verschieben in y -Richtung bleibt die Richtung der Tangente an der Stelle a gleich; deshalb stimmen die Ableitungen in a überein.



Das Addieren von Konstanten ist ein Verfahren, um aus einer Stammfunktion F_0 weitere Stammfunktionen F_C zu erzeugen. Tatsächlich findet man so **alle** Stammfunktionen.

Ist D_f ein Intervall und gilt $F'(x) = f(x)$ für $x \in D_f$, so hat dort jede Stammfunktion G von f den Term $G(x) = F(x) + C$ mit $C \in \mathbb{R}$.

Begründung: Ist H eine beliebige Stammfunktion von f auf D_f ,
dann gilt für d mit $d(x) = H(x) - F(x)$
 $d'(x) = H'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$.
Weil die Differenzfunktion d die Ableitung 0 hat,
ist sie konstant $d(x) = C$ und es gilt $H(x) = F(x) + C$.

2. Unbestimmtes Integral

Seit LEIBNIZ ist es üblich, den Satz » f hat die Stammfunktion F «
symbolisch zu schreiben als $\int f(x) dx = F(x)$.

Weil mit $F(x)$ auch $F(x)+C$ Term einer Stammfunktion ist,
schreibt man meist $\int f(x) dx = F(x) + C$.

Diese Schreibweise bedeutet:

Die rechte Seite $F(x)+C$ ist Term einer beliebigen Stammfunktion von f .

Das Symbol $\int f(x) dx$ nennt man **unbestimmtes Integral** von f .

Auch das Integralzeichen \int stammt von Leibniz, es ist ein stilisiertes S .

Zwischen \int und dx steht der Term $f(x)$, er heißt **Integrand**.

Die Funktion f heißt **Integrandfunktion**.

Das Symbol dx ist ein Hinweis auf die **Integrationsvariable** x .

In der Mathematik handhabt man die Begriffe »Stammfunktion« und »unbestimmtes Integral« nicht einheitlich. Manche verstehen sie gleichbedeutend, andre verstehen unter dem unbestimmten Integral die Menge aller Stammfunktionen.

Im vorigen Beispiel haben wir (durch Probieren) die Differenziation rückgängig gemacht, um eine Stammfunktion zu finden. In diesem Sinn ist die unbestimmte Integration die Umkehrung der Differenziation und es gilt

$$(\int f(x) dx)' = f(x) \quad \text{und} \quad \int f'(x) dx = f(x) + C$$

oder in der Schreibweise von LEIBNIZ

$$\frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x) \quad \text{und} \quad \int \frac{d}{dx} f(x) dx = f(x) + C.$$

Deswegen liefert jede Ableitungsformel sofort eine Formel fürs unbestimmte Integral.

Die wichtigste Formel gibt das unbestimmte Integral für Potenzen von x an

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \quad n \in \mathbb{Z} \text{ und } n \neq -1$$

Begründung $\left(\frac{1}{n+1} x^{n+1}\right)' = x^n, n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$

Die Formel gilt für alle ganzen Zahlen n außer $n=-1$. Es gibt keine x -Potenz mit der Ableitung $1/x$, aber wir werden später das unbestimmte Integral $\int 1/x dx$ noch untersuchen. Die Formel gilt sogar, wenn der Exponent ein Bruch oder eine beliebige reelle Zahl ($\neq -1$) ist.

Sonderfälle

$$\int a dx = ax + C$$

Begründung $(ax)' = a$

$$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$$

Begründung $\left(-\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}$

$$\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + C$$

Begründung $\left(\frac{2}{3} \sqrt{x^3}\right)' = \sqrt{x}$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$$

Begründung $(2\sqrt{x})' = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Auch einfache trigonometrische Terme lassen sich integrieren

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

Begründung $(\sin x)' = \cos x$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

Begründung $(-\cos x)' = \sin x$

Ähnlich überlegt man sich die einfachsten **Integrationsregeln**:

Sind F und G Stammfunktionen von f und g , dann gilt

Faktorregel $\int a \cdot f(x) dx = a \int f(x) dx = a \cdot F(x) + C$ für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Begründung $(a \cdot F(x))' = a \cdot F'(x) = a \cdot f(x)$

also $\int a \cdot f(x) dx = aF(x) + C = a(F(x) + C^*) = a \int f(x) dx$

Summenregel $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx = F(x) + G(x) + C$

Begründung $(F(x) + G(x))' = f(x) + g(x)$ oder auch

$$\int (f(x) + g(x)) dx = F(x) + G(x) + C = (F(x) + C_1) + (G(x) + C_2) = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

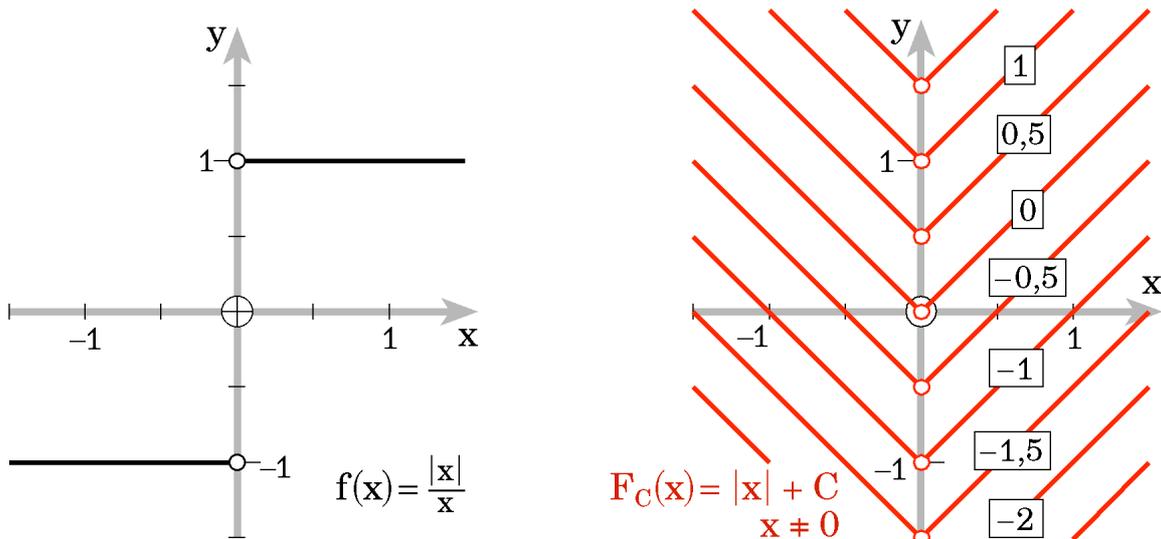
Zum Nachdenken

1 Warum Stammfunktion auf einem Intervall ?

Unsere Definition der Stammfunktion legt ein Intervall als Bereich für die x-Werte zugrunde. Wäre dem nicht so, dann müsste man in jedem getrennt liegenden Teilintervall eine eigene Integrationskonstante verwenden, um alle möglichen Stammfunktionen zu erfassen.

Beispiel: $f(x) = \frac{|x|}{x}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Eine Stammfunktion ist $F(x) = |x|$, $D_F = D_f$.

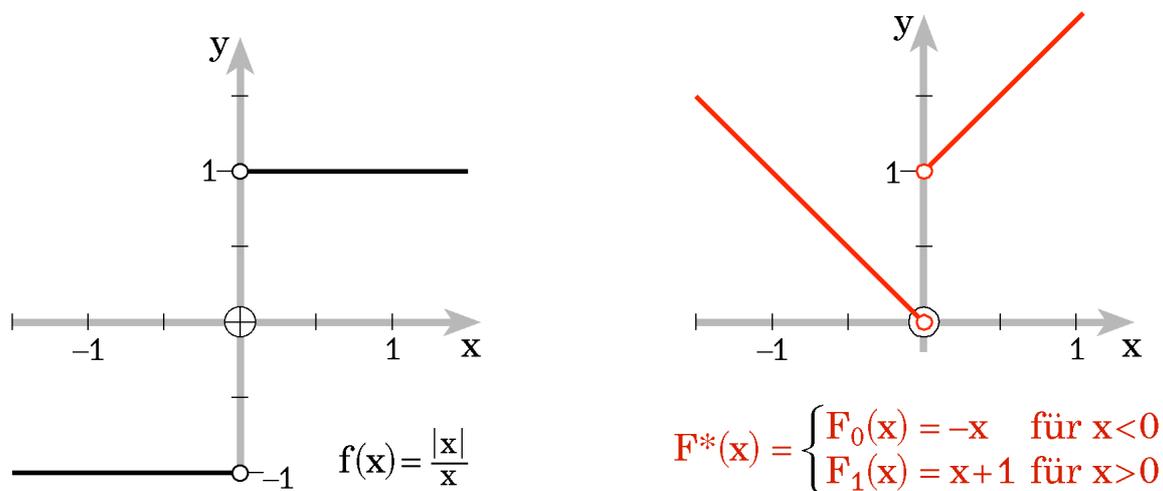


Die Schar mit dem Term $F_C(x) = |x| + C$ enthält zwar unendlich viele Stammfunktionen, aber längst noch nicht alle, denn F^* mit

$$F^*(x) = \begin{cases} -x & \text{für } x < 0 \\ x+1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

ist eine Stammfunktion von f , aber nicht in der Schar F_C .

Das liegt daran, dass D_f nicht ein Intervall ist, sondern aus 2 getrennten Intervallen \mathbb{R}^+ und \mathbb{R}^- besteht. In jedem Intervall können wir eine Schar von Stammfunktionen bilden unabhängig vom andern Intervall.



Besteht der zugrunde gelegte x-Bereich aus mehreren getrennten Intervallen, dann ist eine Fallunterscheidung nötig – was eine weitere Bearbeitung recht mühsam machen kann.

② Das unbestimmte Integral als Menge von Stammfunktionen

Beim Umgang mit dem Symbol $\int f(x) dx$ muss man aufpassen:

Aus $\int f(x) dx = F_1(x)$ und $\int f(x) dx = F_2(x)$ folgt nur $F_1'(x) = F_2'(x)$, nicht aber $F_1(x) = F_2(x)$. Denn $\int f(x) dx$ bedeutet eine **beliebige** Stammfunktion; das kommt zum Ausdruck in der additiven Konstante $C \in \mathbb{R}$.

Durchläuft C alle möglichen Werte, dann entsteht die Menge aller möglichen Stammfunktionen. Deshalb verstehen manche Autoren unter $\int f(x) dx$ nicht eine beliebige Stammfunktion, sondern die Menge aller Stammfunktionen. Eine solche Deutung macht das Arbeiten mit $\int f(x) dx$ etwas schwerfällig. Deswegen verwenden wir die erste Deutung.

③ Konstanter Faktor 0

Die Integrationsregel $\int a \cdot f(x) dx = a \cdot \int f(x) dx$ gilt nur für $a \neq 0$. Ist $a = 0$, so ergibt sich

$$\text{links} \quad \int 0 \cdot f(x) dx = \int 0 dx = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\text{rechts} \quad 0 \cdot \int f(x) dx = 0 \cdot (F(x) + C) = 0$$

Links steht also eine beliebige Stammfunktion, rechts nur die spezielle Stammfunktion mit dem Term 0.

④ Woher kommt C ?

In der Begründung auf Seite 8 steht:

»Weil die Differenzfunktion d die Ableitung 0 hat, ist sie konstant.«

Dies klingt zwar selbstverständlich, muss aber bewiesen werden.

Das geht mit dem Mittelwertsatz: Liegen x_1 und x_2 im Intervall I , dann ist nach dem

Mittelwertsatz die Sekantensteigung $\frac{d(x_2) - d(x_1)}{x_2 - x_1}$ gleich der Tangentensteigung $d'(x_m)$

an einer »mittleren« Stelle x_m zwischen x_1 und x_2 . Nach Voraussetzung gilt $d'(x_m) = 0$

und damit gilt nach dem Mittelwertsatz $d(x_1) - d(x_2) = 0$, also $d(x_1) = d(x_2)$.

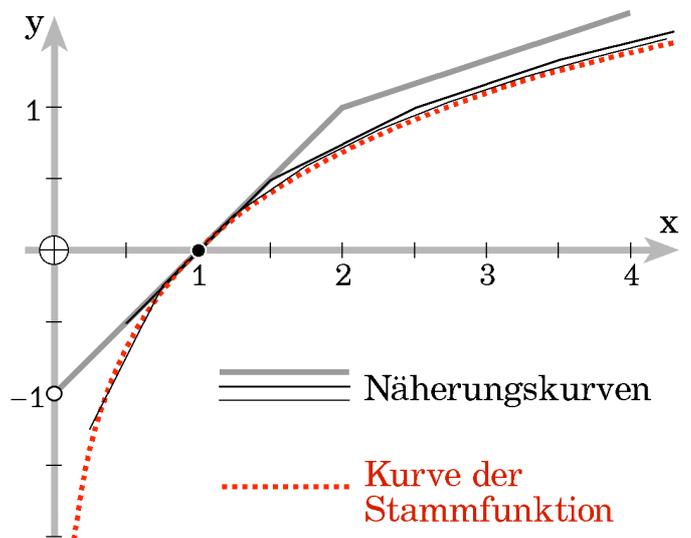
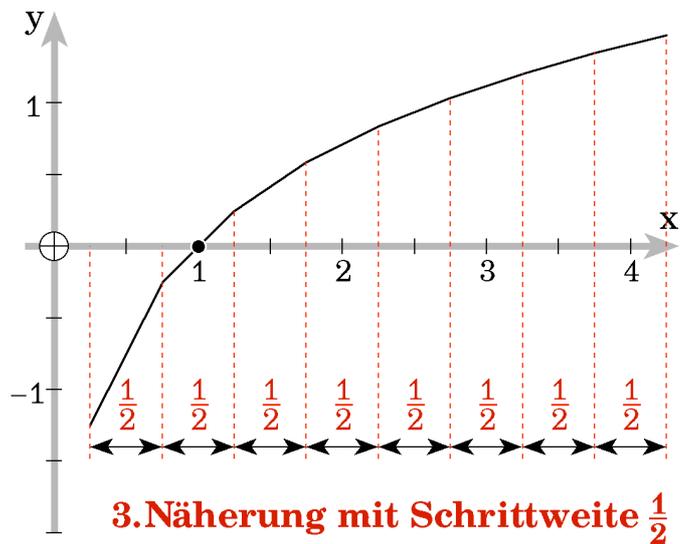
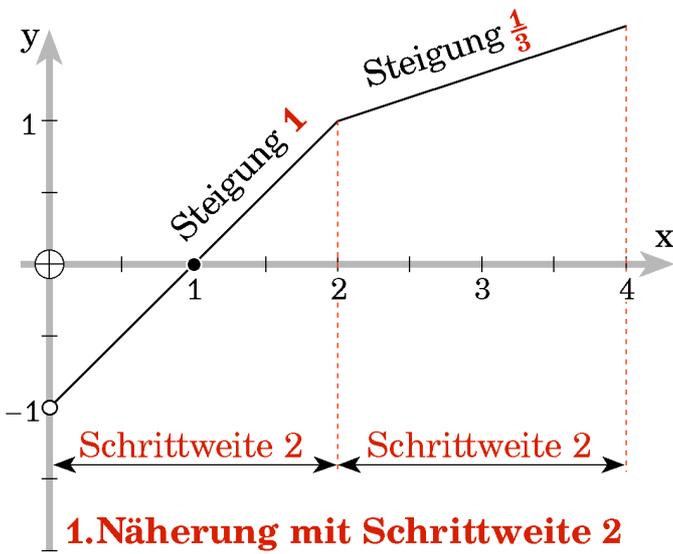
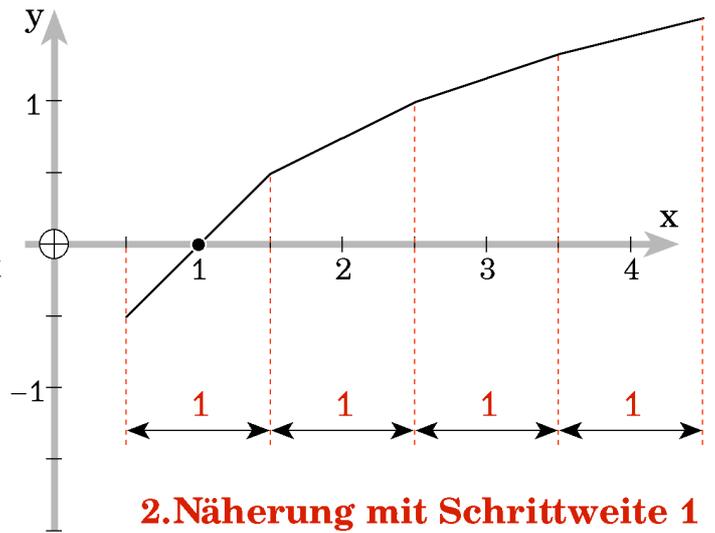
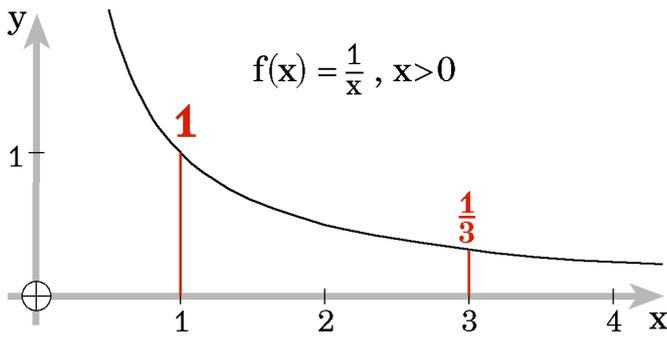
Weil x_1 und x_2 beliebig aus dem Intervall I gewählt sind, ist d auf I konstant.

⑤ Grafische Integration

Was machen wir, wenn uns von einer Funktion f keine Stammfunktion bekannt ist? Praktiker weichen dann auf Näherungslösungen aus. Ein mögliches Näherungsverfahren ermittelt einen Näherungsgraphen und heißt deshalb **grafische Integration**.

Von der Funktion f mit $f(x) = 1/x$, $x > 0$ kennen wir keine Stammfunktion. Deshalb versuchen wir, den Graphen G_F einer Stammfunktion F näherungsweise zu konstruieren.

Als Beispiel suchen wir den Graphen, der durch den Punkt $P(1|0)$ geht. Wir erinnern uns daran, dass $f(x)$ die Steigung der Tangente von G_F im Punkt $(x|F(x))$ ist. Wir ersetzen ein Stückchen des Graphen G_F in $P(1|0)$ durch eine Strecke, deren Steigung $f(1)$ ist. Macht man das entsprechend für andere Punkte, so ergibt sich ein Streckenzug, der G_F annähert wiedergibt – und zwar um so besser, je kürzer die Strecken sind, je kleiner also die Schrittweite auf der x -Achse ist.



Aufgaben

- ◇1** Berechne **a)** $\int x \, dx$ **b)** $\int x^5 \, dx$ **c)** $\int 6x^2 \, dx$
 d) $\int (x^2+1) \, dx$ **e)** $\int 5 \, dx$ **f)** $\int dx$
 g) $\int 0 \, dx$ **h)** $0 \int dx$ **i)** $\int (3x^2-2x+1) \, dx$
 j) $\int (\cos x - \sin x) \, dx$ **k)** $\int \frac{9}{4}\sqrt{x} \, dx$ **l)** $\int -\frac{1}{4}\sqrt{x} \, dx$
 m) $\int \frac{x^3+x^2-1}{x^2} \, dx$ **n)** $\int \frac{x\sqrt{x}+1}{x^2} \, dx$ **o)** $\int \frac{3x-1}{\sqrt{x}} \, dx$

◇2 Berechne den Term der Stammfunktion von f , deren Graph durch P geht.

- a)** $f(x) = \frac{1}{2}x$ $P(-2|4)$ **b)** $f(x) = x^2-2x-1$ $P(3|-2)$
c) $f(x) = \cos x + 1$ $P(\pi|\pi)$ **d)** $f(x) = 0$ $P(2000|2000)$

•3 $f(x) = 2x - 2$

Berechne die Terme der Stammfunktionen von f , für die gilt

- a)** alle Funktionswerte sind positiv
b) an einer Nullstelle ist die Steigung gleich 2
c) G_F berührt G_f

•4 $f(x) = -x^2 + 4x - 3$

Berechne die Terme der Stammfunktionen von f , für die gilt

- a)** der Tiefpunkt hat die Ordinate 2
b) der Graph berührt die x -Achse
c) der Wendepunkt liegt auf der Winkelhalbierenden des 1. Quadranten

◇5 Zeige die Richtigkeit von

- a)** $\int (x^2-x) \, dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + C$ **b)** $\int \sqrt{x} \, dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$
c) $\int \frac{1}{x^2} \, dx = -\frac{1}{x} + C$ **d)** $\int (\sin x)^2 \, dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C$
e) $\int (\cos x)^2 \, dx = \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x) + C$ **f)** $\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} \, dx = -\sqrt{a^2-x^2} + C$

•6 Welcher Zusammenhang besteht zwischen C_1 und C_2 ?

$$\int (\sin x)^2 \, dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C_1$$

$$\int (\sin x)^2 \, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}(\sin x - \cos x)^2 + C_2$$

•7 $f(x) = (x-2)\sqrt{x+1}$

Berechne $f'(x)$ und vereinfache das Ergebnis; bestimme damit $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} \, dx$.

•8 $f(x) = (\cos x)^3$ Berechne $f'(x)$ und schreibe das Ergebnis so, dass nur Potenzen von $\sin x$ vorkommen; bestimme damit $\int (\sin x)^3 dx$.

9 Gegeben sind die Terme $i_a(x)$ bis $n_k(x)$. Bestimme die Scharterme $I_a(x)$ bis $N_k(x)$ der zugehörigen Stammfunktionen.

$$i_a(x) = \frac{4}{3a^2}x^3 - \frac{3}{a}x^2$$

$$j_s(x) = 12x(x-s)^2$$

$$k_t(x) = 10x^2(3x^2 - 2tx + 3)$$

$$l_k(x) = 4x(x^2 - 3kx + k^2 - 4)$$

$$m_a(x) = 4x(x^2 - 3ax + 3a^2x - 12)$$

$$n_k(x) = x(8k^3x^2 - 216k^2x + 2k + 72)$$

◊10 Berechne

| | | |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| a) $\int a^2x dx$ | b) $\int a^2x da$ | c) $\int ax^2 dx$ |
| d) $\int ax^2 dt$ | e) $\int dx$ | f) $\int dt$ |
| g) $\int (ax+a+1) dx$ | h) $\int (ax+a+1) da$ | i) $\int (ax+a+1) dt$ |

•11 Berechne das Integral. Welche Einschränkungen für $n \in \mathbb{Z}$ sind nötig?

a) $\int x^{n+1} dx$

b) $\int x^{n-1} dx$

c) $\int x^{1-n} dx$

d) $\int x^{-n} dx$

e) $\int x^{2-n} dx$

f) $\int x^{2n-1} dx$

•12 Berechne

| | |
|----------------------------|---|
| a) $\int x dx, x \neq 0$ | b) $\int \operatorname{sgn} x dx, x \neq 0$ |
|----------------------------|---|

•13 Bestimme für die Schrittweite Δx den Näherungsgraphen einer Stammfunktion von f durch Punkt P . (Integration nach rechts!)
 Zeichne auch die exakten Graphen (für **c**) und **d**) siehe Aufgabe •12 b).

a) $f(x) = x - 2$ $\Delta x = 1$ $P(0|1)$ 5 Schritte

b) $f(x) = x - 2$ $\Delta x = 0,5$ $P(0|1)$ 10 Schritte

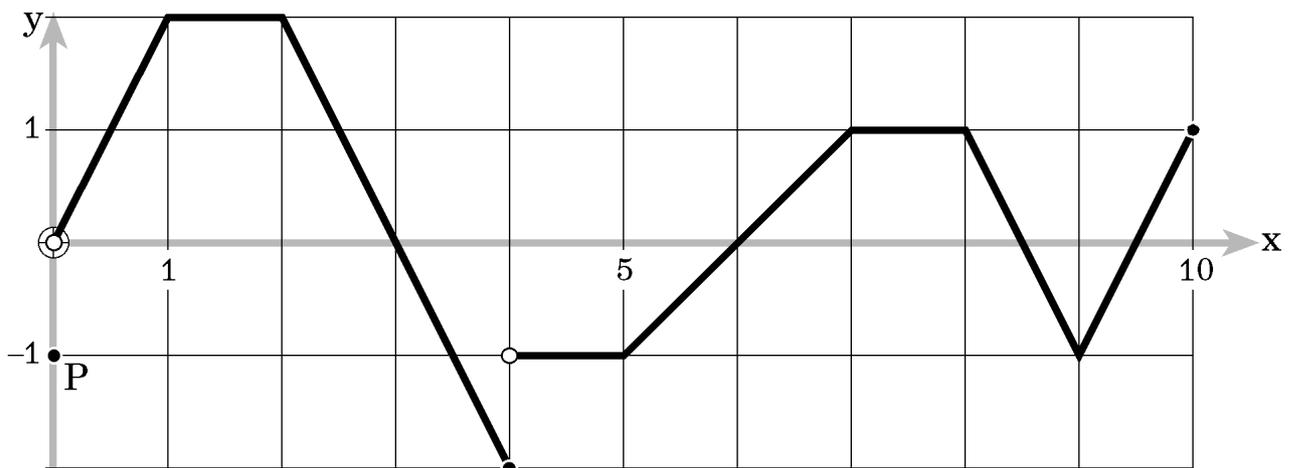
c) $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot \operatorname{sgn}(x-1)$ $\Delta x = 1$ $P(0|0)$ 3 Schritte

d) $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot \operatorname{sgn}(x-1)$ $\Delta x = \frac{1}{2}$ $P(0|0)$ 5 Schritte

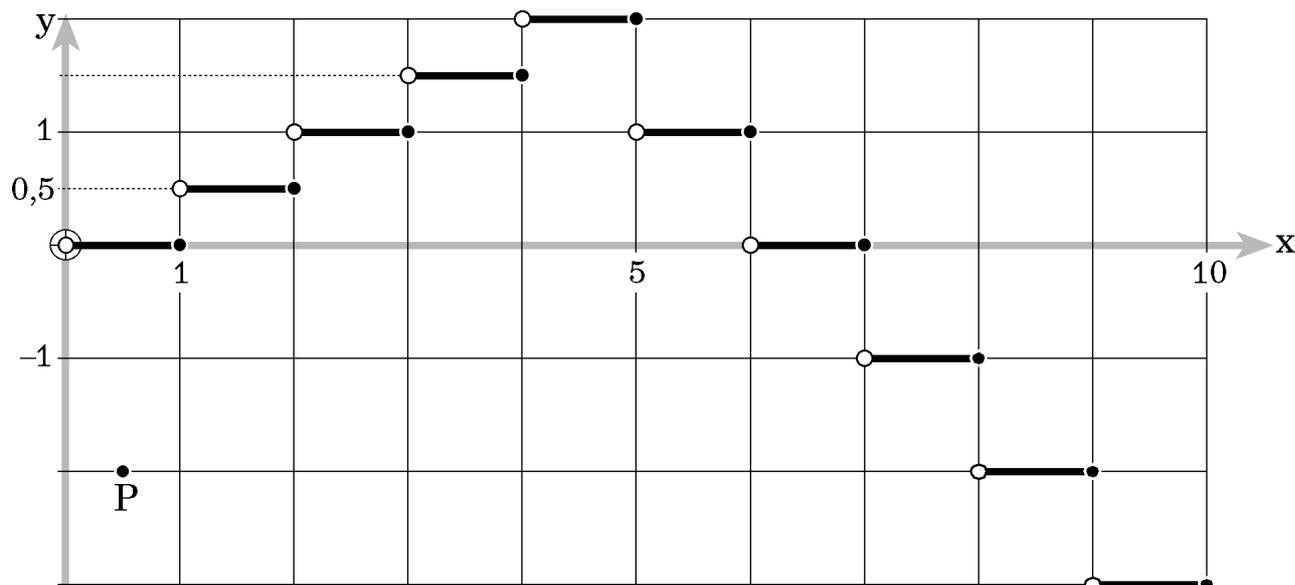
•14 Bestimme für die Schrittweite Δx zum gezeichneten Graphen G_f den Näherungsgraphen einer Stammfunktion durch Punkt $P(0|-1)$.

a) $\Delta x = 1$

b) $\Delta x = 0,5$



- 15 Bestimme für die Schrittweite $\Delta x=1$ zum gezeichneten Graphen G_f den Näherungsgraphen einer Stammfunktion durch Punkt $P(0,5|-2)$.



◊16 $f(x) = -\frac{1}{16}x^3 - \frac{3}{8}x^2$

- Bestimme von G_f :
Ort und Art der Waagrecht- und Flachpunkte,
Tangente im Flachpunkt.
Zeichne Tangente und Polynomkurve G_f .
(KOSY: $-9 < x < 4$ $-10 < y < 10$)
- Bestimme die Schar F_C der Stammfunktionen und speziell von F_0 :
Ort und Art der Waagrecht- und Flachpunkte,
Tangenten in den Achsen- und Flachpunkten.
Zeichne die Polynomkurve G_{F_0} .
- Für welche Werte von C :
berührt G_{F_C} die x -Achse,
liegen die Flachpunkte auf der x -Achse,
ist die Gerade $y = -2x$ Tangente von G_{F_C} ?
- Bestimme von G_f alle markanten Punkte und zeichne G_f .
Welcher grafischer Zusammenhang besteht zwischen G_f und F_C ?
- Berechne die Schnittstellen (exakt!) von G_f und G_{F_0}
und die Ordinaten (Näherungswerte) der Schnittpunkte.
Was bedeuten diese Ordinaten anschaulich für G_{F_0} ?

Computer-Einsatz: Grafische Integration

Die grafische Integration ist ein gefundenes Fressen für Computer. Bei geeigneter Software und Programmierung liefern Rechner auf Knopfdruck Näherungskurven von beliebiger Genauigkeit – und das obendrein für Integranden, für die wir keine Stammfunktion kennen – wie zum Beispiel für $f(x) = 2^{-x^2}$.

Um diese Funktion soll es nun gehen. Wir geben vor: den »StartPunkt« $P(0|0)$, durch den die angenäherten Stammfunktions-Kurven laufen sollen, und die Schrittweite »Xschritt«. Xschritt mal »SchrittZahl« ist dann das Integrations-Intervall I.

In I darf keine senkrechte Asymptote von f liegen, wohl aber sind Stellen erlaubt, in denen f endliche Sprünge macht (Löcher, Unstetigkeits-Stellen).

Der »Xwert« von P ist die untere Grenze des Integrations-Intervalls.

Die rechnerische Abwicklung könnte in »Mathematica« so aussehen wie im Kasten unten:

Die 1. Zeile ist das Eingangstor, es liefert dem Modul alle nötigen Parameter.

Die 10 lokalen Variablen sind dahinter in Schweifklammern aufgelistet (2. Zeile).

Die 5 fett gedruckten Zeilen enthalten die Rechenarbeit.

Die Hauptarbeit, das Aneinander-Hängen der Steigungs-Vektoren, erledigt »FoldList«.

Die letzten 6 Zeilen sorgen fürs Bild auf dem Monitor. Es ist bewusst schlicht gehalten, denn mit den grafischen Ansprüchen wächst der Programmier-Aufwand enorm – und das würde ablenken vom hier gesteckten Ziel.

Auf der nächsten Seite finden sich die spartanische Darstellung der Integranden-Kurve und 4 angenäherten Stammfunktions-Kurven. Xschritt mal SchrittZahl ist einheitlich gewählt als 4.

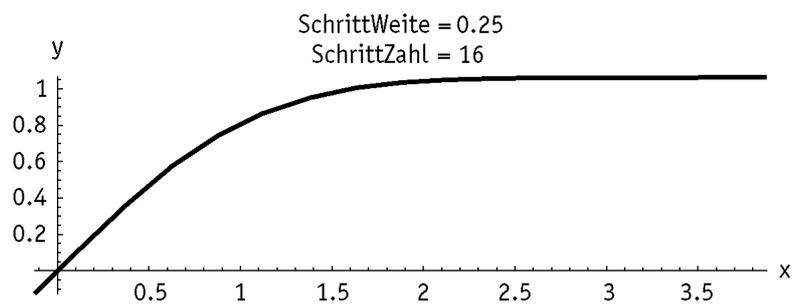
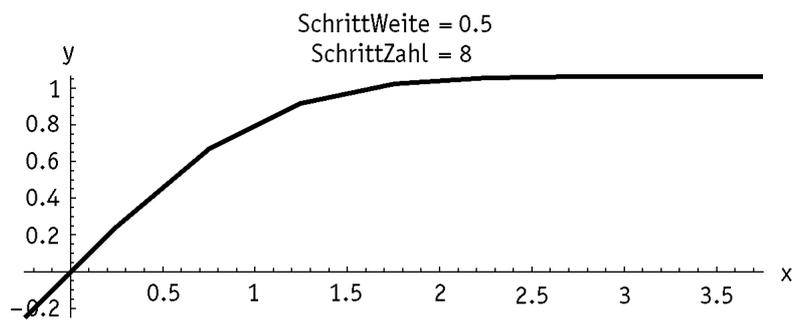
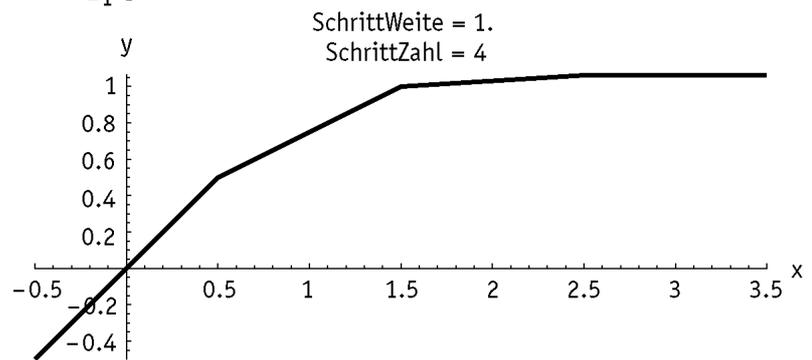
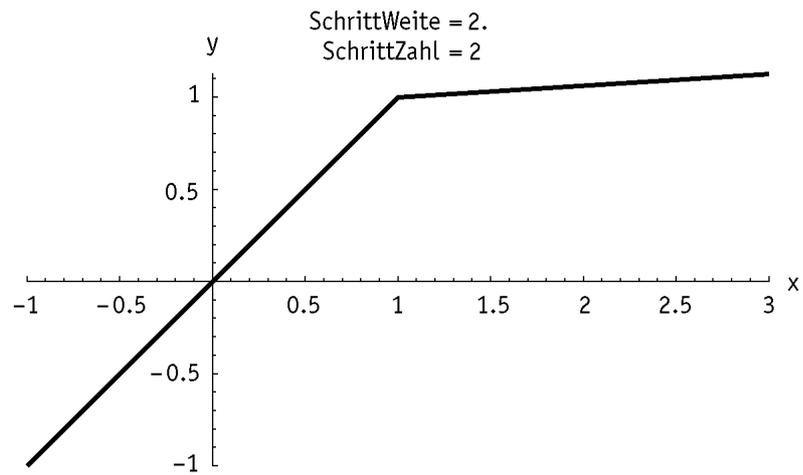
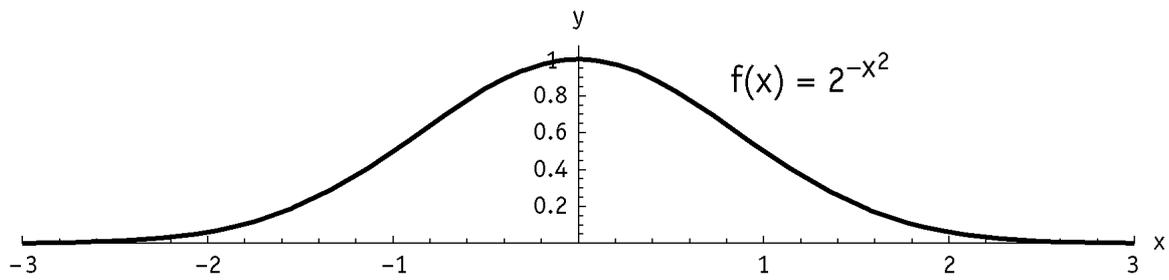
```
f[x_]=2^(-x^2); StartPunkt={0.,0.}; Xschritt=1/4; SchrittZahl=16; (* Parameterwahl *)
```

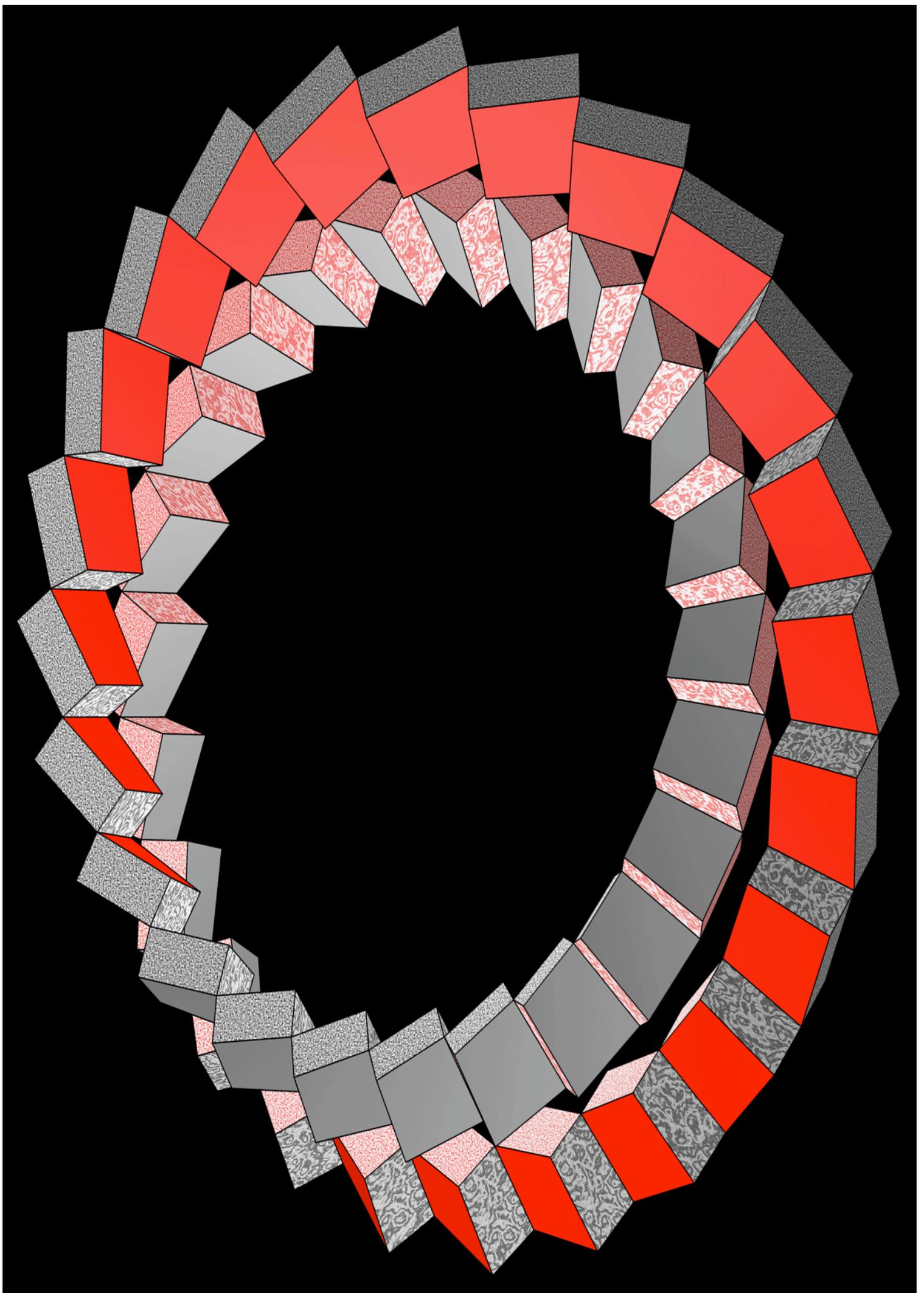
```
GrafischeIntegration[f, StartPunkt, Xschritt, SchrittZahl]; (* Aufruf von »GrafischeIntegration« *)
```

```
GrafischeIntegration[f_Symbol, {Xstart_Real, Ystart_Real}, Xschritt_?NumberQ, SchrittZahl_Integer?Positive]:=
Module[{dx=Abs[Xschritt]/N, Xstellen, Steigungen, Vektoren, StartEcke, Ecken, Xmin, Xmax, Ymin, Ymax},

Xstellen = Table[Xstart+N*dx, {N,0,SchrittZahl}];
Steigungen = f[Xstellen];
Vektoren = Table[{dx, Steigungen[[k]]*dx}, {k, 1, SchrittZahl}];
StartEcke = {Xstart,Ystart} - 0.5*Vektoren[[1]];
Ecken = FoldList[Plus, StartEcke, Vektoren];

Xmin=Min[0, Min[Map[#[[1]]&, Ecken]]]; Xmax=Max[0,Max[Map[#[[1]]&, Ecken]]];
Ymin=Min[0, Min[Map[#[[2]]&, Ecken]]]; Ymax=Max[0,Max[Map[#[[2]]&, Ecken]]];
ListPlot[Ecken, PlotJoined->True, AxesOrigin->{0,0},
  Axes->True, AxesLabel->{x,y}, PlotRange->{{Xmin,Xmax}, {Ymin,Ymax}},
  PlotLabel->"SchrittWeite = "<>ToString[dx]<>"\n SchrittZahl = "<>ToString[SchrittZahl],
  ImageSize->{300,300}
]
]
```

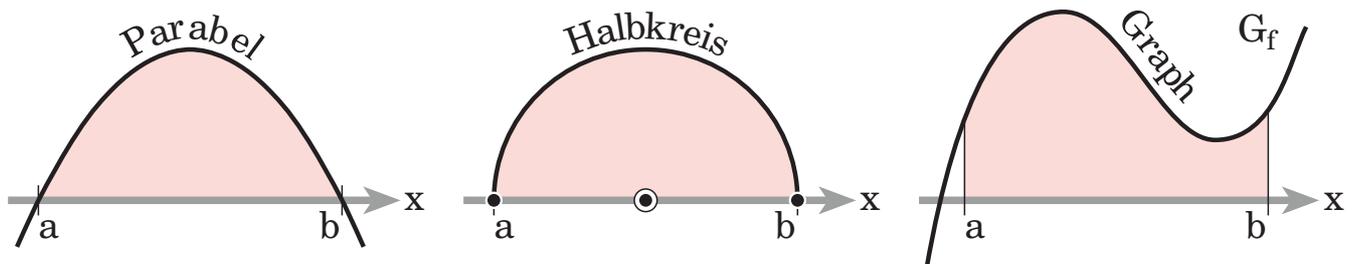




II. Bestimmtes Integral

1. Allgemeines

Die Berechnung des Inhalts krummrandiger Flächenstücke ist ein zentrales Thema der Analysis. Beispiele für Flächenstücke, die begrenzt sind von einer Kurve, der x-Achse und 2 Ordinaten (Strecken senkrecht zur x-Achse):



In der Geometrie ist man von Haus aus an solchen Flächeninhalten interessiert – aber auch Praktiker sind oft darauf angewiesen, wenn sie Lösungen ihrer nicht-geometrischen Probleme suchen.

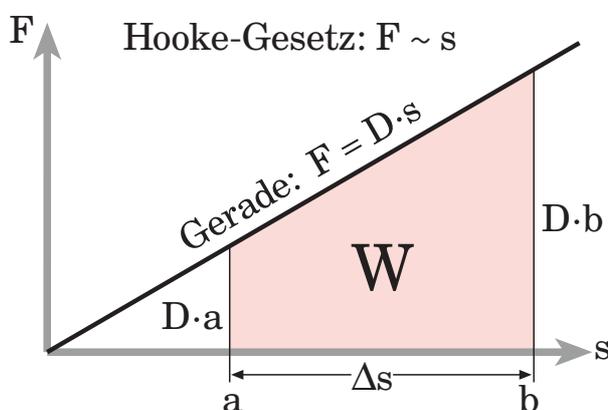
Produkte wie:

| | | |
|----------------|---|------------------------|
| Rechteckfläche | = | Länge · Breite |
| Prismavolumen | = | Grundfläche · Höhe |
| Arbeit | = | Kraft · Weg |
| Weg | = | Geschwindigkeit · Zeit |

lassen sich als Rechteckflächen deuten. Veranschaulicht man die Faktoren als Koordinaten x und y , dann ist auch jeder Flächeninhalt des Rechtecks mit den Seiten x und y ein Maß für die Größe, die man mit diesem Produkt ausdrückt.

Gewöhnlich hängt der eine Faktor (Kraft, Geschwindigkeit ...) ab vom andern (Weg, Zeit ...). Ist diese Abhängigkeit affin, dann findet man den Flächeninhalt bequem mit den Formeln fürs Rechteck, Dreieck oder Trapez.

Beispiel: Spannarbeit bei einer vorgespannten, elastischen Feder



Eine elastische Feder der Härte D ist auf die Länge a vorgespannt. Um sie ein Stück Δs auf die Länge b zu dehnen, ist Spannarbeit W nötig. Diese Arbeit W erscheint im s - F -Diagramm als Flächeninhalt eines Trapezes.

Dafür gibt es eine Formel:

$$W = \frac{1}{2} (D \cdot a + D \cdot b) \Delta s = \frac{1}{2} D (a + b) (b - a)$$

$$W = \frac{1}{2} D (b^2 - a^2)$$

Meistens aber ist der obere Flächenrand keine Gerade. Dann hilft die Integralrechnung weiter.

2. Streifenmethode und Definition

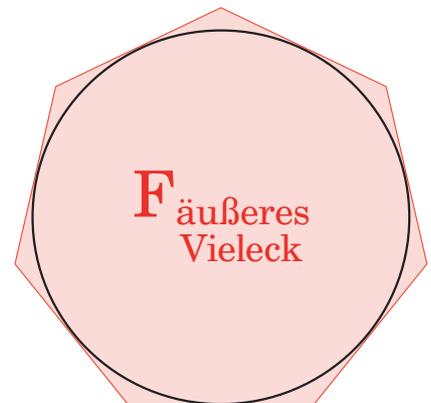
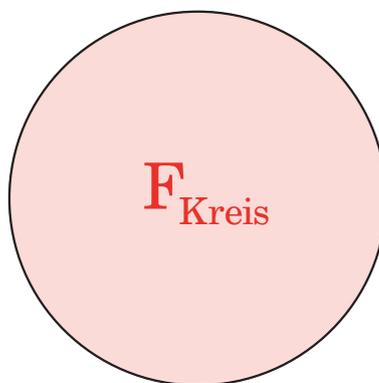
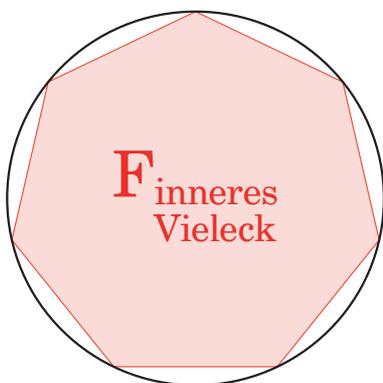
Als einem der Ersten ist es ARCHIMEDES gelungen, Inhalte krummrandiger Flächenstücke zu bestimmen. Seine Idee ist so einfach wie genial: Das Flächenstück wird durch Vielecke angenähert. Die eine Vielecksorte liegt immer innerhalb des Flächenstücks (einbeschrieben), die andere immer außerhalb (umbeschrieben). Im Gegensatz zu krummrandigen Flächen lassen sich Vielecke so wählen, dass man ihre Inhalte berechnen kann. Bei Vermehrung der Ecken kommen sich die ein- und umbeschriebenen Vielecke in Form und Inhalt immer näher. Gelingt es, deren Flächenunterschied beliebig klein zu machen, so hat man den gesuchten Flächeninhalt bestimmt. Berühmtestes Beispiel ist die

Kreismessung durch regelmäßige Vielecke

einbeschriebenes 7-Eck

Kreis

umbeschriebenes 7-Eck



$F_{\text{inneres Vieleck}}$

<

F_{Kreis}

<

$F_{\text{äußeres Vieleck}}$

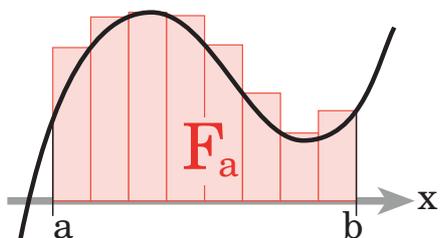
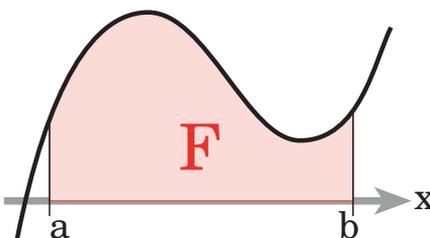
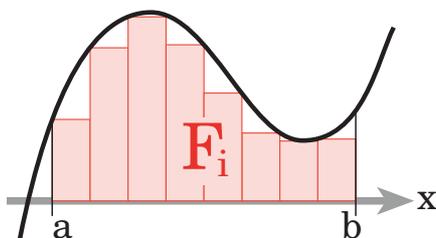
Streifenmethode

Bei Graphen hat sich die Streifenmethode bewährt. Hier bestehen die Vielecke aus rechteckigen Streifen – und deren Flächeninhalt ist leicht bestimmbar.

einbeschriebene Streifen

Flächenstück

umbeschriebene Streifen



F_i

<

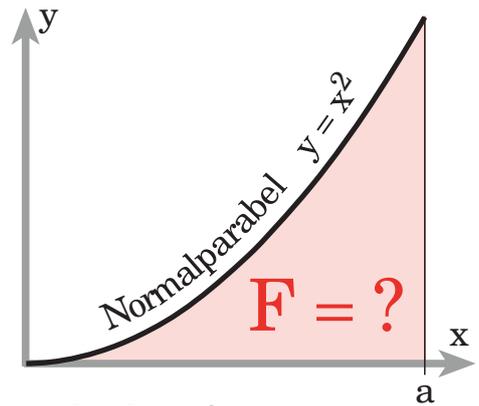
F

<

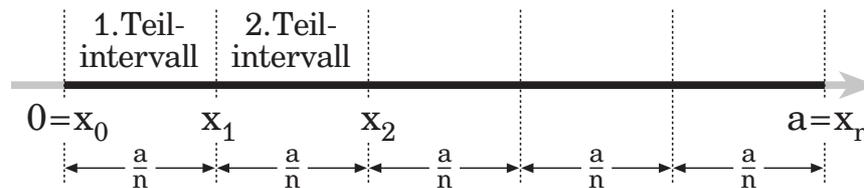
F_a

Dazu ein einfaches Beispiel.

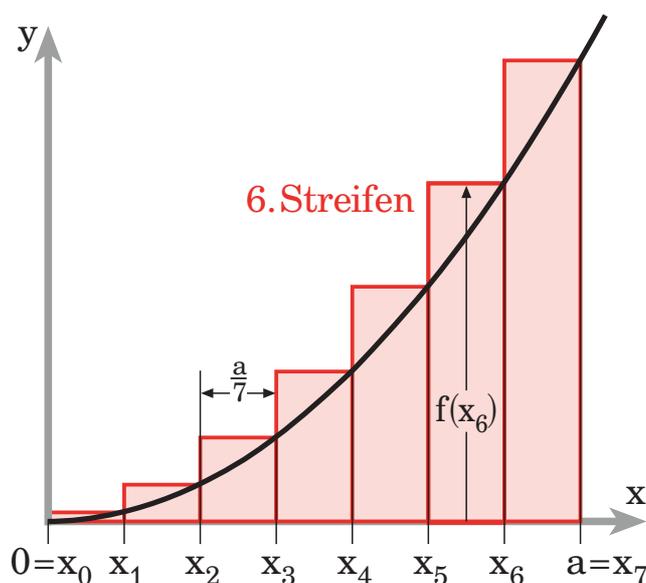
Flächenstück: Die Fläche ist berandet von der Normalparabel, der x-Achse und der Ordinate bei $x=a$.



Unterteilung: Punkte der x-Achse mit den Abszissen $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = a$ unterteilen das Intervall $[0; a]$ in n Teilintervalle. Meist unterteilt man gleichmäßig; jedes Teilintervall hat dann die Länge a/n .



Obersumme (unbeschriebene Streifen)



Über jedem Teilintervall steht ein möglichst niedriger Streifen, über dem aber kein Graphenpunkt liegt. Weil die Funktion monoton steigt, ist die jeweilige Streifenhöhe gleich dem Funktionswert am rechten Streifenrand.

Zum Beispiel liegt der rechte Rand des 6. Streifens bei $x_6 = 6 \cdot \frac{a}{n}$. Die Höhe des 6. Streifens ist also $f(x_6) = \left(6 \cdot \frac{a}{n}\right)^2$.

Allgemein liegt der rechte Rand des k -ten Streifens bei $x_k = k \cdot \frac{a}{n}$. Die Höhe des k -ten Streifens ist $f(x_k) = \left(k \cdot \frac{a}{n}\right)^2$.

Der k -te Streifen hat den Flächeninhalt $\frac{a}{n} \cdot f(x_k) = \frac{a}{n} \cdot \left(k \cdot \frac{a}{n}\right)^2 = k^2 \cdot \left(\frac{a}{n}\right)^3$.

Die Summe der Flächeninhalte der n unbeschriebenen Streifen bildet eine »Obersumme O_n «

$$\begin{aligned} O_n &= \text{1. Streifen} + \text{2. Streifen} + \dots + \text{n. Streifen} \\ &= \frac{a}{n} \cdot f(x_1) + \frac{a}{n} \cdot f(x_2) + \dots + \frac{a}{n} \cdot f(x_n) \\ &= 1^2 \cdot \left(\frac{a}{n}\right)^3 + 2^2 \cdot \left(\frac{a}{n}\right)^3 + \dots + n^2 \cdot \left(\frac{a}{n}\right)^3 \\ &= \left(\frac{a}{n}\right)^3 \cdot (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) \end{aligned}$$

Für die Summe der Quadrate von 1 bis n gibt es eine Formel:

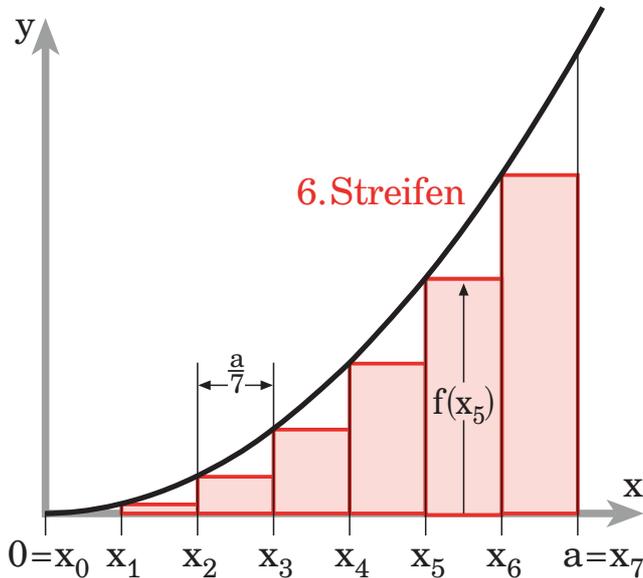
$\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$. Zum Beweis siehe Aufgabe 2 im »Anhang«.

Damit vereinfacht sich die Obersumme zu

$$O_n = \left(\frac{a}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) = \frac{1}{6} a^3 \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

Im Fall $a=7/8$ und $n=7$ (Bild oben) ergibt sich $O_7 = \frac{35}{128}$.

Untersumme (einbeschriebene Streifen)



Über jedem Teilintervall steht ein möglichst hoher Streifen, der ganz im Innern der Fläche liegt. Weil die Funktion monoton steigt, ist die jeweilige Streifenhöhe gleich dem Funktionswert am linken Streifenrand.

Zum Beispiel liegt der linke Rand des 6. Streifens bei $x_5 = 5 \cdot \frac{a}{n}$. Die Höhe des 6. Streifens ist also $f(x_5) = \left(5 \cdot \frac{a}{n}\right)^2$.

Allgemein liegt der linke Rand des k -ten Streifens bei $x_{k-1} = (k-1) \cdot \frac{a}{n}$. Die Höhe des k -ten Streifens ist

$$f(x_{k-1}) = \left((k-1) \cdot \frac{a}{n}\right)^2.$$

Der k -te Streifen hat den Flächeninhalt

$$\frac{a}{n} \cdot f(x_{k-1}) = \frac{a}{n} \cdot \left((k-1) \cdot \frac{a}{n}\right)^2 = (k-1)^2 \cdot \left(\frac{a}{n}\right)^3.$$

Die Summe der Flächeninhalte der n einbeschriebenen Streifen bildet eine »Untersumme U_n «

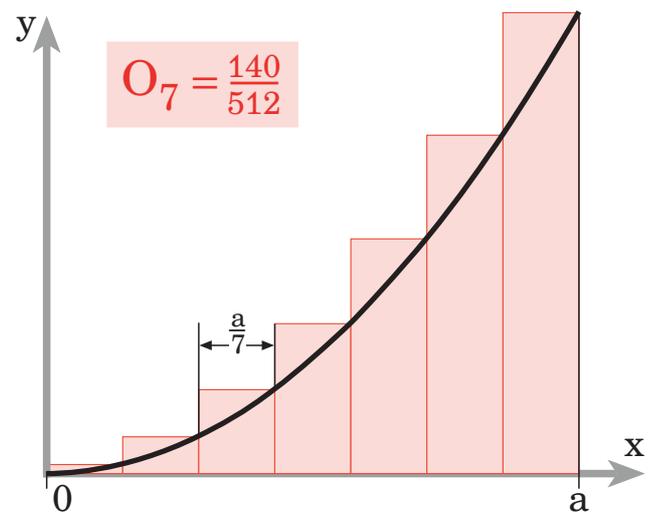
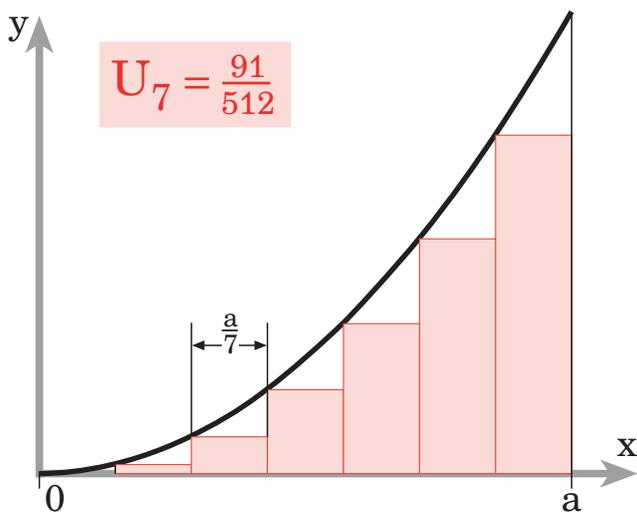
$$\begin{aligned} U_n &= \text{1. Streifen} && \text{2. Streifen} && \text{n. Streifen} \\ U_n &= \frac{a}{n} \cdot f(x_0) &+& \frac{a}{n} \cdot f(x_1) &+& \dots &+& \frac{a}{n} \cdot f(x_{n-1}) \\ &= 0^2 \cdot \left(\frac{a}{n}\right)^3 &+& 1^2 \cdot \left(\frac{a}{n}\right)^3 &+& \dots &+& (n-1)^2 \cdot \left(\frac{a}{n}\right)^3 \\ &= \left(\frac{a}{n}\right)^3 \cdot (0^2 + 1^2 + \dots + (n-1)^2) \\ &= \left(\frac{a}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} (n-1)n(2n-1) = \frac{1}{6} a^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(2 - \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Im Fall $a=7/8$ und $n=7$ (Bild oben) ergibt sich $U_7 = \frac{91}{512}$.

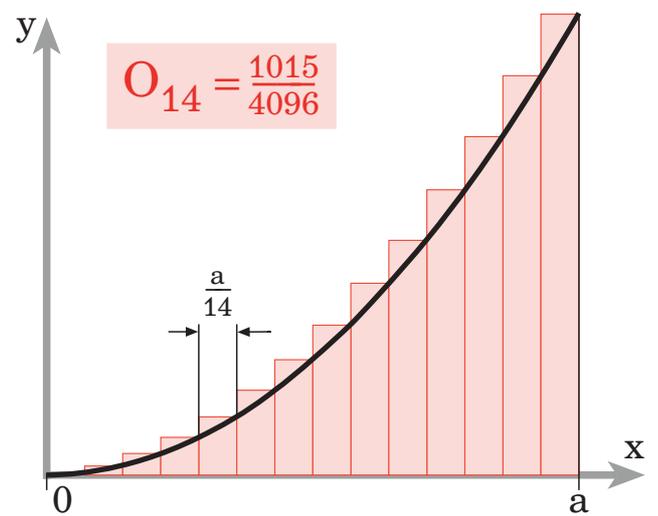
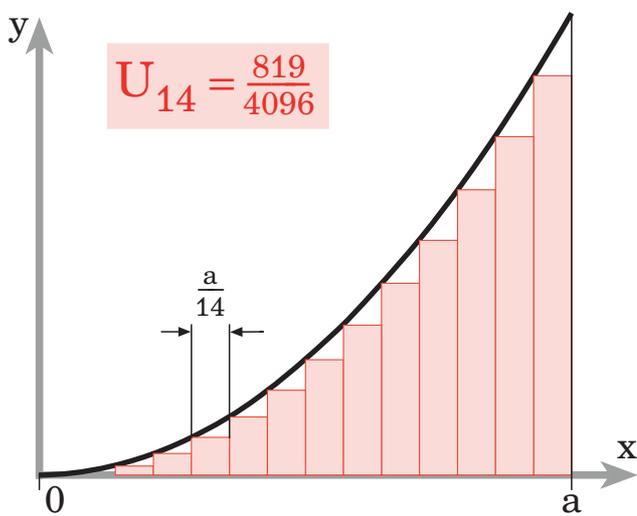
Der gesuchte Flächeninhalt F liegt nach Konstruktion für jeden Wert von n zwischen der Untersumme U_n und der Obersumme O_n : $U_n < F < O_n$

Im Fall $a=7/8$ und $n=7$ ergibt sich $U_7 = \frac{91}{512} < F < \frac{35}{128} = \frac{140}{512} = O_7$

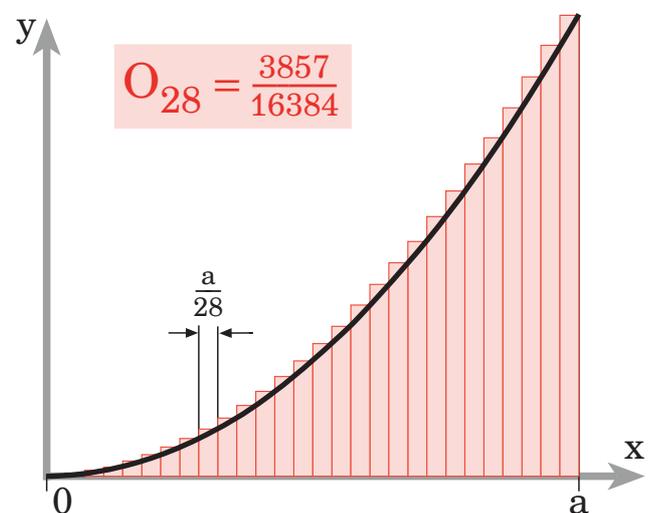
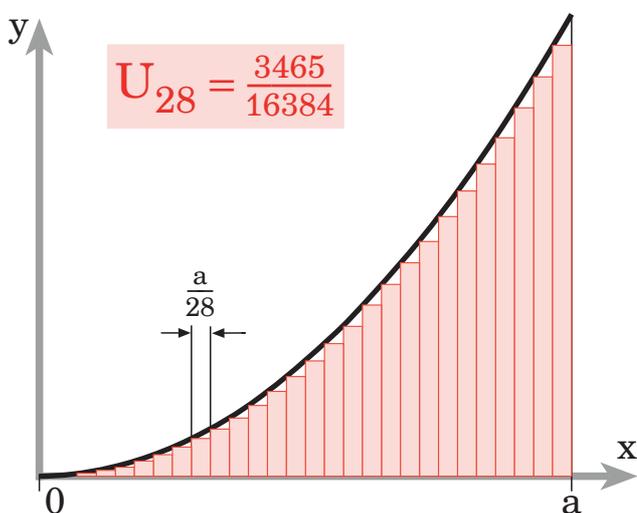
Mehr Streifen liefern eine bessere Annäherung. In den folgenden 6 Bildern ist $a = \frac{7}{8}$.
Anzahl der Streifen $n=7$, Streifenbreite $\frac{a}{n} = \frac{a}{7}$



Anzahl der Streifen $n=14$, Streifenbreite $\frac{a}{n} = \frac{a}{14}$



Anzahl der Streifen $n=28$, Streifenbreite $\frac{a}{n} = \frac{a}{28}$



Dezimalzahlen erleichtern den Vergleich von Unter- und Obersummen:

Es entstehen 2 Zahlenfolgen U_n und O_n :

| Streifenzahl n | Untersumme U_n | Obersumme O_n |
|------------------|------------------|-----------------|
| 7 | 0,177... | 0,273... |
| 14 | 0,199... | 0,247... |
| 28 | 0,211... | 0,235... |
| 56 | 0,217... | 0,229... |
| 112 | 0,220... | 0,226... |
| ... | ... | ... |

U_n wächst, O_n fällt. Der gesuchte Flächeninhalt liegt dazwischen; er ergibt sich, wenn die beiden Grenzwerte $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} O_n$ existieren und gleich sind.

In mathematischen Symbolen heißt das:

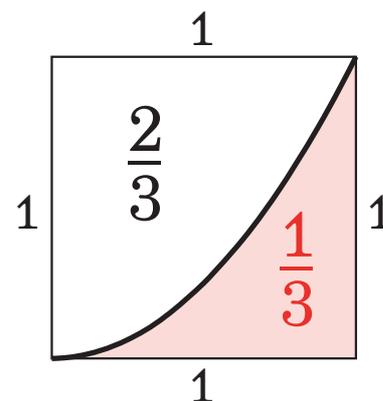
Ist $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} O_n$, dann ist $F = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n$.

In unserm Fall (a beliebig) ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} a^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(2 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{6} a^3 \cdot 1 \cdot 2 = \frac{1}{3} a^3$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} O_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} a^3 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3} a^3$$

Weil die beiden Grenzwerte gleich sind, hat das Flächenstück den Inhalt $F = \frac{1}{3} a^3$. Im Fall $a=1$ ergibt sich $F = \frac{1}{3}$. Die Normalparabel teilt die Fläche des Einheitsquadrats im Verhältnis 1:2.



Wir haben den Grenzwert nur deshalb gefunden, weil es einfache Formeln für Unter- und Obersumme gibt. Aber meistens gibt es solche Formeln nicht. Dann springt der Computer ein: Er kann im Rahmen seiner Rechengenauigkeit Ober- und Untersummen beliebig genau ausgeben und damit eine Abschätzung liefern für den gesuchten Flächeninhalt.

Der Leser kann sich davon überzeugen im »Computer-Einsatz« auf Seite 25.

Definition des bestimmten Integrals

Der Einfachheit halber arbeiten wir mit n Streifen gleicher Breite Δx .
Deshalb ist das Intervall $[a; b]$ in n Teilintervalle der Breite $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ zerlegt.

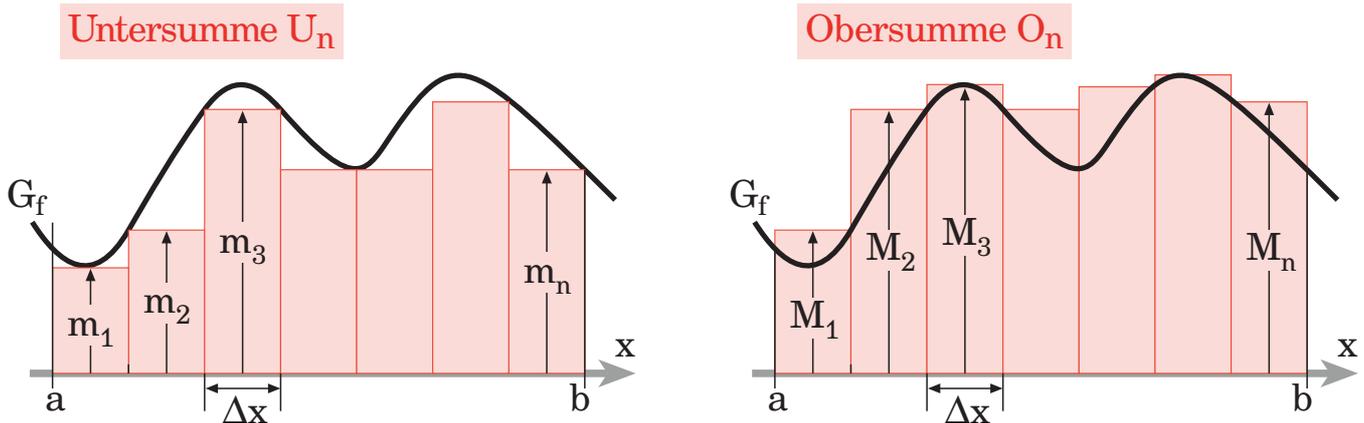
m_1, m_2, \dots, m_n seien die Minima,

M_1, M_2, \dots, M_n seien die Maxima von f in den Teilintervallen.

(Siehe dazu auch ② im »Nachdenken«)

Dann ist die Untersumme $U_n = m_1 \Delta x + m_2 \Delta x + \dots + m_n \Delta x$

Obersumme $O_n = M_1 \Delta x + M_2 \Delta x + \dots + M_n \Delta x$.



Mit Unter- und Obersumme definiert man

Definition: Die Funktion f heißt **integrierbar** über $[a; b]$,

wenn gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} O_n$.

Der gemeinsame Grenzwert heißt

bestimmtes Integral von f von a bis b : $\int_a^b f(x) dx$.

$f(x)$ heißt **Integrand**, f heißt **Integrandfunktion**.

$[a; b]$ heißt **Integrationsintervall**.

a heißt **untere**, b **obere Integrationsgrenze**.

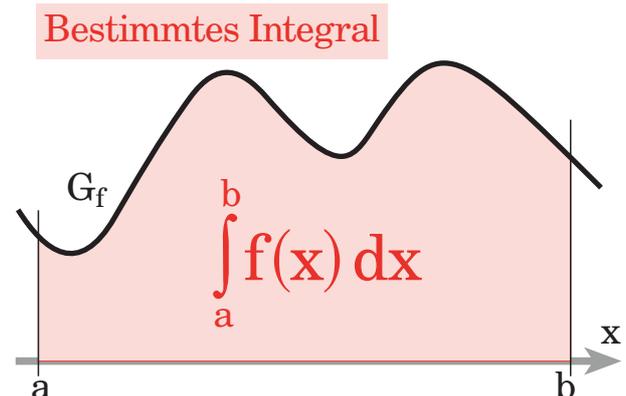
Das von LEIBNIZ eingeführte Integralzeichen erinnert an die Entstehung:
 \int kommt von Summe (Ober-, Untersumme). $f(x) dx$ stammt von der Streifenfläche:
Höhe $f(x)$ mal Breite Δx .

Das bestimmte Integral hat eine einfache anschauliche Bedeutung:

Liegt G_f für $x \in [a; b]$ über der x -Achse,

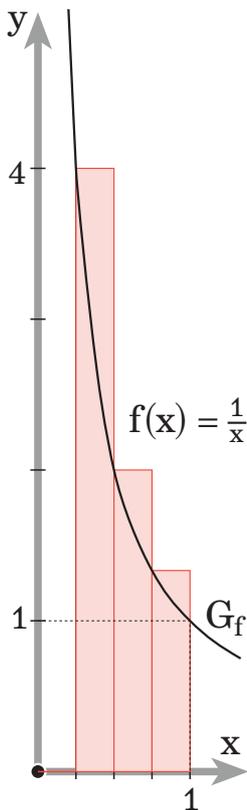
dann ist die Zahl $\int_a^b f(x) dx$ gleich dem

Inhalt der Fläche zwischen der Kurve G_f ,
der x -Achse und den Geraden $x=a$ und
 $x=b$.



Zum Nachdenken

1 Nicht integrierbare Funktionen



Eine Funktion ist integrierbar über $[a;b]$, wenn die Grenzwerte für Unter- und Obersummen existieren und gleich sind.
 Eine Funktion ist nicht integrierbar über $[a;b]$, wenn einer der beiden Grenzwerte nicht existiert oder die beiden Grenzwerte ungleich sind.

Beispiele

$$f \text{ mit } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} \text{ ist über } [0; 1] \text{ nicht integrierbar.}$$

Der 1. Streifen jeder Obersumme hat den Inhalt ∞ . Also existiert der Grenzwert der Obersummen nicht. Für die Untersumme gilt

$$U_n = \frac{1}{n} \cdot 0 + \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{2} + \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{3} + \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{4} + \dots + \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}$$

Jede Untersumme hat einen endlichen Wert.

Ihr Grenzwert für $n \rightarrow \infty$ ist aber unendlich. Eine Abschätzung zeigt:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} U_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16} + \frac{1}{17} + \dots \\ \lim_{n \rightarrow \infty} U_n &> \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16} + \frac{1}{17} + \dots \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \end{aligned}$$

In der vorigen Zeile kommt der Summand $\frac{1}{2}$ unendlich oft vor. Also ist auch der Grenzwert der Untersummen unendlich groß. Das Integral $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ existiert nicht.

Es kann auch vorkommen, dass beide Grenzwerte existieren, aber verschieden sind. Der deutsche Mathematiker Peter LEJEUNE-DIRICHLET (1805 bis 1895) hat 1829 eine nicht integrierbare Funktion angegeben; ihm zu Ehren heißt sie Dirichlet-Funktion D .

$$D(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{für } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

So gilt zum Beispiel $D(0,5)=0$ und $D(\sqrt{2})=1$.
 D ist an jeder Stelle unstetig. Der Graph von D besteht aus einzelnen Punkten der Geraden $y=0$ und $y=1$.

Versucht man sich am Integral $\int_0^1 D(x) dx$, so ergibt sich für die

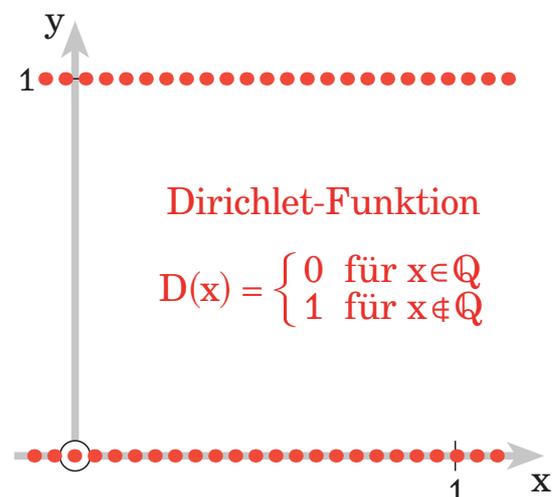
$$\text{Untersumme } U_n = \frac{1}{n} \cdot 0 + \frac{1}{n} \cdot 0 + \dots + \frac{1}{n} \cdot 0 = 0$$

$$\text{mit } \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0$$

$$\text{Obersumme } O_n = \frac{1}{n} \cdot 1 + \frac{1}{n} \cdot 1 + \dots + \frac{1}{n} \cdot 1 = 1$$

$$\text{mit } \lim_{n \rightarrow \infty} O_n = 1.$$

Weil beide Grenzwerte verschieden sind, existiert das Integral $\int_0^1 D(x) dx$ nicht.

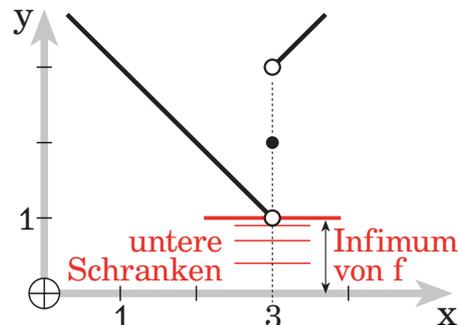


② Fehlendes Extremum

Bei der Definition von Unter- und Obersumme haben wir angenommen, dass in jedem Teilintervall ein Minimum m und ein Maximum M vorkommen. Aber das muss nicht immer so sein.

Beispiel: $f(x) = (x-2) \operatorname{sgn}(x-3) + 2 = \begin{cases} -x+4 & \text{für } x < 3 \\ 2 & \text{für } x = 3 \\ x & \text{für } x > 3 \end{cases}$

Im Teilintervall $[2;4]$ gibt es zwar bei 4 das Maximum 4, aber kein Minimum. In solchen Fällen verwendet man einen Ersatz für das fehlende Minimum: Das **Infimum**.



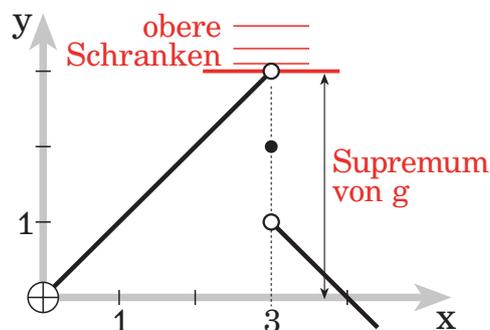
Zu seiner Definition dient die **untere Schranke**. Das ist eine Zahl, die keinen Funktionswert in diesem Teilintervall übertrifft. Das Infimum ist die größte untere Schranke.

Die Funktion hat also in $[2;4]$ zwar kein Minimum, wohl aber bei 3 das Infimum 1. Mit diesem Infimum lässt sich jetzt ein Streifen der Untersumme bilden.

Analog definiert man das **Supremum** einer Funktion über einem Intervall als kleinste **obere Schranke**.

Beispiel: $g(x) = (x-2) \operatorname{sgn}(3-x) + 2 = \begin{cases} x & \text{für } x < 3 \\ 2 & \text{für } x = 3 \\ -x+4 & \text{für } x > 3 \end{cases}$

Im Teilintervall $[2;4]$ hat g zwar kein Maximum, wohl aber bei 3 das Supremum 3.

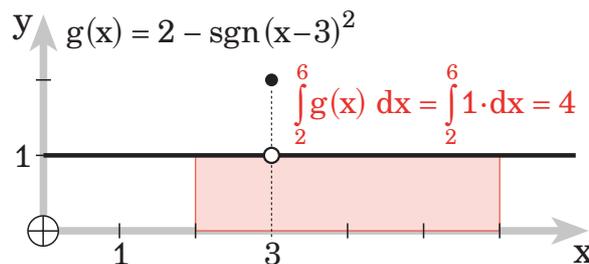
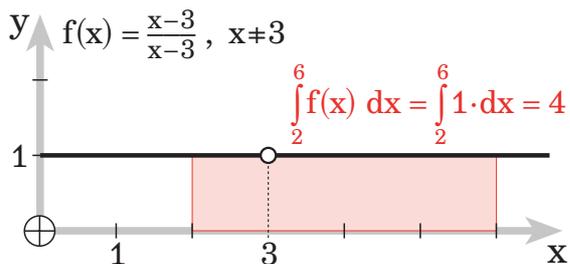


Bei der Definition von Unter- und Obersumme verwendet man besser Infimum statt Minimum und Supremum statt Maximum und erweitert so die Menge der integrierbaren Funktionen. Dabei ist zu beachten, dass jedes Minimum auch ein Infimum ist und jedes Maximum auch ein Supremum.

③ Einzelpunkte fallen nicht ins Gewicht

Es gibt Funktionen, in deren Graphen Löcher sind oder einzelne Punkte unstetigerweise von ihren Nachbarn getrennt liegen.

Einzelne Punkte haben keinen Einfluss auf den Wert des Integrals. Sie wirken sich höchstens aus auf 2 benachbarte Streifen von Unter- und Obersumme. Beim Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ geht die Streifenbreite gegen 0; deshalb spielt der Inhalt dieser beiden Streifen keine Rolle. Man kann also an einzelnen Stellen Funktionswerte ändern, ohne den Wert des Integrals zu ändern.



Aufgaben

(Verwende die Formeln für Potenzsummen von ② im »Nachdenken«)

◇1 Berechne die Unter- und Obersummen mit a) 2 b) 4 c) 8 gleich breiten Streifen für die Fläche, die begrenzt ist von der x-Achse und dem Graphen von $y = \frac{1}{2}x + 1$. Untergrenze ist 0, Obergrenze ist 2.

2 $f(x) = 4 - x^2$. Berechne die Unter- und Obersummen mit 8 gleich breiten Streifen für die Fläche zwischen der Parabel und der x-Achse und gib eine Abschätzung des Flächeninhalts an.
(Unter- und Obergrenze sind die Nullstellen.)

3 $f(x) = 2 - x$. Bestimme mit der Streifenmethode den Inhalt der Fläche, die begrenzt ist von G_f , der x- und y-Achse. Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks auch mit der Formel aus der Elementargeometrie.

•4 $f(x) = 1 + x$. Bestimme mit der Streifenmethode den Inhalt der Fläche, die begrenzt ist von G_f , der x-Achse und den Ordinaten bei $x=1$ und $x=3$. Berechne den Flächeninhalt des Trapezes auch mit der Formel aus der Elementargeometrie.

•5 $f(x) = 8 - \frac{1}{2}x^2$. Bestimme mit der Streifenmethode den Inhalt der Fläche, die begrenzt ist von G_f , der y-Achse und der positiven x-Achse.

◇6 Berechne a) $\int_1^2 3 dx$ b) $\int_{-1}^2 2 dx$ c) $\int_0^2 dx$

◇7 Berechne a) $\int_0^4 x dx$ b) $\int_{-1}^1 (x+1) dx$ c) $\int_2^4 (2x-2) dx$

•◇8 Berechne a) $\int_0^2 x^2 dx$ b) $\int_0^1 3x^2 dx$ c) $\int_0^2 (4-x^2) dx$

9 Berechne a) $\int_0^b x dx$ b) $\int_0^b x^2 dx$ c) $\int_0^b x^3 dx$

•10 Die Kurve von $f(x)=x^3$ teilt das Einheitsquadrat mit den Ecken (0|0) und (1|1) in 2 Teile. In welchem Verhältnis stehen die Flächeninhalte?

•11 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{für } x \leq 0 \\ 1 - x^2 & \text{für } x > 0 \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{für } x > 0 \\ 1 - x^2 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$

Zeichne G_f und G_g . Zeichne die Streifen von Unter- und Obersumme für $n=4$ der Integrale $\int_{-1}^1 f(x) dx$ und $\int_{-1}^1 g(x) dx$.

Welche Werte haben diese Summen?

Computer-Einsatz: Streifenmethode

Jetzt ist nur die numerische Leistung der Maschine gefragt.

Vorgaben: $f(x)$ sei Term einer in $[a;b]$ monotonen Funktion, StreifenZahl

Ziel: Berechnung von Unter- und Obersumme

Zur Mathematica-Programmierung: Die 6 fetten Zeilen enthalten die Anweisungen zur Berechnung, die letzten 3 Zeilen geben die Ergebnisse bekannt. Das Ganze ist simpel gehalten: Wer eine Funktion f eingibt, die nicht monoton ist auf $[a;b]$, wird nicht gewarnt vor falschen Ergebnissen.

Dafür reagiert es richtig auf jedes beliebige Integrations-Intervall:

So unterscheiden sich die Summenwerte für $[a;b]$ und $[b;a]$ korrekterweise bloß im Vorzeichen.

Für 100000 Streifenpaare nimmt sich unser Rechner 5,4 s Bedenkzeit.

```

StreifenMethodeFürMonotoneKurve[f_Symbol, {Xvon_, Xbis_}, StreifenZahl_Integer?Positive]:=
Module[{Dx, Xwerte, StreifenInhalte, Summe1, Summe2, UnterSumme, OberSumme},

  Dx=(Xbis-Xvon)/StreifenZahl;
  Xwerte=Table[Xvon+k*Dx, {k,0,StreifenZahl}];
  StreifenInhalte=Dx*f[Xwerte];
  Summe1=Sum[StreifenInhalte[[k]], {k, 1, StreifenZahl};
  Summe2=Sum[StreifenInhalte[[k]], {k, 2, StreifenZahl+1};
  UnterSumme=Min[Summe1, Summe2]; OberSumme=Max[Summe1, Summe2];

  Print[StreifenZahl, " Streifen \n UnterSumme ≈ ", UnterSumme//N,
        "\t OberSumme ≈ ", OberSumme//N,
        "\n Unterschied = ", ds=OberSumme-UnterSumme, " ≈ ", ds//N]
]

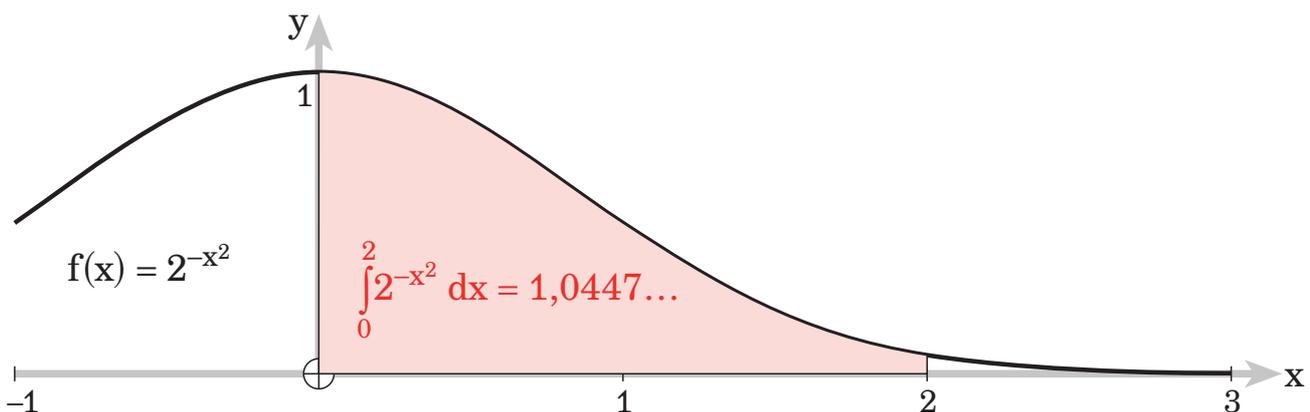
```

Beispiel: $f(x) = 2^{-x^2}$; Intervall = $\{0,2\}$; StreifenZahl = 100;

StreifenMethodeFürMonotoneKurve[f, Intervall, StreifenZahl]; (* Aufruf von »StreifenMethodeFürMonotoneKurve«*)

Die Ergebnisse für 8 StreifenZahl-Werte zusammengefasst:

| StreifenZahl | Untersumme | Obersumme | Unterschied |
|--------------|------------|-----------|-------------|
| 1 | 0,125 | 2 | 1,875 |
| 2 | 0,5625 | 1,5 | 0,9375 |
| 4 | 0,80681 | 1,27556 | 0,46875 |
| 10 | 0,950414 | 1,13791 | 0,1875 |
| 100 | 1,03536 | 1,05411 | 0,01875 |
| 1000 | 1,0438 | 1,04568 | 0,001875 |
| 10000 | 1,04465 | 1,04483 | 0,0001875 |
| 100000 | 1,04473 | 1,04475 | 0,00001875 |



3. Eigenschaften

Faktorformel

Ist f integrierbar, dann gilt für $k \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b k \cdot f(x) \, dx = k \cdot \int_a^b f(x) \, dx$$

Begründung: Sind m_i und M_i die Extrema von f in den Teilintervallen, so sind $k \cdot m_i$ und $k \cdot M_i$ die Extrema von $k \cdot f$ in den Teilintervallen. Der Faktor k lässt sich bei Unter- und Obersumme ausklammern und damit auch vor den Grenzwert und vors Integral ziehen.

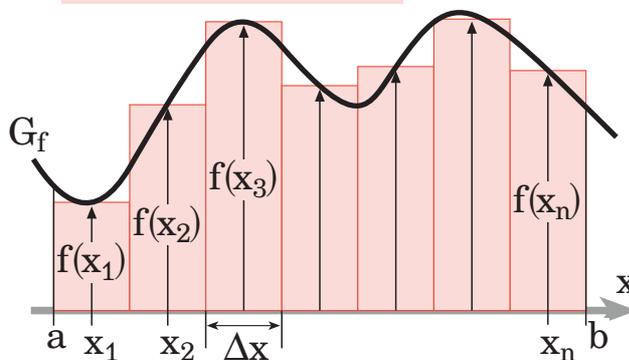
Summenformel

Sind f und g integrierbar, dann gilt

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx$$

Begründung: Der Mathematiker Bernhard RIEMANN (1826 – 1866) hat gezeigt: Ist eine Funktion integrierbar, dann ist das bestimmte Integral nicht nur gleich dem Grenzwert von Unter- und Obersumme, sondern auch gleich dem Grenzwert von Zwischensummen. Bei einer Zwischensumme Z_n nimmt man statt des Maximums oder Minimums einen beliebigen Funktionswert aus dem Teilintervall, zum Beispiel den Funktionswert in der Mitte.

Zwischensumme Z_n



$$Z_n = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \dots + f(x_n)\Delta x, \text{ also } \int_a^b f(x) \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} Z_n$$

Mit Zwischensummen begründen wir die Summenformel:

$$\begin{aligned} \int_a^b [f(x) + g(x)] \, dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} Z_n = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [(f(x_1) + g(x_1))\Delta x + (f(x_2) + g(x_2))\Delta x + \dots + (f(x_n) + g(x_n))\Delta x] \end{aligned}$$

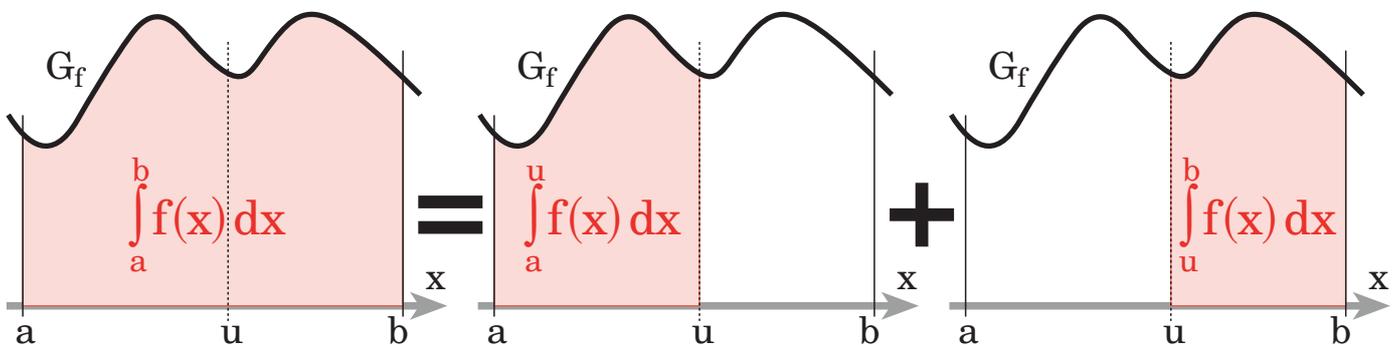
$$\begin{aligned} &\text{Weil die Grenzwerte der Teilsummen existieren, gilt} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \dots + f(x_n)\Delta x] + \\ &\quad + \lim_{n \rightarrow \infty} [g(x_1)\Delta x + g(x_2)\Delta x + \dots + g(x_n)\Delta x] = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx \end{aligned}$$

Faktor- und Summenformel fasst man zusammen als Linearität des bestimmten Integrals

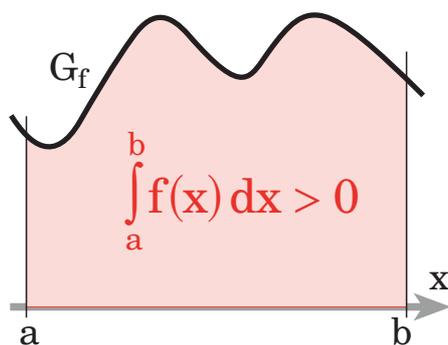
$$\int_a^b [k \cdot f(x) + l \cdot g(x)] dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx + l \cdot \int_a^b g(x) dx$$

Anschaulich plausibel ist die **Additivität**
Ist f integrierbar und $a < u < b$, dann gilt

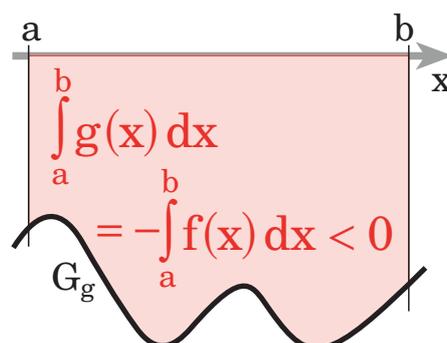
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^u f(x) dx + \int_u^b f(x) dx$$



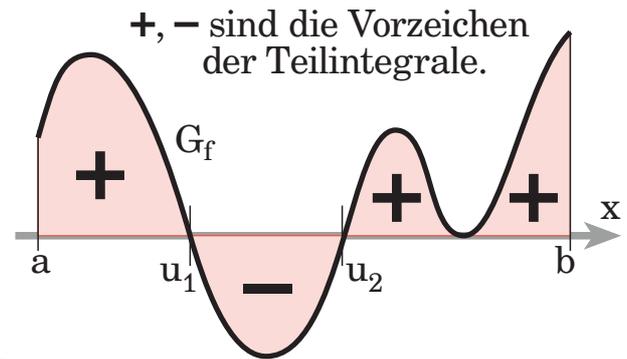
Bei der geometrischen Deutung des bestimmten Integrals haben wir bisher angenommen, dass die Kurve über der x-Achse liegt. Liegt sie aber ganz unter der x-Achse, dann liefert das bestimmte Integral den Flächeninhalt mit negativem Vorzeichen. Den Beweis liefert die Faktorregel:



$$g(x) = (-1) \cdot f(x)$$

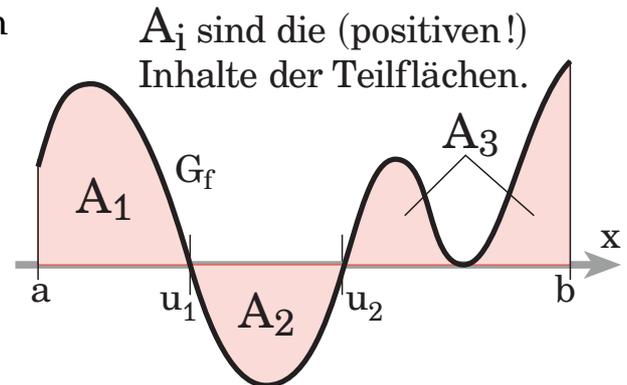


Liegt die Kurve für $x \in [a; b]$ teilweise über und teilweise unter der x -Achse, dann liefert das bestimmte Integral die **Flächenbilanz**: Es zählt den Inhalt der Flächen über der x -Achse positiv und den unter der x -Achse negativ und bildet die Summe.



Begründung

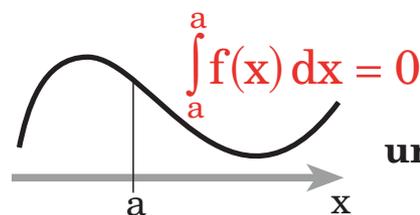
Man spaltet das Integrationsintervall $[a; b]$ so in Teilintervalle auf, dass die Funktion an deren Grenzen das Vorzeichen wechselt:



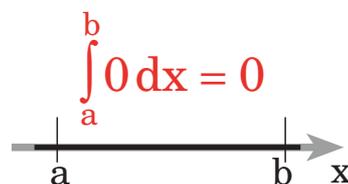
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{u_1} f(x) dx + \int_{u_1}^{u_2} f(x) dx + \int_{u_2}^b f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = A_1 - A_2 + A_3$$

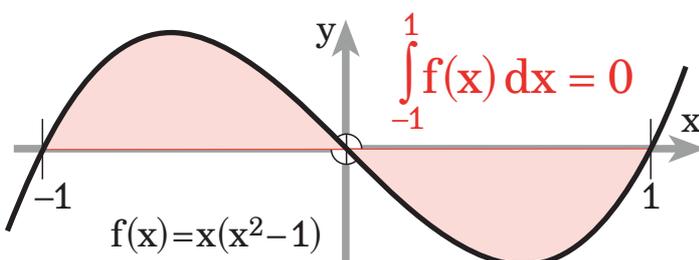
Hat das Integral $\int_a^b f(x) dx$ den Wert 0, so sind dafür also 3 Ursachen möglich:



untere Grenze = obere Grenze
(Flächenbreite = 0)



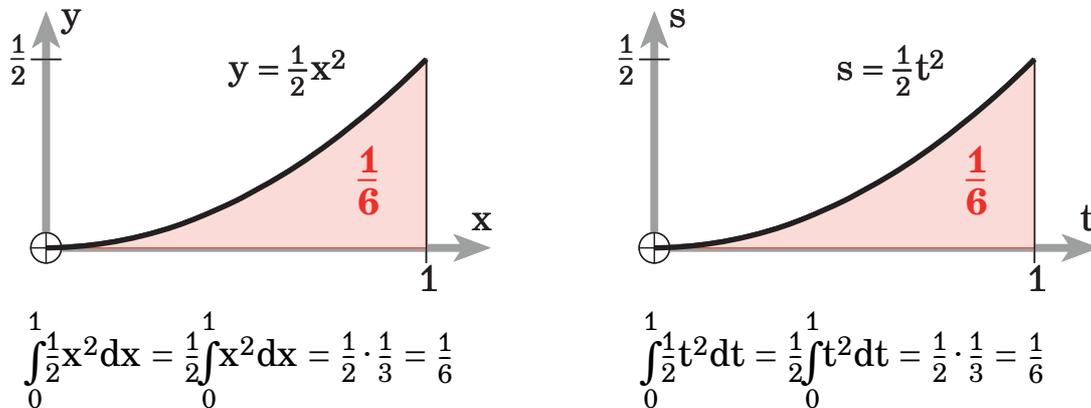
Integrand $f(x) = 0$
(Flächenhöhe = 0)



Flächenbilanz = 0

Unabhängigkeit von der Bezeichnung der Integrationsvariable

Man kann die Variablen bezeichnen, wie man will. Es ist zwar üblich, bei Funktionen x und y zu wählen, aber andere Buchstaben würden es genau so tun. Der Graph von $y = \frac{1}{2}x^2$ in einem x - y -Koordinatensystem ist der selbe wie der von $s = \frac{1}{2}t^2$ in einem t - s -Koordinatensystem (gleiche Maßstäbe vorausgesetzt).



Also ist es beim Integral völlig belanglos, wie die Integrationsvariable heißt: ob x oder t oder ω oder ...

Allgemein
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(\omega) d\omega = \int_a^b f(\dots) d\dots$$

Zum Nachdenken

❶ Axiome des Flächeninhalts

Der Flächeninhalt einfacher Figuren wie Rechteck und Dreieck macht begrifflich kaum Schwierigkeiten. Ganz anders dagegen ist es bei krummrandigen Flächenstücken.

Hier können unerwartete Komplikationen auftauchen. Um auf logisch festem Boden zu stehen, sichert sich der Mathematiker in solchen Fällen dadurch ab, dass er den fraglichen Begriff, hier den Flächeninhalt, durch Axiome definiert und dann nur mit diesen Axiomen arbeitet. Für den Inhalt A eines Flächenstücks legt man meist 3 Axiome zugrunde:

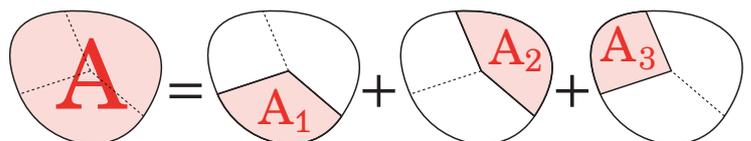
I Nichtnegativität

Der Flächeninhalt ist nicht negativ: $A \geq 0$

II Additivität

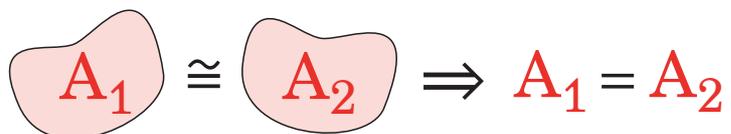
Der Inhalt einer Fläche ist die Summe der Inhalte ihrer Teile:

$$A = A_1 + A_2 + A_3$$



III Bewegungsinvarianz

Kongruente Flächenstücke haben gleiche Inhalte.



Diese 3 Axiome und die Normierung: »Das Einheitsquadrat hat den Inhalt 1« liegen auch der Flächenberechnung durch Integrale zugrunde.

② Potenzsummen

Zur Berechnung von $\int_0^1 x^2 dx$ braucht man eine Formel für die Summe der 2. Potenzen, für $\int_0^1 x^n dx$ eine für die Summe der n-ten Potenzen.

Formeln für solche Potenzsummen sind nicht leicht zu finden. Erst 2000 Jahre nach ARCHIMEDES gelingt es dem italienischen Mathematiker Francesco Bonaventura CAVALLIERI (1598 bis 1647), Formeln für Potenzsummen bis zum Grad 9 aufzustellen und damit Integrale zu berechnen der Form

$$\int_a^b x^n dx \text{ für } n \in \{0, 1, \dots, 9\}$$

Arbeitet man viel mit Summen in der Form wie $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$, dann wird diese ausführliche Schreibweise schnell schwerfällig.

Zur Abhilfe hat man eine Abkürzung geschaffen: $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \sum_{i=1}^n i^2$.

Allgemein bedeutet $\sum_{i=1}^n a(i) = a(1) + a(2) + \dots + a(n)$.

Man ersetzt also im Term $a(i)$ die Variable i der Reihe nach durch $1, 2, \dots, n$ und addiert die entstandenen Ausdrücke. Das Zeichen \sum (großes griechisches Sigma) erinnert an »Summe«. So gilt

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{1}{2} n(n+1)$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{1}{4} n^2(n+1)^2$$

$$\sum_{i=1}^n i^4 = \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$$

$$\sum_{i=1}^n i^5 = \frac{1}{12} n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)$$

$$\sum_{i=1}^n i^6 = \frac{1}{42} n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)$$

$$\sum_{i=1}^n i^7 = \frac{1}{24} n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)$$

$$\sum_{i=1}^n i^8 = \frac{1}{90} n(n+1)(2n+1)(5n^6+15n^5+5n^4-15n^3-n^2+9n-3)$$

$$\sum_{i=1}^n i^9 = \frac{1}{20} n^2(n+1)^2(n^2+n-1)(2n^4+4n^3-n^2-3n+3)$$

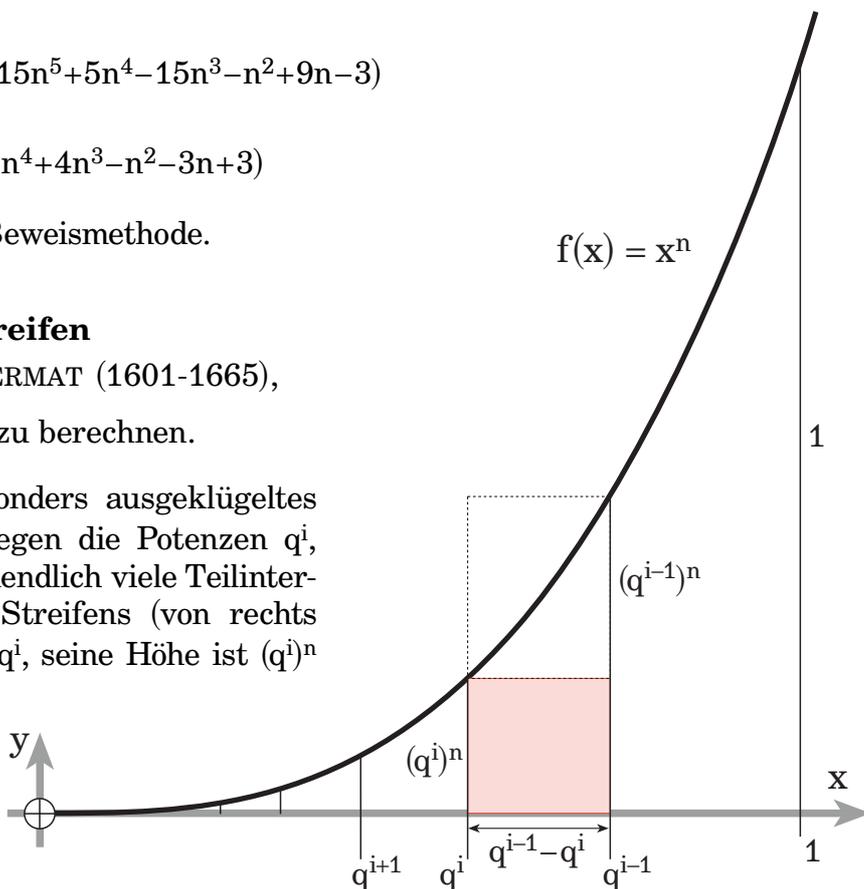
Im Anhang findet man eine Beweismethode.

③ Verschieden breite Streifen

1650 schafft es Pierre de FERMAT (1601-1665),

das Integral $\int_0^1 x^n dx$ für $n \in \mathbb{N}$ zu berechnen.

Er verwendet dazu ein besonders ausgeklügeltes Verfahren: Für $0 < q < 1$ zerlegen die Potenzen q^i , $i \in \mathbb{N}$, das Intervall $[0; 1]$ in unendlich viele Teilintervalle. Die Breite des i -ten Streifens (von rechts nach links gezählt!) ist $q^{i-1} - q^i$, seine Höhe ist $(q^i)^n$ für die Untersumme und $(q^{i-1})^n$ für die Obersumme.



Damit ergibt sich:

Untersumme

$$U_n(q) = \sum_{i=1}^{\infty} (q^{i-1} - q^i)(q^i)^n = \left(\frac{1}{q} - 1\right) \sum_{i=1}^{\infty} (q^i)^{n+1} = \left(\frac{1}{q} - 1\right) \sum_{i=1}^{\infty} (q^{n+1})^i = \left(\frac{1}{q} - 1\right) \left(\sum_{i=0}^{\infty} (q^{n+1})^i - 1 \right)$$

Unter $\sum_{i=1}^{\infty} \dots$ versteht man den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \dots$

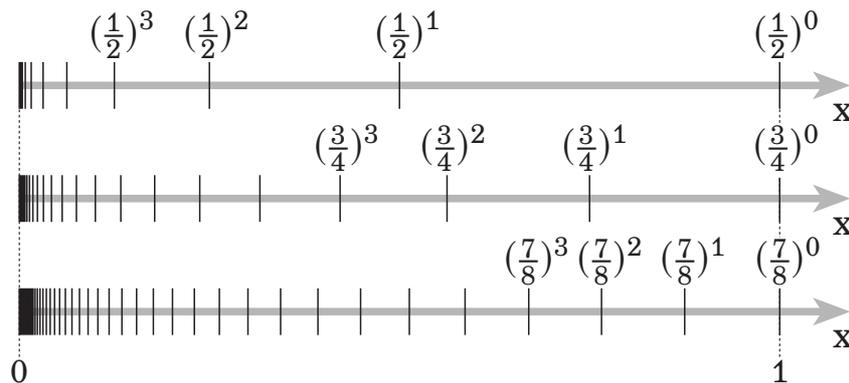
Obersumme

$$O_n(q) = \sum_{i=1}^{\infty} (q^{i-1} - q^i)(q^{i-1})^n = (1 - q) \sum_{i=1}^{\infty} (q^{i-1})^{n+1} = (1 - q) \sum_{i=0}^{\infty} (q^{n+1})^i$$

Nach der Formel für geometrische Reihen, $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$ für $|x| < 1$, ist dann

$$U_n(q) = \left(\frac{1}{q} - 1\right) \frac{q^{n+1}}{1 - q^{n+1}} = \frac{(1-q)q^n}{1 - q^{n+1}}$$

$$O_n(q) = (1-q) \frac{1}{1 - q^{n+1}} = \frac{(1-q)}{1 - q^{n+1}} = \frac{1}{\frac{1 - q^{n+1}}{(1-q)}} = \frac{1}{1 + q + q^2 + \dots + q^n}$$



Je näher q bei 1 liegt, desto feiner ist die Streifen-Einteilung, desto mehr nähern sich Unter- und Obersumme.

Grenzwerte:

$$\lim_{q \rightarrow 1} O_n(q) = \lim_{q \rightarrow 1} \frac{1}{1 + q + q^2 + \dots + q^n} = \frac{1}{n+1}$$

Wegen $U_n(q) = O_n(q) \cdot q^n$ gilt

$$\lim_{q \rightarrow 1} U_n(q) = \lim_{q \rightarrow 1} [O_n(q) \cdot q^n] = \frac{1}{n+1} \cdot 1 = \frac{1}{n+1}$$

$$\text{Ergebnis } \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$$

Die Streifenmethode funktioniert auch dann, wenn man allgemein von a bis b integriert. Die Rechenausdrücke werden dann aber recht unübersichtlich.

Aufgaben

◇1 Berechne $\int_0^1 f(x) dx$ mit

a) $f(x) = 4x$

b) $f(x) = -\frac{1}{2}x$

c) $f(x) = 6x^2$

d) $f(x) = -\frac{3}{2}x^2$

e) $f(x) = x + x^2$

f) $f(x) = 2x - 3x^2$

◇2 Berechne $\int_a^b x^2 dx$ für die Integrationsintervalle $[a;b]$, mit $a, b > 0$

a) $[0;6]$

b) $[3;6]$

c) $[a;b]$

d) $[-b;0]$

e) $[-b;b]$

3 Berechne $\int_a^b x^3 dx$ für die Integrationsintervalle $[a;b]$, mit $a, b > 0$

a) $[0;6]$

b) $[2;6]$

c) $[a;b]$

d) $[-b;0]$

e) $[-b;b]$

4 Begründe: Für $b > 0$ gelten die Sätze:

a) Ist G_f symmetrisch zum Ursprung, so ist

$$\int_{-b}^0 f(x) dx = -\int_0^b f(x) dx \quad \text{und} \quad \int_{-b}^b f(x) dx = 0.$$

b) Ist G_f symmetrisch zur y-Achse, so ist

$$\int_{-b}^0 f(x) dx = \int_0^b f(x) dx \quad \text{und} \quad \int_{-b}^b f(x) dx = 2 \int_0^b f(x) dx.$$

5 **a)** Berechne $\int_0^2 (2-x) dx$ und $\int_0^6 (2-x) dx$

•b) Für welchen Wert ($\neq 3$) von c gilt: $\int_0^3 (2-x) dx = \int_0^c (2-x) dx$

6 Zeichne G_f mit $f(x) = 4x - x^2$, $D_f = [0;6]$ und berechne

a) $\int_0^6 f(x) dx$

b) den Inhalt der Fläche zwischen G_f und der x-Achse.

7 Berechne

a) $\int_0^1 t dt$

b) $\int_0^1 (s + s^2) ds$

c) $\int_0^1 (2\omega + 3\omega^2) d\omega$

d) $\int_0^1 6st^2 ds$

e) $\int_0^1 6st^2 dt$

f) $\int_0^1 6st^2 du$

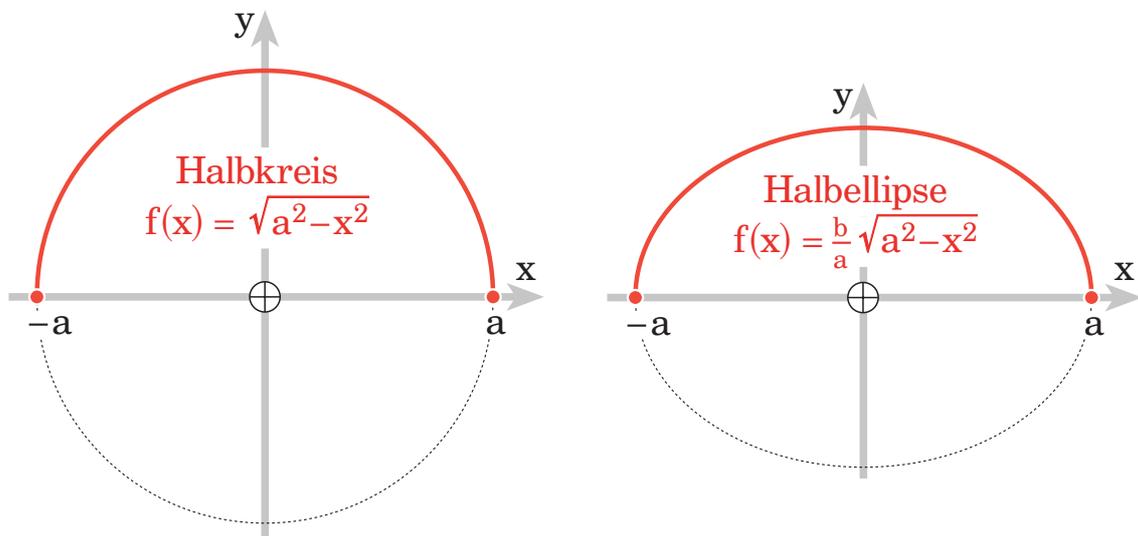
- 8 Berechne $c > 0$ so, dass gilt

a) $\int_0^c (4 - 2x) dx = 0$ b) $\int_0^c (2x - 3x^2) dx = 0$

- 9 Berechne mit den Formeln für Potenzsummen die Integrale als Grenzwerte von Obersummen.

a) $\int_0^1 x^4 dx$ b) $\int_0^1 x^7 dx$ c) $\int_0^1 x^9 dx$

- 10 $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ mit $D_f = [-a; a]$ beschreibt einen Halbkreis um $(0|0)$ mit Radius a . Eine Halbellipse mit den Halbachsen a und b entsteht aus diesem Halbkreis durch Streckung in y -Richtung mit dem Faktor $\frac{b}{a}$; sie hat also die Gleichung $g(x) = \frac{b}{a} f(x)$.
Berechne den Inhalt einer Ellipse mit den Halbachsen a und b .



•11 $f_a(x) = \frac{1}{12} x^2(a-x)$

- a) Diskutiere f_9 und zeichne G_{f_9} .

- b) Eine Scharkeurve und die x -Achse begrenzen ein Flächenstück mit Inhalt 9. Bestimme a .

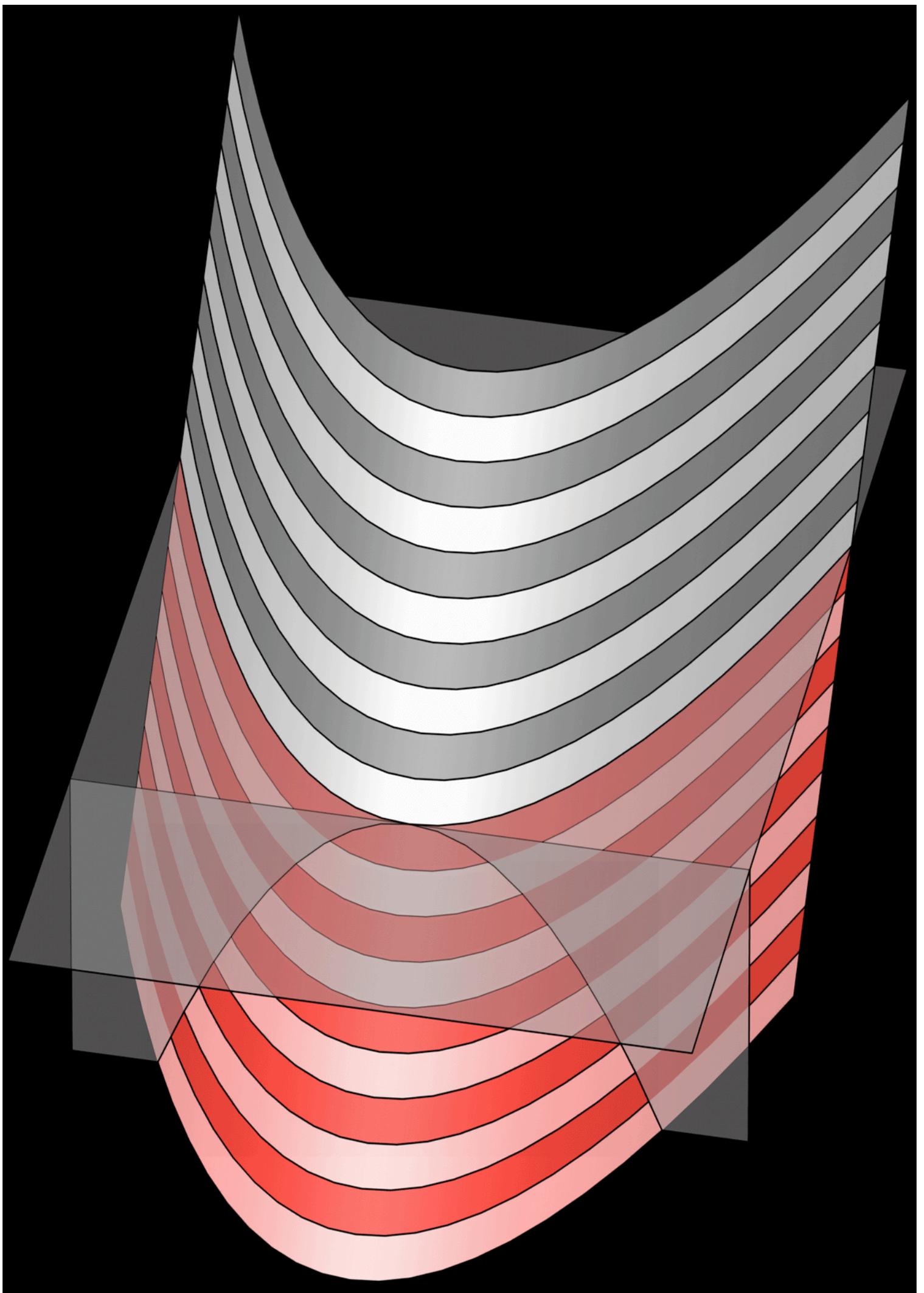
- 12 f sei echt monoton steigend mit $f(0)=0$, außerdem sei $d=f(b)$ mit $b > 0$.
 g sei die Umkehrfunktion f^{-1} von f .

a) Begründe an einer Skizze: $\int_0^b f(x) dx = bd - \int_0^d g(y) dy$.

- b) Wie kann man $\int_a^b f(x) dx$ mit der Umkehrfunktion g berechnen? ($0 < a < b$)

- c) Berechne mit den Formeln von a) und b) die Integrale

$\int_0^8 \sqrt[3]{x} dx$ und $\int_1^8 \sqrt[3]{x} dx$.



III. Integral und Hauptsatz

1. Integralfunktion

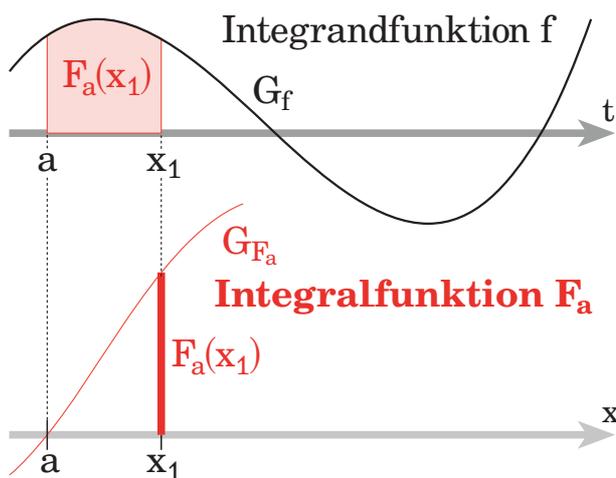
Das bestimmte Integral erlaubt es, zu einer Funktion f eine neue Art von Funktionen F_a zu definieren:

Definition: Ist f auf einem Intervall I integrierbar, dann heißt für $a, x \in I$

F_a mit $F_a(x) = \int_a^x f(t) dt$ eine **Integralfunktion** von f .
 f heißt **Integrandfunktion**.

Der Funktionswert $F_a(x)$ ist die Flächenbilanz der Fläche, die begrenzt ist von G_f und der x -Achse zwischen a und x .

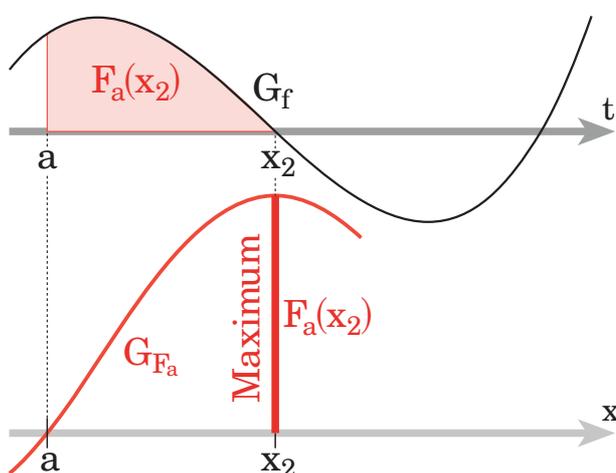
Den Bildern entnimmt man:



Jede Integralfunktion F_a hat mindestens die Nullstelle a :

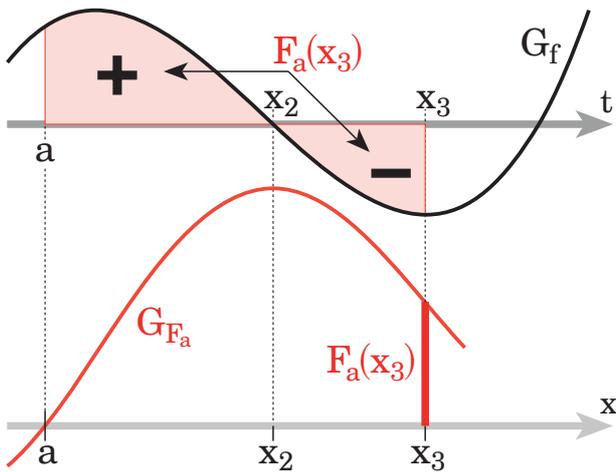
$$F_a(a) = \int_a^a f(t) dt = 0.$$

Liegt G_f in einem Intervall I_1 (zum Beispiel $[a; x_1]$) über der t -Achse, so steigt F_a echt monoton, weil die Flächenbilanz zunimmt mit wachsendem t .

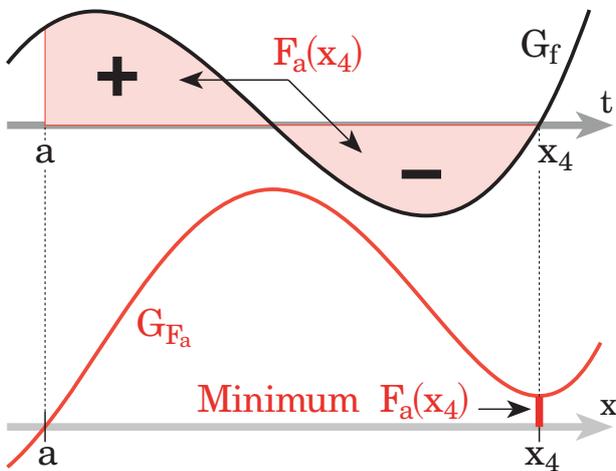


Hat f eine Nullstelle x_2 mit Vorzeichenwechsel von $+$ nach $-$, so hat F_a dort ein Maximum.

Denn vor x_2 nimmt der Flächeninhalt zu; nach x_2 liegt G_f unter der t -Achse, der neu hinzu kommende Flächeninhalt wird subtrahiert vom bisher Angesammelten.

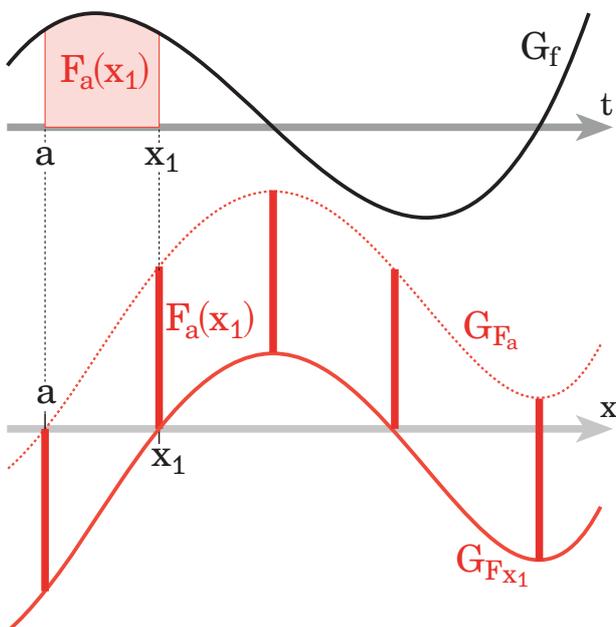


Liegt G_f in einem Intervall I_2 (zum Beispiel $[x_2; x_3]$) unter der t-Achse, so fällt F_a von x_2 an echt monoton, weil die Flächenbilanz abnimmt mit wachsendem t.



Hat f eine Nullstelle x_4 mit Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$, so hat F_a dort ein Minimum.

Denn vor x_4 nimmt der Flächeninhalt ab; nach x_4 liegt G_f über der t-Achse, der neu hinzu kommende Flächeninhalt wird addiert zum bisher Angesammelten.



Eine Verschiebung der Startstelle verschiebt den Graphen von F_a in y-Richtung.

Wählt man im Beispiel x_1 als neue Startstelle, so fehlt in jeder Flächenbilanz der Inhalt $F_a(x_1)$.

Der neue Graph ist also um diesen Wert nach unten verschoben ($F_a(x_1) > 0$).

Rechnerisch:

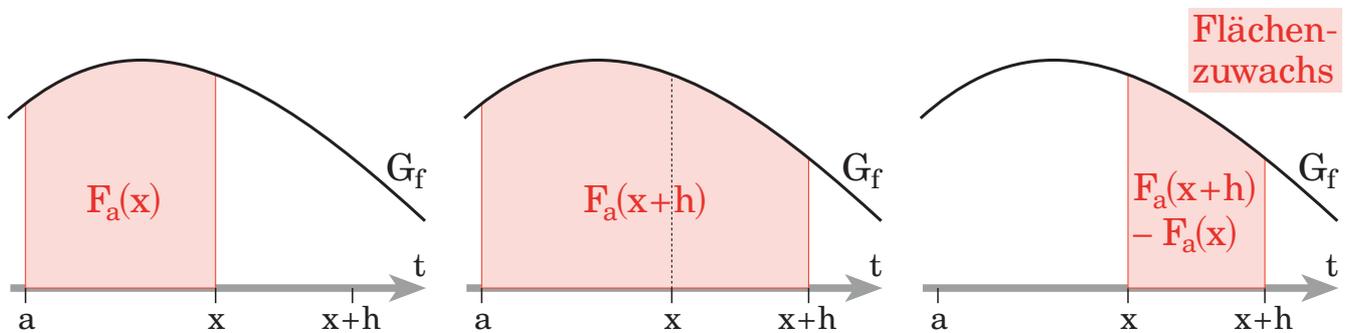
$$F_a(x) = \int_a^x f(t) dt = \int_a^{x_1} f(t) dt + \int_{x_1}^x f(t) dt$$

$$F_a(x) = F_a(x_1) + F_{x_1}(x)$$

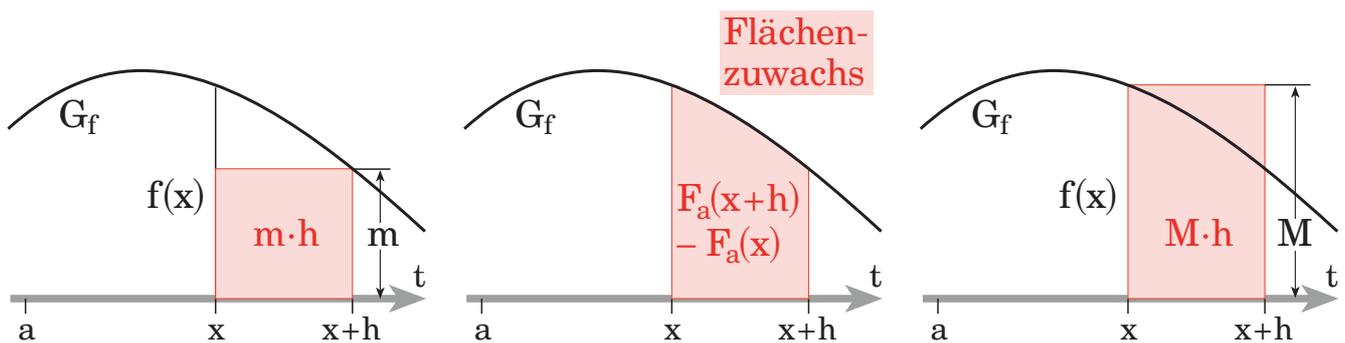
$$\text{also ist } F_{x_1}(x) = F_a(x) - F_a(x_1)$$

2. Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

Im vorigen Abschnitt haben wir aus Bildern abgelesen, welche Eigenschaften einer Integralfunktion aus einer stetigen Integrandfunktion f folgen. Diese lassen vermuten, dass eine Integralfunktion F_a eine Stammfunktion F ihrer Integrandfunktion f ist. Eine einfache Überlegung zeigt das für den Sonderfall $f(x) \geq 0$ und $h > 0$:



Wie bei der Streifenmethode ist der Flächenzuwachs eingegrenzt von 2 Rechteckflächen: m sei der kleinste, M der größte Funktionswert im Intervall $[x; x+h]$.



$$\text{Flächenvergleich:} \quad m \cdot h \leq F_a(x+h) - F_a(x) \leq M \cdot h$$

$$\text{Division durch } h: \quad m \leq \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} \leq M$$

Beim Grenzwert für $h \rightarrow 0$ werden m und M gleich $f(x)$, falls f stetig ist:

$$f(x) \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} \leq f(x)$$

das heißt, F_a ist differenzierbar und hat die Ableitung $f(x)$ – wie oben vermutet.

Beim Beweis haben wir eine stetige Funktion f verwendet, die auf $[x; x+h]$ positiv ist. Das Ergebnis gilt aber für beliebige stetige Integranden f .

NEWTON und LEIBNIZ haben dies unabhängig voneinander in der 2. Hälfte des 17. Jahrhunderts gefunden.

Dieses Ergebnis ist bekannt als

Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

f sei stetig auf dem Intervall I,

F_a sei eine Integralfunktion von f mit $F_a(x) = \int_a^x f(t) dt$ mit $a \in I$, $D_{F_a} = I$.

Dann ist F_a auf I differenzierbar und es gilt: $F_a'(x) = f(x)$

In Worten: Die Ableitung einer Integralfunktion einer stetigen Integrandfunktion ist der Integrand selber.

Oder: Eine Integralfunktion F_a einer stetigen Integrandfunktion f ist Stammfunktion von f.

In der Schreibweise von LEIBNIZ sieht der Hauptsatz so aus: $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$.

Darin zeigt sich deutlich, dass Integration und Differenziation

umgekehrte Operationen sind: $\frac{d}{dx} \int_a^x (3t^2 - 2t + 5) dt = 3x^2 - 2x + 5$.

Aus dem Hauptsatz folgt eine sehr wichtige Formel fürs Integrieren.

Weil F_a eine Stammfunktion von f ist, gilt $\int_a^x f(t) dt = F(x) + C$;

dabei ist F eine beliebige Stammfunktion von f und C die passende Konstante.

Der Wert von C ergibt sich, wenn man a für x einsetzt: $\int_a^a f(t) dt = 0$

$$0 = F(a) + C \Rightarrow C = -F(a), \text{ also ist } \int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a).$$

Damit haben wir eine andere Fassung des Hauptsatzes gefunden.

Sie ist die grundlegende Formel fürs Integrieren:

Hauptsatz $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$

In der Praxis geht man so vor: $\int_{-1}^3 (3x^2 - 2x + 5) dx = [x^3 - x^2 + 5x]_{-1}^3 = F(3) - F(-1)$
 $= (3^3 - 3^2 + 5 \cdot 3) - ((-1)^3 - (-1)^2 + 5(-1)) = 33 - (-7) = 40$.

F ist dabei eine beliebige Stammfunktion von f.

Mithilfe des Hauptsatzes kann man jede stetige Funktion f integrieren, von der eine Stammfunktion F bekannt ist. Kennt man keine Stammfunktion, dann bleibt nur noch die mühsame Streifenmethode.

Ebenso lassen sich mit dem Hauptsatz einfache Integral-Eigenschaften einsehen:

Faktorformel $\int_a^b k \cdot f(x) \, dx = k \cdot \int_a^b f(x) \, dx$

linke Seite = $k \cdot F(b) - k \cdot F(a) = k(F(b) - F(a)) =$ rechte Seite

Summenformel $\int_a^b [f(x) + g(x)] \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx$

linke Seite = $(F(b)+G(b)) - (F(a)+G(a))$
 $= F(b)-F(a) + G(b)-G(a) =$ rechte Seite

Additivität $\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^u f(x) \, dx + \int_u^b f(x) \, dx$

linke Seite = $F(b)-F(a) = F(u)-F(a) + F(b)-F(u) =$ rechte Seite

Vertauschen der Integrationsgrenzen

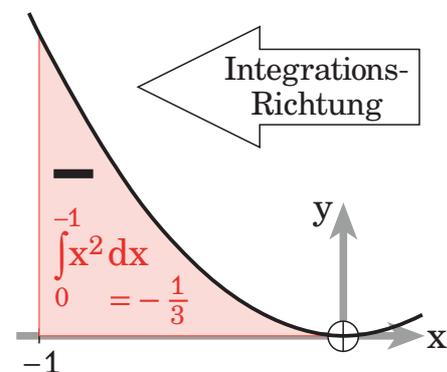
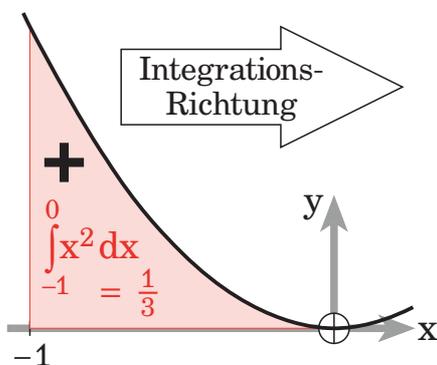
bewirkt eine Vorzeichen-Änderung des Integrals:

$$\int_a^b f(x) \, dx = - \int_b^a f(x) \, dx$$

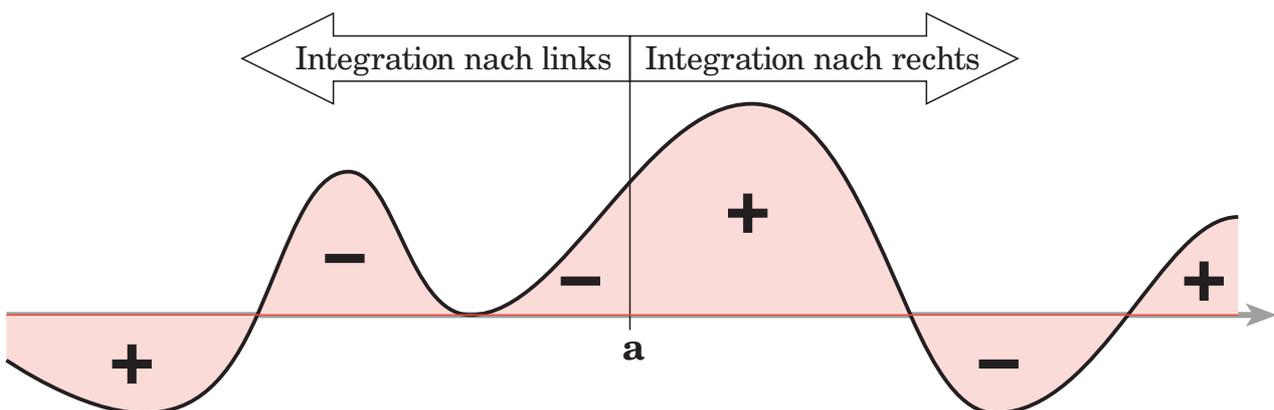
linke Seite = $F(a) - F(b) = -(F(b) - F(a)) =$ rechte Seite

$$\int_{-1}^0 x^2 \, dx = \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_{-1}^0 = (0) - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

$$\int_0^{-1} x^2 \, dx = \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^{-1} = \left(-\frac{1}{3}\right) - (0) = -\frac{1}{3}$$



Beim Integrieren nach links zählen also in der Flächenbilanz Flächenstücke negativ, die über der x-Achse liegen, Flächenstücke positiv, die unter der x-Achse liegen.



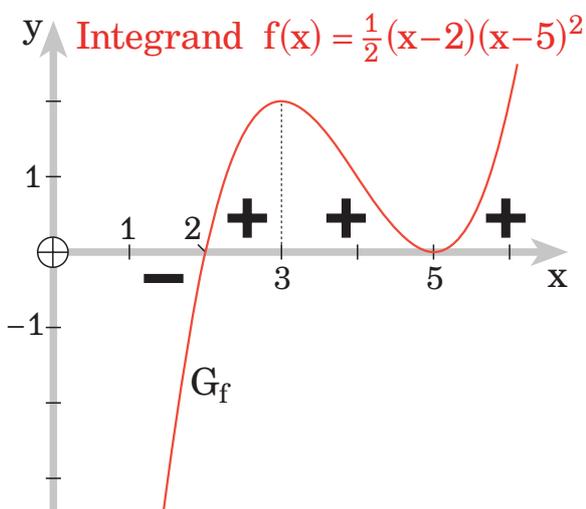
Integrand – Integralfunktion

Bei der Definition der Integralfunktion haben wir aus Bildern einige Eigenschaften der Integralfunktion abgelesen, ohne diese Integralfunktion durch Integrieren überhaupt bestimmt zu haben. Mit dem Hauptsatz lassen sich diese Zusammenhänge nun begründen und weitere finden. Von besonderen Punkten (Extrem- oder Flachpunkte) der Integralfunktions-Kurve weiß man so allerdings nur den x -Wert; der y -Wert (Funktionswert) ist erst durchs Integrieren zu haben.

Die Begründungen beruhen darauf, dass der Integrand da, wo er stetig ist, gleich ist der Ableitung der Integralfunktion:

| Integrand f (differenzierbar) | Integralfunktion $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ | Begründung mit dem Hauptsatz $F'(x) = f(x)$ |
|---|--|---|
| $f(x) > 0$ | G_F steigt echt monoton | $F'(x) = f(x) > 0$ |
| $f(x) < 0$ | G_F fällt echt monoton | $F'(x) = f(x) < 0$ |
| $f(x_0) = 0$ | G_F hat Waagrechtstelle x_0 | $F'(x_0) = f(x_0) = 0$ |
| Vorzeichenwechsel bei x_0 : von + zu – von – zu + | G_F hat bei x_0 einen: Hochpunkt Tiefpunkt | $F'(x_0) = f(x_0) = 0$ $F''(x_0) = f'(x_0) < 0$ $F''(x_0) = f'(x_0) > 0$ |
| echtes inneres Extremum bei x_0 | G_F hat bei x_0 einen Wendepunkt | Vorzeichenwechsel von $F'' = f'$ bei x_0 oder: $F''(x_0) = f'(x_0) = 0$ und $F'''(x_0) = f''(x_0) \neq 0$ |

Beispiel: $F(x) = \int_5^x \frac{1}{2}(t-2)(t-5)^2 dt$



Vor der Integration lesen wir Eigenschaften von G_F aus den Eigenschaften von G_f ab:

- G_F hat die 3fache Nullstelle 5, denn:
 $F(5)=0$, $F'(5)=f(5)=0$ und $F''(5)=f'(5)=0$,
- G_F steigt echt monoton für $2 \leq x$,
- G_F fällt echt monoton für $x \leq 2$,
- G_F hat Waagrechtspunkte bei 2 und 5,
- G_F hat einen Tiefpunkt bei 2,
- G_F hat keinen Hochpunkt,
- G_F hat Wendepunkte bei 3 und 5,
bei 5 sogar einen Terrassenpunkt mit bekanntem y -Wert 0.

Integration

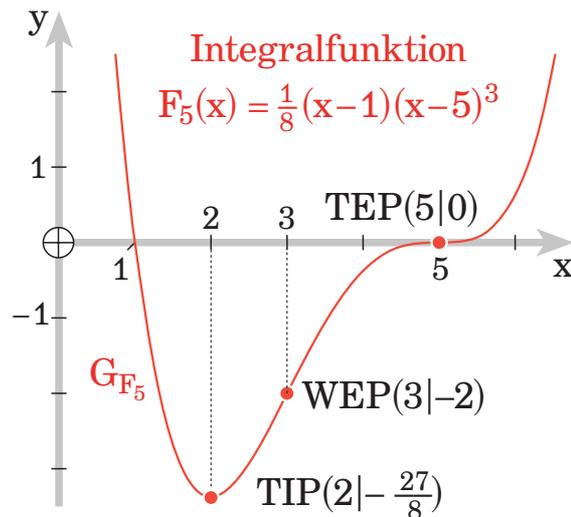
$$\begin{aligned}
 F_5(x) &= \int_5^x f(t) dt = \frac{1}{2} \int_5^x (t^3 - 12t^2 + 45t - 50) dt \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} t^4 - 4t^3 + \frac{45}{2} t^2 - 50t \right]_5^x \\
 &= \frac{1}{8} [t^4 - 16t^3 + 90t^2 - 200t]_5^x
 \end{aligned}$$

$$F_5(x) = \frac{1}{8} (x^4 - 16x^3 + 90x^2 - 200x + 125)$$

Nach der Integration bekommen wir die y-Werte, die sich nicht aus den Eigenschaften von f bestimmen lassen:

y-Wert des Tiefpunkts $F_5(2) = -\frac{27}{8}$,

y-Wert des Wendepunkts $F_5(3) = -2$.



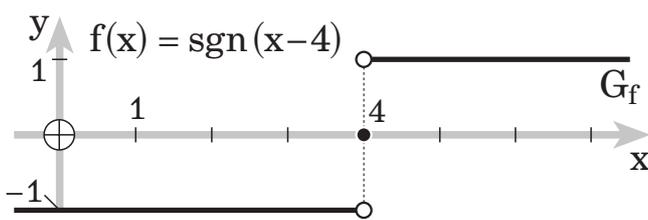
Außer der 3fachen Nullstelle 5 muss $F_5(x)$ als Polynom vom Grad 4 noch eine 1fache Nullstelle haben; man findet sie durch Polynomdivision:

$$(x^4 - 16x^3 + 90x^2 - 200x + 125) : (x - 5)^3 = x - 1$$

Faktorisierung: $F_5(x) = \frac{1}{8}(x - 1)(x - 5)^3$. Daraus ergibt sich 1 als 1fache Nullstelle.

Ist der Integrand bei x_0 unstetig, so darf man zwar den Hauptsatz bei x_0 nicht anwenden; trotzdem sind dann manchmal noch Aussagen über G_F bei x_0 möglich.

Beispiel: $f(x) = \text{sgn}(x-4)$, $F(x) = \int_1^x f(t) dt$



$x_0=4$ ist Unstetigkeitsstelle,

für $x < 4$ ist $f(x) = -1 < 0$,

also fällt G_F echt monoton,

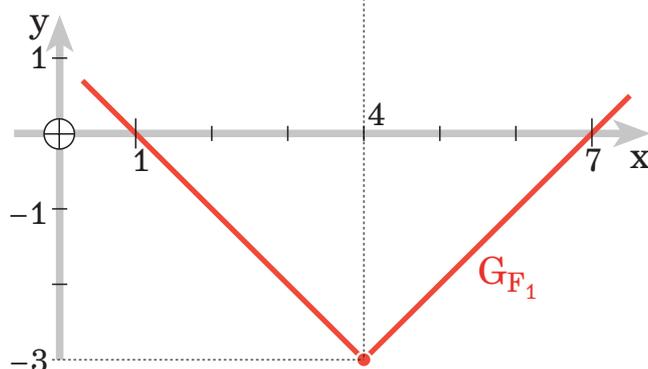
für $4 < x$ ist $f(x) = +1 > 0$,

also steigt G_F echt monoton.

G_F hat also bei 4 einen Tiefpunkt,

ist aber dort nicht differenzierbar.

Für $x_0=4$ gilt der Hauptsatz nicht.



Stammfunktion – Integralfunktion

Nach dem Hauptsatz ist jede Integralfunktion eines stetigen Integranden auch Stammfunktion dieses Integranden. Die Umkehrung gilt aber nicht:

Es gibt Funktionen mit Stammfunktionen, die keine Integralfunktionen sind.

Begründung: Weil jede Integralfunktion mindestens eine Nullstelle hat, kann eine Stammfunktion ohne Nullstelle keine Integralfunktion sein.

Beispiel: Integrand $f(x) = \frac{1}{2}x$

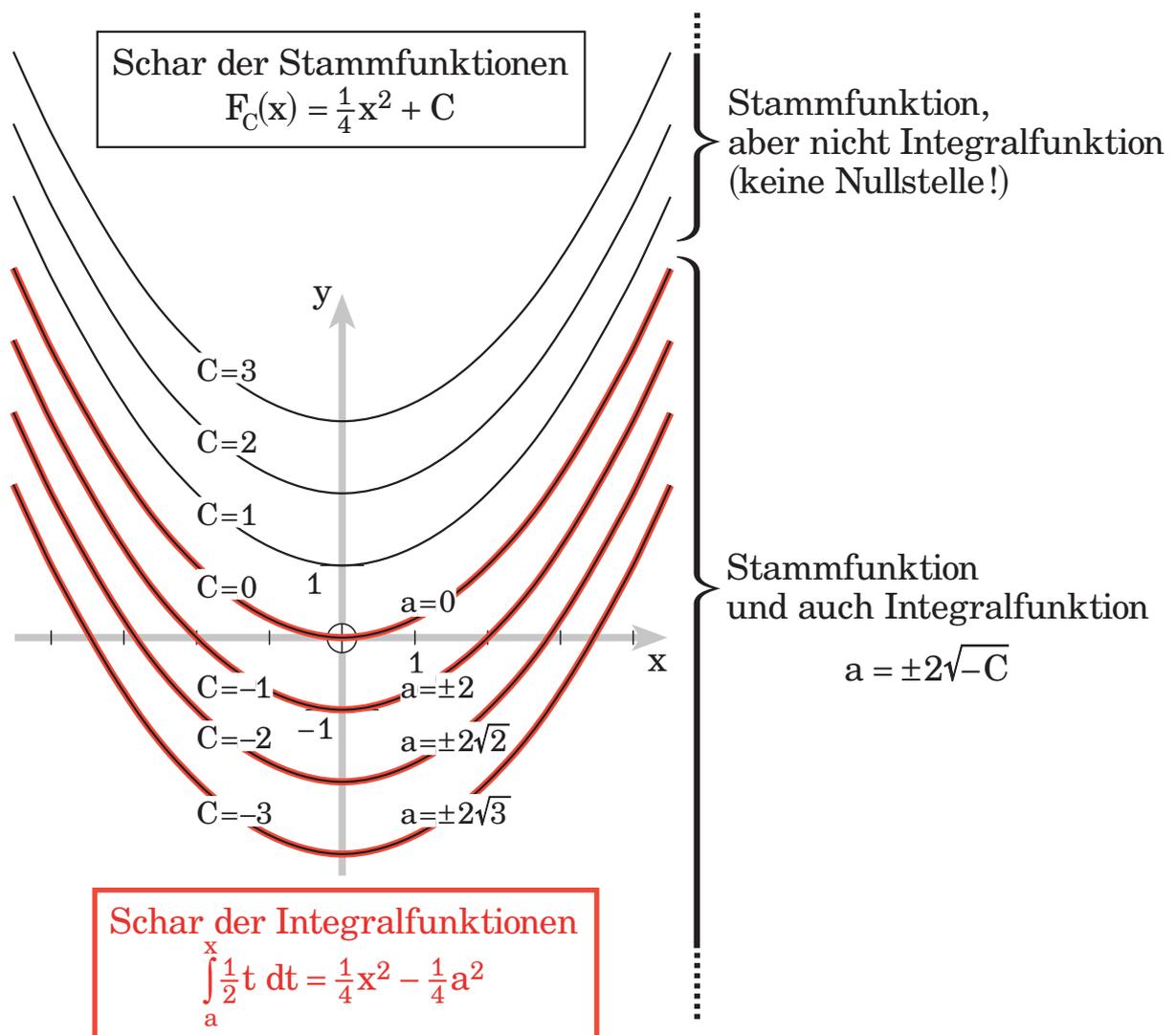
Terme der Integralfunktionen: $\int_a^x \frac{1}{2}t \, dt = \left[\frac{1}{4}t^2\right]_a^x = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}a^2$

Terme der Stammfunktionen: $F_C(x) = \frac{1}{4}x^2 + C$

Die Stammfunktionen mit $C > 0$ haben keine Nullstelle, sind also keine Integralfunktionen. Das zeigt auch die Rechnung: Soll eine Stammfunktion auch Integralfunktion sein, so muss man ein passendes a finden:

$$\frac{1}{4}x^2 + C = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}a^2 \Rightarrow C = -\frac{1}{4}a^2, \text{ also } a^2 = -4C$$

Nur für $C \leq 0$ findet man einen a -Wert und damit eine Integralfunktion, dann gilt $a = \pm 2\sqrt{-C}$



Zu jeder Stammfunktion mit mindestens einer Nullstelle gibt es garantiert eine Integralfunktion. Als Startstelle eignet sich diese Nullstelle.

Begründung: Ist x_0 Nullstelle der Stammfunktion F , so ist $F(x_0)=0$.

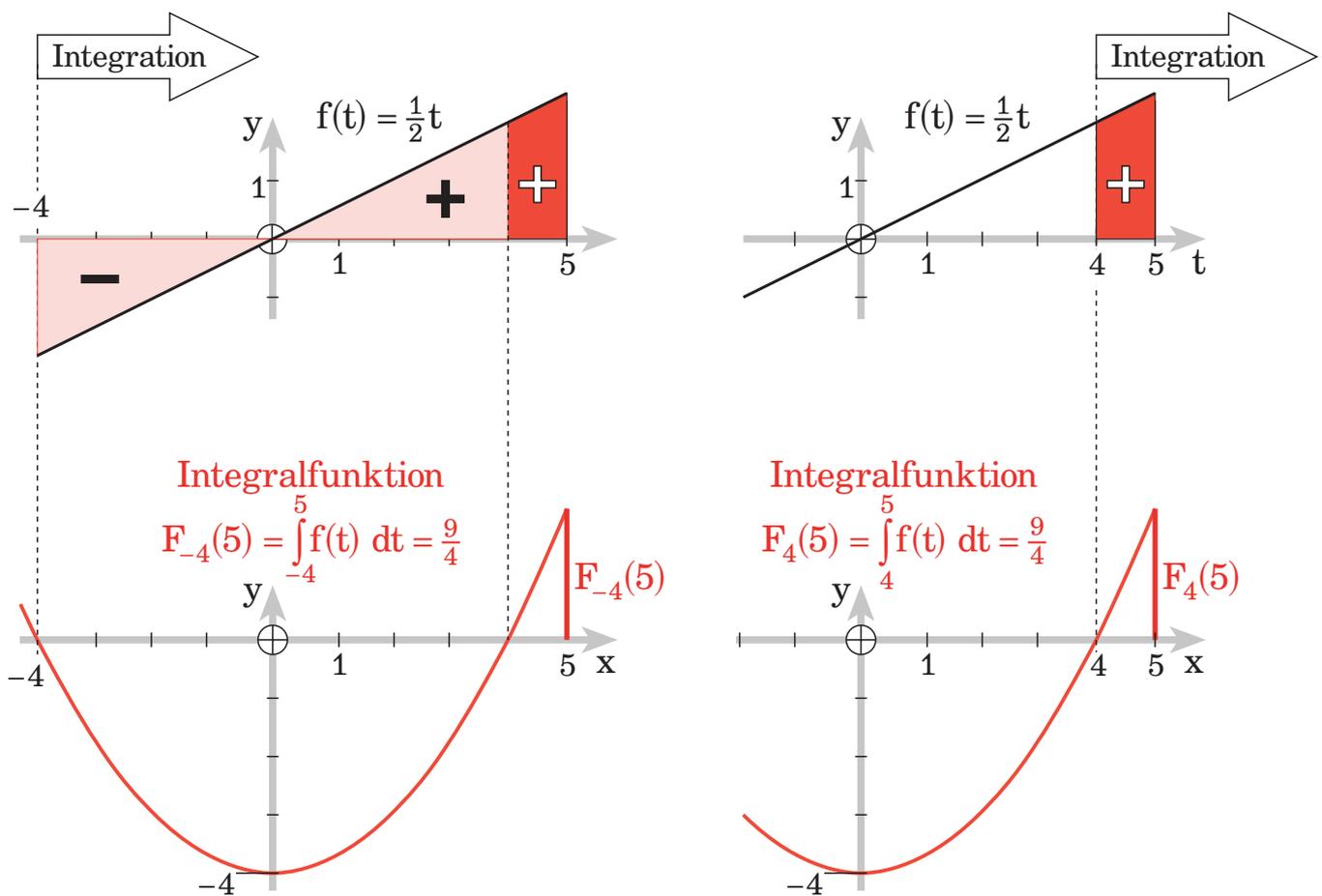
Nach dem Hauptsatz gilt: $\int_{x_0}^x f(t) dt = F(x) - F(x_0) = F(x)$.

Dies gilt für jede Nullstelle. Jede Nullstelle kann als Startstelle der zugehörigen Integralfunktion dienen; es ergibt sich immer der selbe Term. Im Beispiel hat die Stammfunktion mit $F_{-4}(x) = \frac{1}{4}x^2 - 4$ die beiden Nullstellen -4 und 4 .

Die zugehörigen Integralfunktionen haben den selben Term:

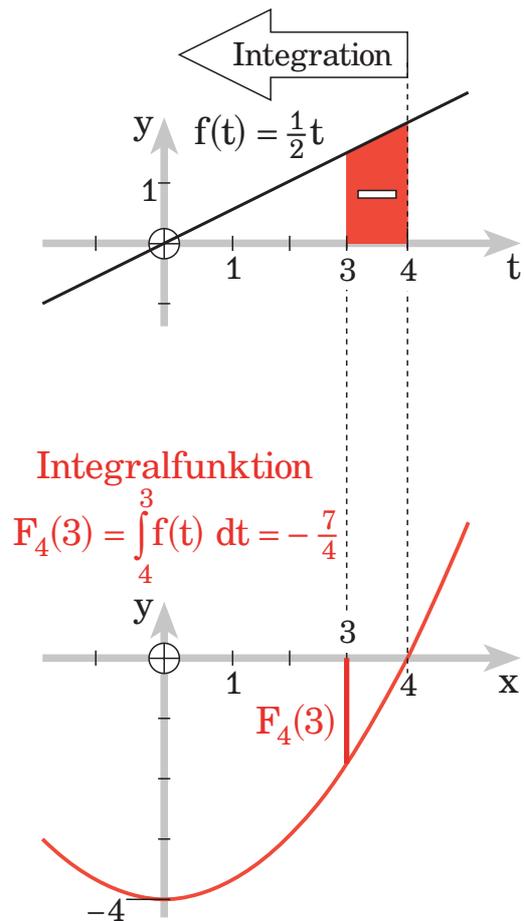
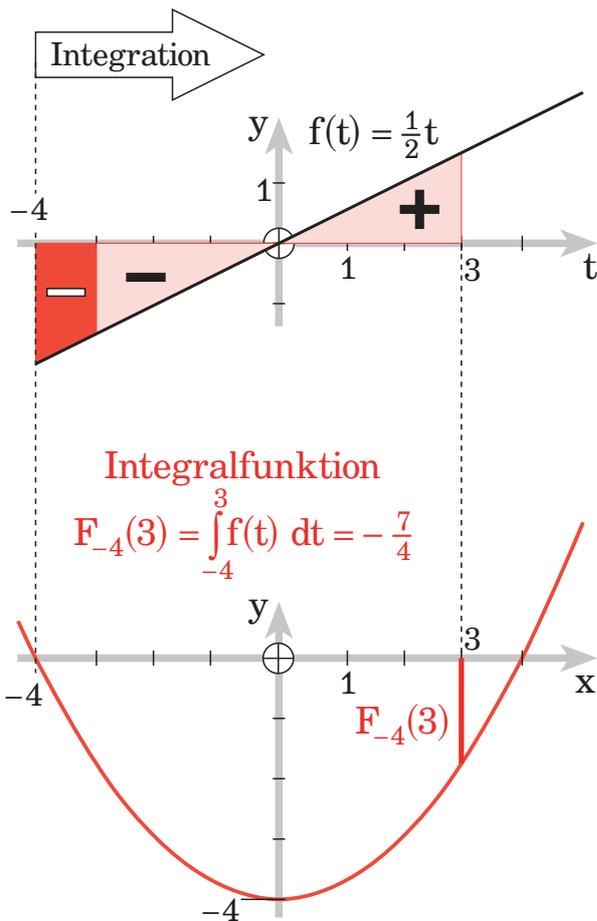
Nullstelle -4 : $\int_{-4}^x \frac{1}{2}t dt = \left[\frac{1}{4}t^2\right]_{-4}^x = \frac{1}{4}x^2 - 4$

Nullstelle 4 : $\int_4^x \frac{1}{2}t dt = \left[\frac{1}{4}t^2\right]_4^x = \frac{1}{4}x^2 - 4$



Ein Blick auf die Bilder zeigt:

Die Flächenbilanz von $\int_{-4}^x \frac{1}{2}t dt$ stimmt überein mit der von $\int_4^x \frac{1}{2}t dt$.



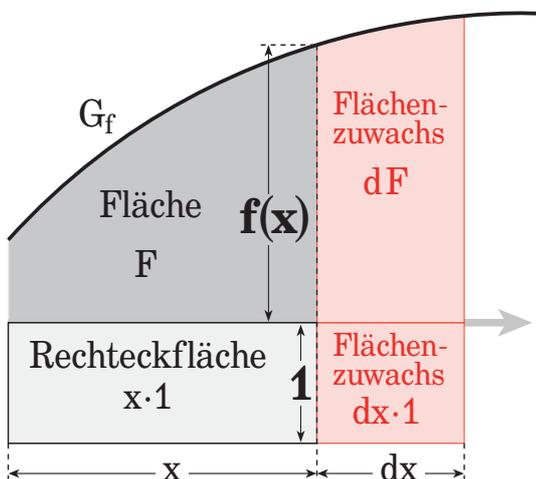
Zum Nachdenken

1 Newtons Weg zum Hauptsatz

In seiner Abhandlung »Tract of fluxions« (1666) begründet NEWTON den Hauptsatz anschaulich mit einer Überlegung aus der Bewegungslehre:

Er vergleicht die zeitliche Flächenänderung $\frac{dF}{dt}$ mit der zeitlichen Abszissenänderung $\frac{dx}{dt}$ und deutet dx als Inhalt eines Rechtecks mit den Seiten dx und 1.

Bei kleinem dt verhalten sich die Änderungen der Flächeninhalte wie die Ordinaten $f(x)$ und 1.



NEWTON: Die Flächenzuwächse pro Zeit dt verhalten sich wie die Ordinaten.

$$\frac{\frac{dF}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{f(x)}{1} \Rightarrow \frac{dF}{dx} = f(x)$$

Das ist der Hauptsatz.

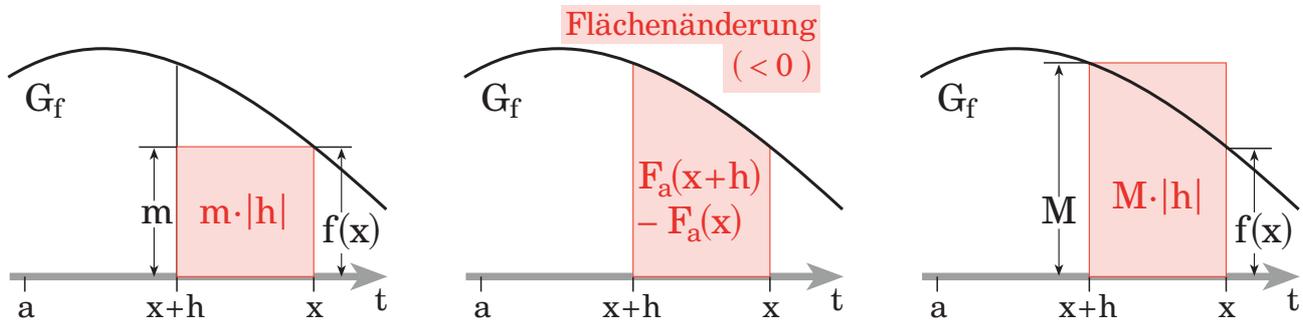
② Ergänzungen zum Beweis des Hauptsatzes

Wir haben den Hauptsatz bewiesen für stetige Funktionen mit $f(x) \geq 0$.

Außerdem haben wir $h > 0$ angenommen.

Der Beweis ändert sich nur unwesentlich, falls man $f(x) < 0$ ist oder $h < 0$ annimmt.

Fall: $f(x) \geq 0, h < 0$



Flächenvergleich: $m \cdot |h| \leq |F_a(x+h) - F_a(x)| \leq M \cdot |h|$

Division durch $|h|$: $m \leq \left| \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} \right| \leq M$

Weil Zähler und Nenner negativ sind, können die Betragstriche wegbleiben

$$m \leq \frac{F_a(x+h) - F_a(x)}{h} \leq M$$

Für $h \rightarrow 0$ ergibt sich wieder der Hauptsatz.

Fall: $f(x) < 0$

Wir betrachten g mit $g(x) = -f(x)$ und $g(x) \geq 0$. Für g gilt der Hauptsatz: $\left(\int_a^x g(t) dt \right)' = g(x)$.

Also gilt auch $\left(\int_a^x -f(t) dt \right)' = \left(- \int_a^x f(t) dt \right)' = - \left(\int_a^x f(t) dt \right)' = -f(x)$

und damit $\left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x)$, q.e.d.

③ Stetigkeit und Hauptsatz

Der Hauptsatz gilt nur an den Stellen, wo die Funktion stetig ist.

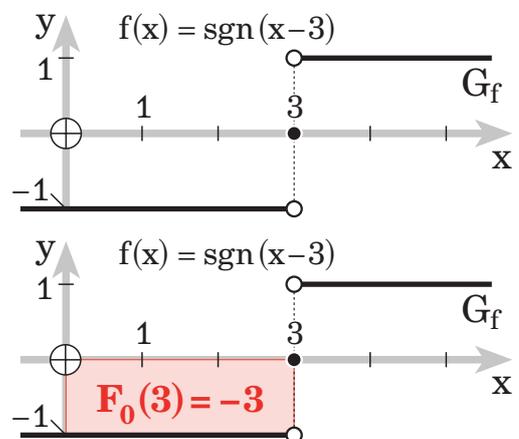
Das Beispiel $f(x) = \text{sgn}(x-3)$ zeigt, was an der Unstetigkeits-Stelle 3 passiert.

$$f(x) = \text{sgn}(x-3) = \begin{cases} -1 & \text{für } x < 3 \\ 0 & \text{für } x = 3 \\ 1 & \text{für } x > 3 \end{cases}$$

Für $x < 3$ gilt: $F_0(x) = \int_0^x (-1) dt = [-t]_0^x = -x$.

Für $x = 3$ gilt: $F_0(3) = \int_0^3 (-1) dt = -3$.

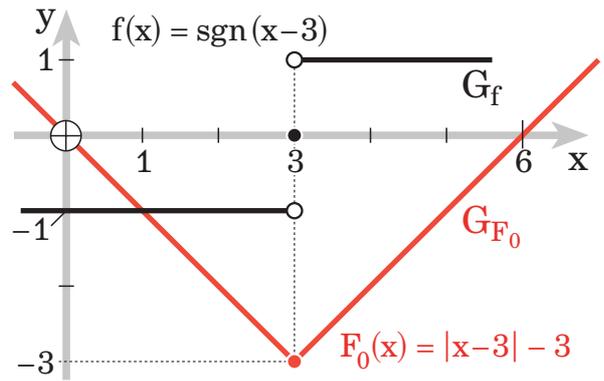
Für $x > 3$ gilt: $F_0(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^3 f(t) dt + \int_3^x f(t) dt = -3 + \int_3^x 1 dt = -3 + [t]_3^x = -3 + x - 3 = x - 6$



Zusammengefasst:

$$F_0(x) = \begin{cases} -x & \text{für } x < 3 \\ -3 & \text{für } x = 3 \\ x-6 & \text{für } x > 3 \end{cases}$$

$$F_0(x) = |x-3| - 3$$



Obwohl der Integrand f bei 3 unstetig ist, ist die Integralfunktion F_0 dort stetig, denn:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} F_0(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (-x) = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} F_0(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x-6) = -3 \text{ und } F_0(3) = -3.$$

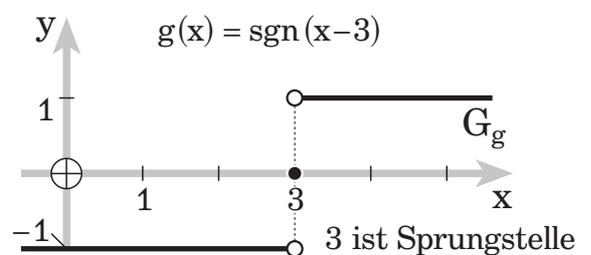
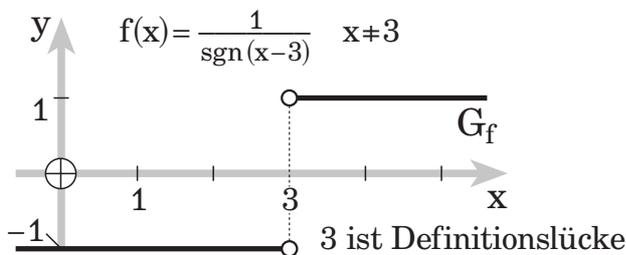
Der Hauptsatz gilt aber nicht an der Unstetigkeitsstelle 3, weil F_0 dort nicht differenzierbar ist:

$$F_0'(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x < 3 \\ 1 & \text{für } x > 3 \end{cases} \text{ und } \lim_{x \rightarrow 3^-} F_0'(x) = -1 \neq 1 = \lim_{x \rightarrow 3^+} F_0'(x).$$

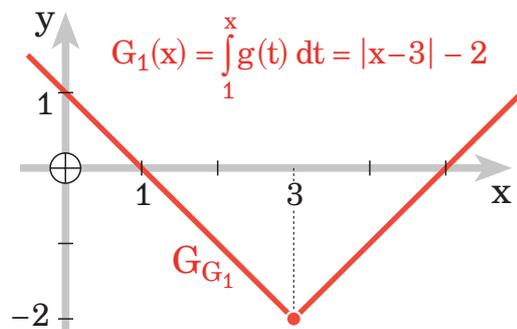
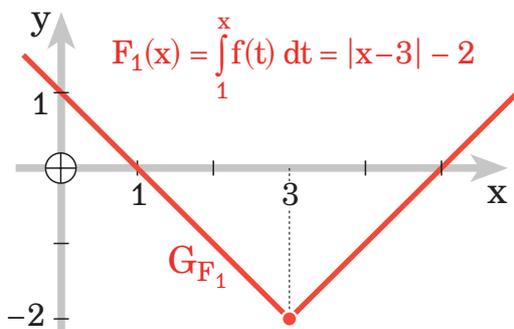
④ Merkwürdige Beziehungen zwischen Integral- und Stammfunktion

Der Integrand hat eine Definitionslücke oder eine Sprungstelle

Integrand

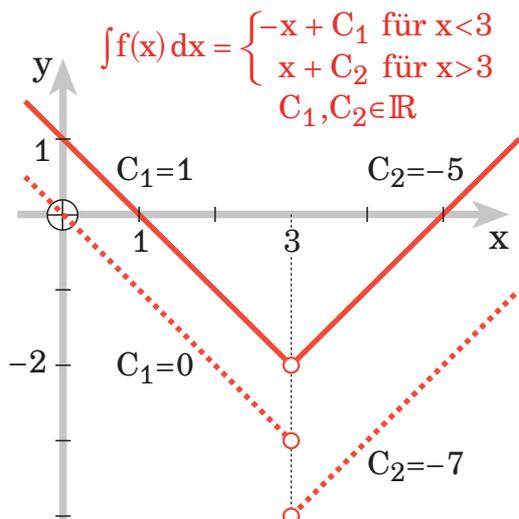


Integralfunktion



Bei den Integralfunktionen (Flächenbilanz!) fallen einzelne Punkte nicht ins Gewicht. Ein Sprung im Graphen des Integranden wirkt sich nur aus als Ecke im Graphen der Integralfunktion. Bei 3 gilt der Hauptsatz nicht: f ist bei 3 nicht definiert, und g ist dort unstetig.

Stammfunktionen



Integrandfunktion und Stammfunktionen sind für $x=3$ nicht definiert. In den beiden Teilbereichen $x < 3$ und $x > 3$ kann man die Konstanten C_1 und C_2 unabhängig voneinander wählen.

g hat keine Stammfunktion.

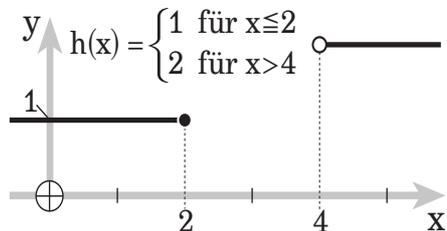
Im Gegensatz zu f ist g bei 3 definiert. Also müsste eine Stammfunktion auch dort definiert sein. Das ist aber unmöglich, weil der Graph der Stammfunktion in der Stelle 3 eine Ecke hätte. Das aber kann nicht sein, weil eine Stammfunktion differenzierbar sein muss.

Gaston DARBOUX (1842 bis 1917) hat sogar gezeigt, dass Ableitungsfunktionen keine Sprünge haben können.

f und g haben zwar Integrandfunktionen, aber diese Integrandfunktionen sind keine Stammfunktionen.

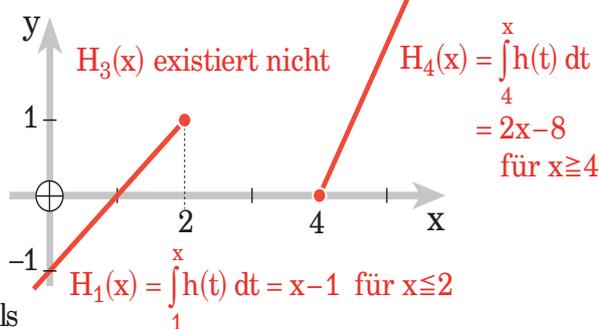
Der Integrand $h(x)$ ist auf einem Intervall nicht definiert.

Integrand



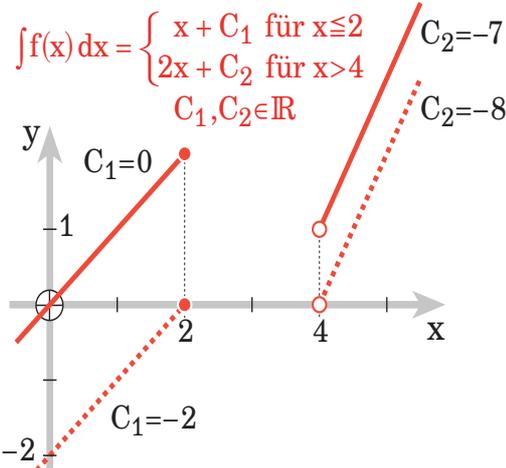
Die Integrandfunktionen sind jeweils nur definiert in einem der beiden Teilbereiche $x \leq 2$ oder $x \geq 4$.

Integralfunktionen



Die Stammfunktionen dagegen existieren sowohl für $x \leq 2$ als auch für $x > 4$.

Stammfunktionen



Aufgaben

◇1 Leite ab: **a)** $\int_1^x (1-t+t^2) dt$ **b)** $\int_2^x \frac{1-t}{1+t} dt$ **c)** $\int_3^x \sqrt{1-t^2} dt$ **d)** $\int_4^x \frac{\sin u}{\sqrt{1+(\tan u)^2}} du$

◇2 Bestimme die 2. Ableitung: **a)** $\int_0^x t\sqrt{t^2-1} dt$ **b)** $\int_{-2}^x \frac{s}{s^2+1} ds$

◇3 Bestimme durch Integration den Term $F(x)$ der Integralfunktion und leite ihn ab. Differenziere dann unabhängig davon die Integralfunktion mithilfe des Hauptsatzes (also ohne Integration!).

a) $F(x) = \int_{-1}^x (3t^2+2t-1) dt$ **b)** $F(x) = \int_{\pi}^x (\sqrt{t} + \cos t) dt$ **c)** $F(x) = \int_a^x \frac{a^2}{v^3} dv$

•4 Leite ab: **a)** $\int_a^x (t^2-1) dt$ **b)** $\int_x^a (t^2-1) dt$ **c)** $\int_a^{-x} (t^2-1) dt$

d) $\int_x^{-x} (t^2-1) dt$ **e)** $\int_a^{x^2} (t^2-1) dt$ **f)** $\int_a^{a^2} (t^2-1) dt$

g) $\int_a^{ax} (t^2-1) dt$ **h)** $\int_a^x (t^2-x) dt$

•5 $F_0(x) = \int_0^x (12-t^2) dt$ $F_a(x) = \int_a^x (12-t^2) dt$

Worin unterscheiden sich F_0 und F_a ?

Für welche Werte von a gilt $F_0 = F_a$?

◇6 Berechne: **a)** $\int_0^{10} (10-3x^2) dx$ **b)** $\int_1^2 (4x^3-6x^2+4x-6) dx$ **c)** $\int_{-3}^{-2} \frac{6}{x^2} dx$

d) $\int_{2,25}^{6,25} \frac{-1}{\sqrt{x}} dx$ **e)** $3 \int_{16}^1 (\sqrt{x}-2x) dx$ **f)** $2,5 \int_9^4 x\sqrt{x} dx$

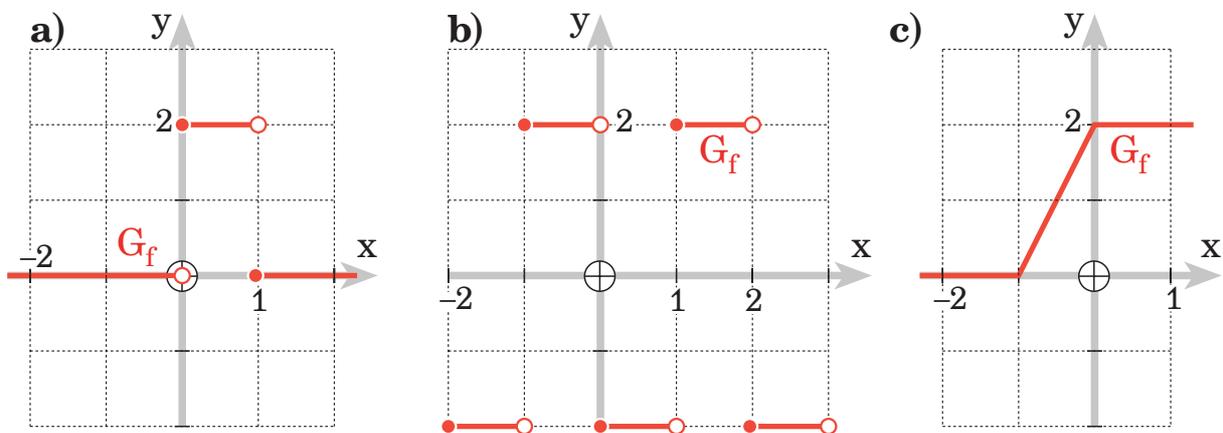
g) $-3 \int_1^3 \frac{1-x^4}{x^2} dx$ **h)** $8 \int_{-2}^{-1} \frac{1-x^4}{x^3} dx$ **i)** $6 \int_1^{0,5} \frac{1-x^4}{x^4} dx$

7 Berechne: **a)** $\int_0^{\pi} \sin x dx$ **b)** $\int_0^{\pi} \cos x dx$ **c)** $\int_{-\pi}^{\pi/2} (\sin x - 2 \cos x) dx$

8 Berechne: **a)** $\int_0^a (2x - 1) dx$ **b)** $\int_0^1 (2x - a) dx$ **c)** $\int_0^a (2x - a) dx$
d) $\int_{-a}^a (2x - a) dx$ **e)** $\int_{a-1}^{a+1} (2x - a) dx$ **f)** $\int_{1-a}^a (2x - a) dx$

•9 Berechne: **a)** $\int_{2a}^a (4x^3 - a^3) dx$ **b)** $\int_{-a}^{2a} 6x(x - a) dx$ **c)** $\int_a^b 6(x - a)(x - b) dx$
d) $2 \int_a^b \frac{x-b}{a-b} dx$ **e)** $3 \int_a^b \frac{x^2 - a^2}{2a+b} dx$ **f)** $2 \int_{a-b}^{b-a} \frac{ax-b}{a-b} dx$

◊10 Gegeben sind 3 Streckenzüge G_f :



Skizziere die Graphen von

$F_0(x) = \int_0^x f(t) dt$ $F_1(x) = \int_1^x f(t) dt$ $F_{-1}(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$

außerdem für **c)** $F_{-2}(x) = \int_{-2}^x f(t) dt$.

◊11 Der Graph G_f ist ein Streckenzug.

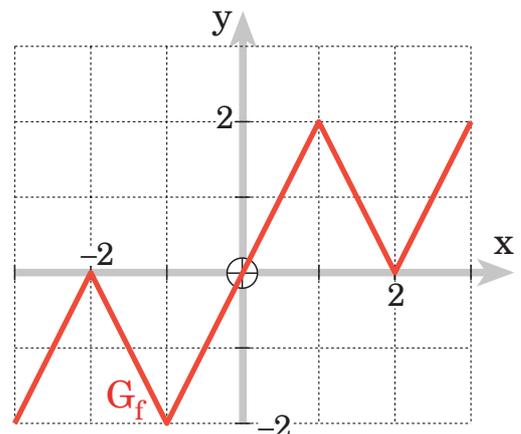
a) Skizziere die Graphen von

$F_{-2}(x) = \int_{-2}^x f(t) dt$, $F_{-1}(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$

$F_0(x) = \int_0^x f(t) dt$, $F_1(x) = \int_1^x f(t) dt$

b) $f(x) = \int_a^x g(t) dt$

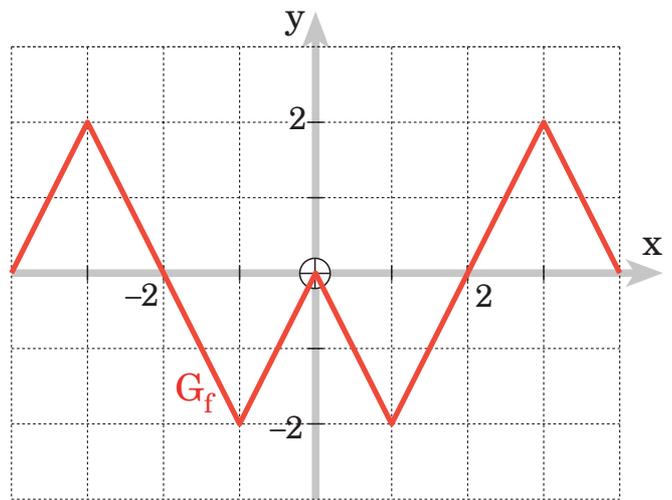
Bestimme a und g(x).



- 12** Der Graph G_f ist ein Streckenzug.
Skizziere die Graphen von

$$F_{-4}(x) = \int_{-4}^x f(t) dt, \quad F_{-1}(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$$

$$F_0(x) = \int_0^x f(t) dt, \quad F_1(x) = \int_1^x f(t) dt$$



- 13** Berechne (Falls nötig:
Fallunterscheidung und Zerlegung
des Integrationsintervalls!)

a) $\int_{-1}^1 |x| dx$

b) $\int_{-1}^1 \sqrt{|x|} dx$

c) $\int_{-2}^2 x|x-1| dx$

d) $\int_0^2 |1-x^2| dx$

- ◊**14** $f(x) = 2x - \frac{1}{2}x^2$. Zeichne G_f und berechne:

a) $\int_0^4 f(x) dx, \int_2^4 f(x) dx$

b) $\int_{-1}^0 f(x) dx, \int_5^4 f(x) dx$

c) $\int_{-1}^2 f(x) dx, \int_5^{-1} f(x) dx$

- ◊**15** $f(x) = x^3 - 3x$. Zeichne G_f und berechne: a) $\int_0^4 f(x) dx$ b) $\int_0^{\sqrt{6}} f(x) dx$

- ◊**16** Zeichne G_f der Integrandfunktion und bestimme x :

a) $\int_9^x \frac{1}{2}(t^2 - 12t + 33) dt = 0$ b) $\int_{-3}^x \frac{1}{2}(t^2 - 4t - 3) dt = \frac{20}{3}$ c) $\int_{-5}^x \frac{1}{2}(t^2 + 4t - \frac{1}{3}) dt = -4$

- 17** Bestimme x :

a) $\int_4^x (4t^3 - 12t^2 - 14t + 34) dt = 0$

b) $\int_7^x (4t^3 - 130t) dt = 720$

c) $\int_6^x (4t^3 - 30t^2 + 50t) dt = -36$

- 18** Gegeben sind Integranden $f(x)$. Bestimme die Schar der Integralfunktionen $F_a(x) = \int_a^x f(t) dt$ und die Schar der Stammfunktionen $F_c(x)$.
Untersuche: Für welche Zahlen C ist $F_C(x)$ zugleich auch Integralfunktion?

a) $f(x) = 2$

b) $f(x) = 2x$

c) $f(x) = 2x + 2$

d) $f(x) = -2x + 4$

e) $f(x) = 4x^3 - 4x$

f) $f(x) = -12x^3 + 12x^2 + 24x$

g) $f(x) = 5x^4 + 2x$

h) $f(x) = \sin x$

•i) $f(x) = 2x + \sin x$

•19 $f(x) = x^2(4 - x), \quad I = \int_0^2 f(x) dx$

a) Wie ändert sich der Wert I, wenn man $f(x)$ ersetzt durch

$\alpha) g(x) = f(x) + 1 \quad \bullet \beta) h(x) = f(-x+2) ?$

Begründe die Aussagen geometrisch.

b) $F(x) = \int_0^x f(t) dt$

Beschreibe G_F möglichst genau (Nullstellen, Monotonie, gegebenenfalls die x -Werte von Hoch-, Tief- und Wendepunkten), ohne zu integrieren. Begründe die Aussagen und skizziere G_F .

c) Für welche Zahlen C ist $F_C(x) = \int_0^x f(t) dt + C$ zugleich auch eine Integralfunktion von f ?

•20 $h(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{für } x \leq 0 \\ 1 - x^2 & \text{für } x > 0 \end{cases}$

a) Zeichne G_h .

b) $H(x) = \int_{-1}^x h(t) dt$ $\alpha)$ Berechne die Nullstellen von G_H .

$\beta)$ Berechne die Stellen der Extrema.

Von welcher Art sind die Extrempunkte?

$\gamma)$ Welches Vorzeichen hat $H(-2)$? (Keine Rechnung!)

•c) Berechne den Term $H(x)$ durch Integration.

d) Zeichne die Untersumme mit 4 gleich breiten Streifen für $H(1)$ ein und berechne ihren Wert.

•21 Glättungseffekt der Integralfunktion

Zeichne G_f und G_F und beschreibe das Verhalten (Stetigkeit, Differenzierbarkeit) an der Stelle a .

a) $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases} \quad F(x) = \int_0^x f(t) dt \quad a = 0$

b) $f(x) = \operatorname{sgn}(x-2)^2 \quad F(x) = \int_1^x f(t) dt \quad a = 2$

c) $f(x) = |x - 1| \quad F(x) = \int_0^x f(t) dt \quad a = 1$

•22 Glättungseffekt der Integralfunktion

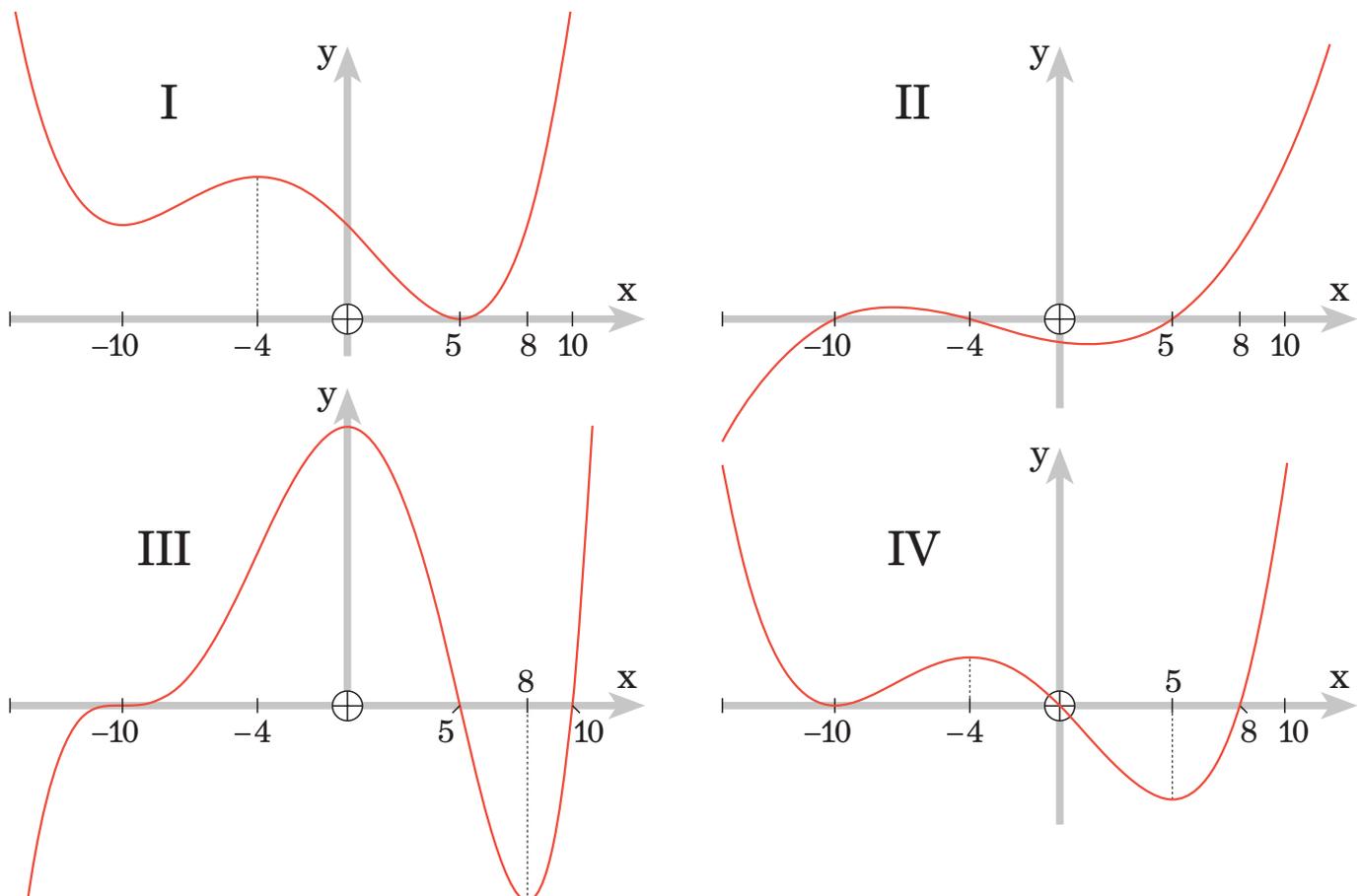
Zeichne G_f und G_F und beschreibe das Entstehen und Verschwinden isolierter Definitionslücken beim Differenzieren und Integrieren.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & f(x) = \frac{1}{\operatorname{sgn} x} & F(x) = \int_{-1}^x f(t) \, dt \quad a = 0 \\ \text{b)} & f(x) = \frac{1}{(\operatorname{sgn} x)^2} & F(x) = \int_1^x f(t) \, dt \quad a = 0 \\ \text{c)} & f(x) = 2 - \frac{|x-2|(x-2)}{x-2} & F(x) = \int_3^x f(t) \, dt \quad a = 2 \end{array}$$

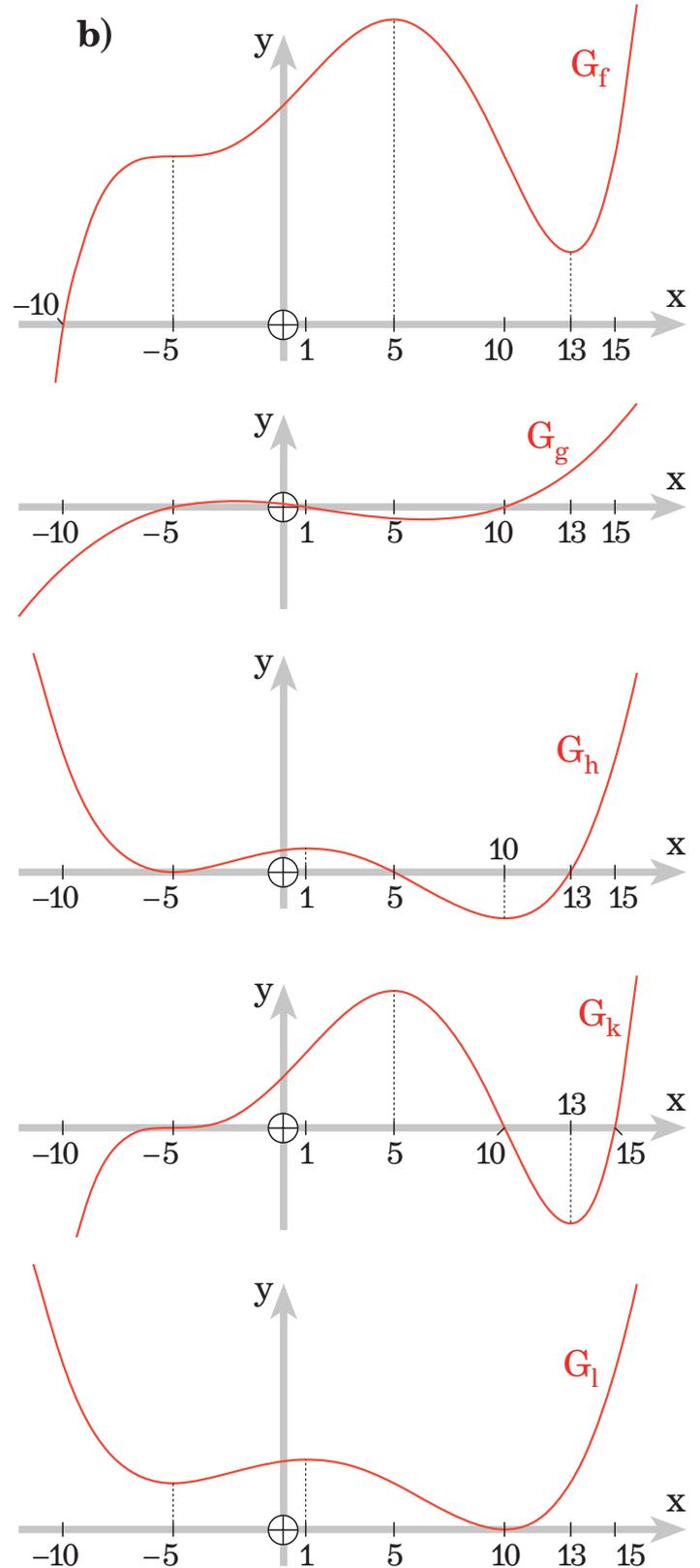
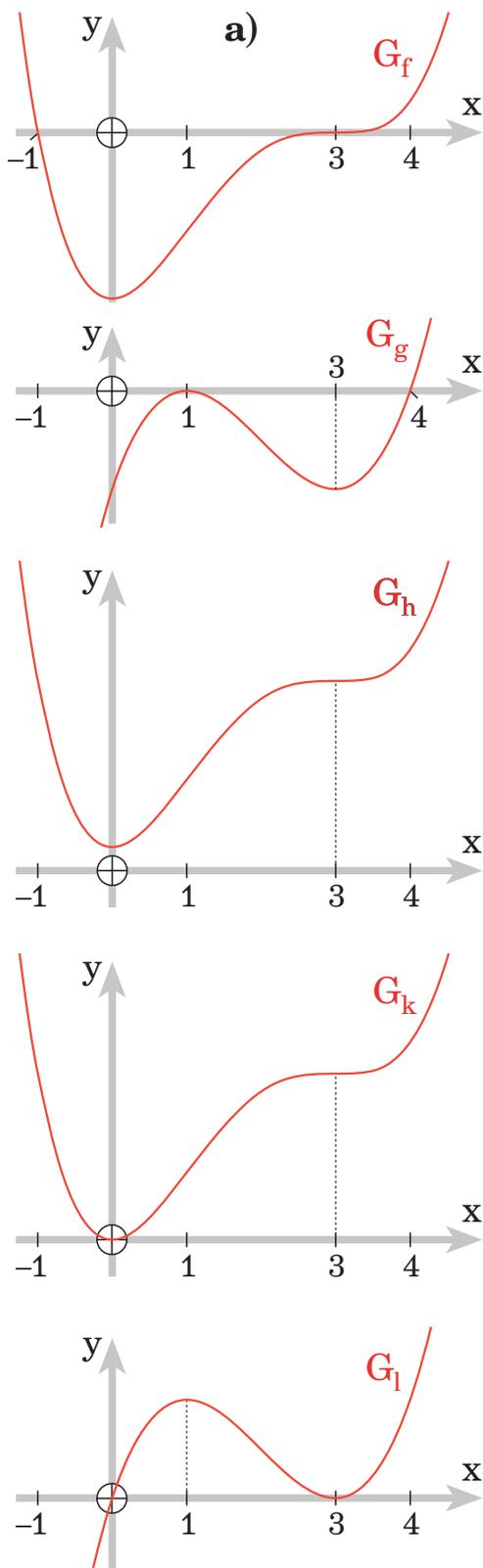
- 23 Es gilt der Satz: Ist a eine n -fache Nullstelle ($n > 1$) der differenzierbaren Funktion f , dann ist a eine $(n-1)$ -fache Nullstelle von f' . Bei der Umkehrung muss man vorsichtig sein.

Sei $F_C(x) = \int_C^x f(t) \, dt$ und a eine n -fache Nullstelle von f .

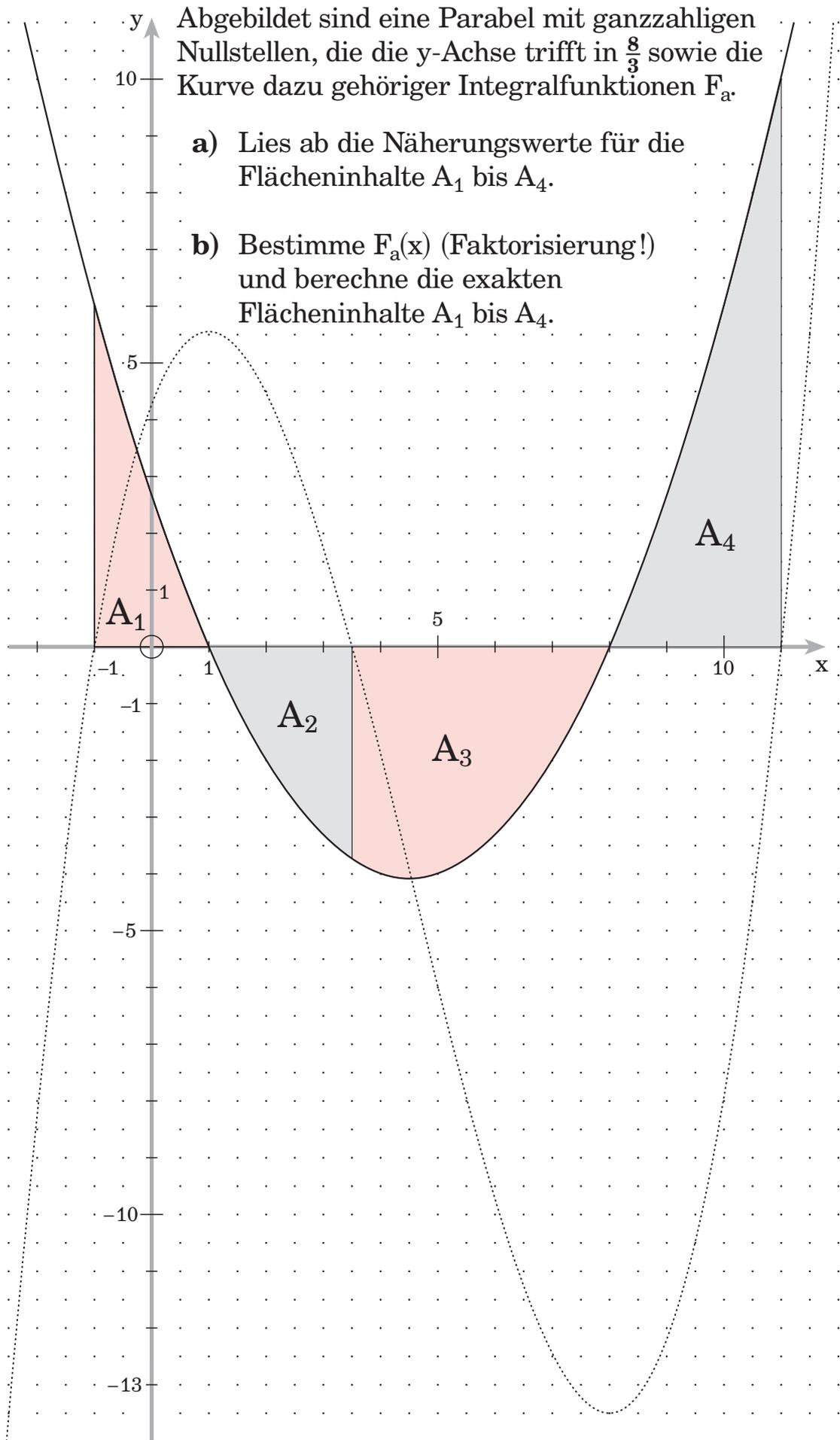
- a) Zeige: Man kann C immer so wählen, dass a eine $(n+1)$ -fache Nullstelle von F_C ist.
- b) Gib ein Beispiel an mit $a=0$ und $n=2$, in dem es 2 verschiedene Lösungen für C gibt.
- 24 Die 4 Polynomkurven mit den Funktionstermen $f(x)$, $f'(x)$, $\int_a^x f(t) \, dt$ und $\int_b^x f'(t) \, dt$ haben ganzzahlige Null- und Waagrechtstellen. Welche Kurve gehört zu welchem Term? Welche Werte haben a und b ?



25 Die Polynomkurven G_f, G_g, G_h, G_k und G_l haben ganzzahlige Null- und Waagrechtstellen. Eine dieser Polynomkurven ist die Kurve eines Integranden, andere sind Kurven zugehöriger Stamm- und Integralfunktionen. Welche Kurve ist die des Integranden? Welche Kurve gehört zu einer seiner Stammfunktionen? Welche Kurve gehört zu einer seiner Integralfunktionen? (Nenne gegebenenfalls mögliche untere Integrationsgrenzen.)



•26



:27

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{3}x - \frac{4}{3}$$

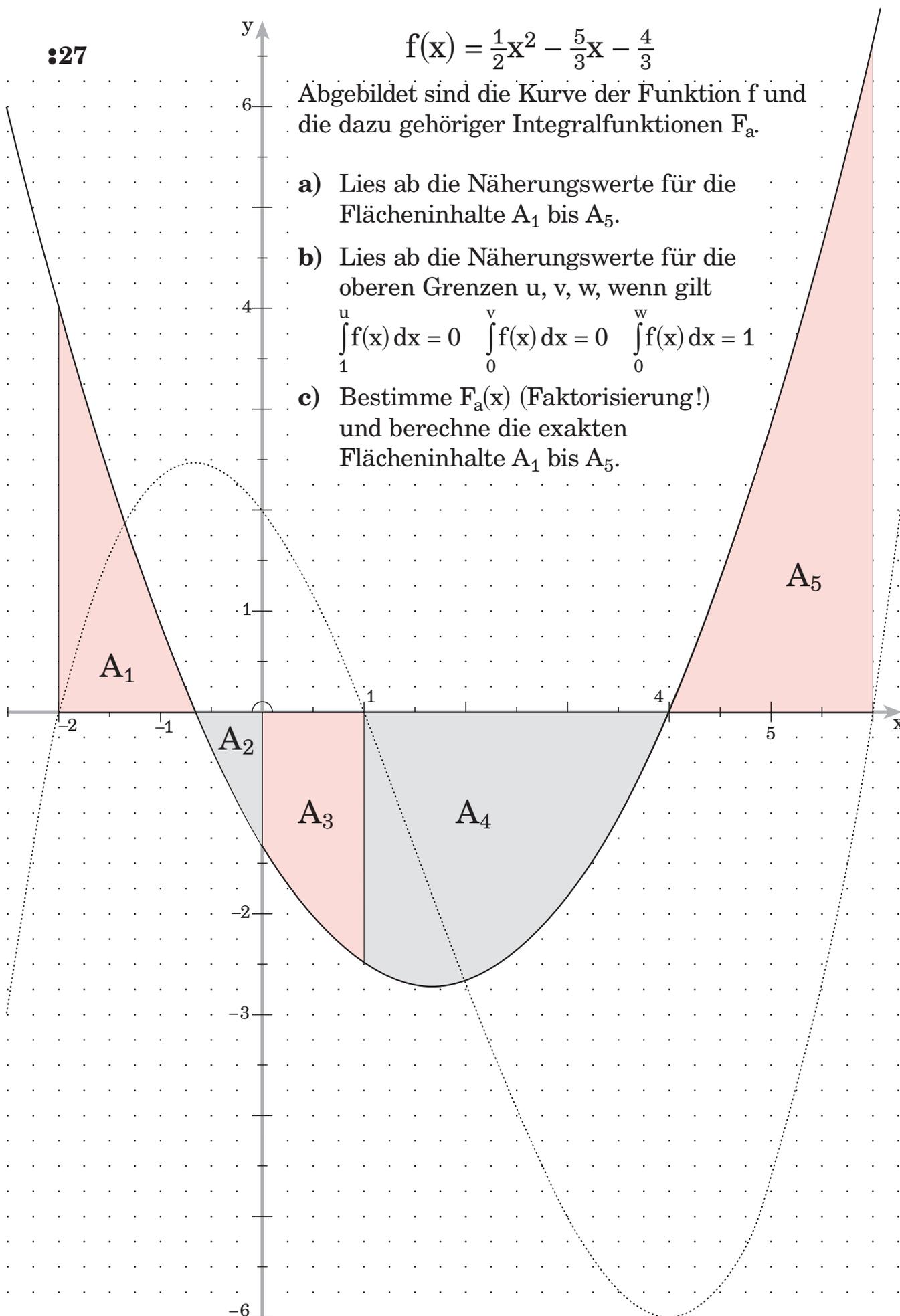
Abgebildet sind die Kurve der Funktion f und die dazu gehöriger Integralfunktionen F_a .

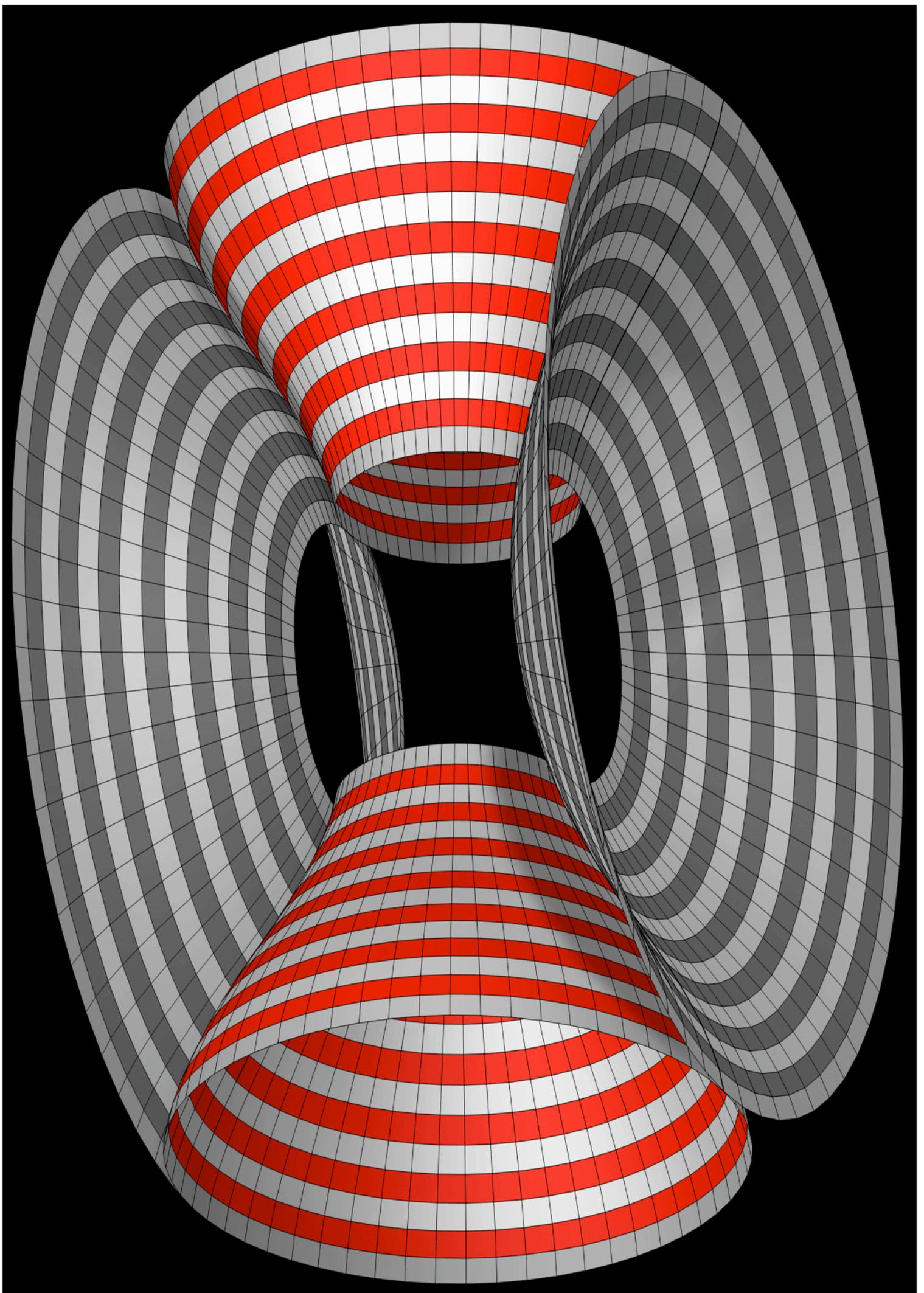
a) Lies ab die Näherungswerte für die Flächeninhalte A_1 bis A_5 .

b) Lies ab die Näherungswerte für die oberen Grenzen u , v , w , wenn gilt

$$\int_1^u f(x) dx = 0 \quad \int_0^v f(x) dx = 0 \quad \int_0^w f(x) dx = 1$$

c) Bestimme $F_a(x)$ (Faktorisierung!) und berechne die exakten Flächeninhalte A_1 bis A_5 .





IV. Anwendung der Integralrechnung

1. Flächeninhalt

Hauptaufgabe der Integralrechnung ist die Berechnung von Flächeninhalten. Bei jeder Flächenberechnung gilt: **Flächeninhalte sind nicht negativ.**

Das Integral $\int_a^b f(x) dx$ liefert jedoch **nicht** immer den Flächeninhalt, sondern nur die Flächenbilanz (die sogar negativ sein kann!).

Einfachster Typ: Die Fläche liegt zwischen der Kurve G_f und der x -Achse.

Beispiel: $f(x) = \frac{2}{9}x^2(3-x)$

Gesucht ist der Inhalt A der Fläche, die von -2 bis 4 zwischen G_f und der x -Achse liegt. Das Bild zeigt diese Fläche: Sie besteht aus 3 Flächenstücken. Die Flächenstücke grenzen an den Nullstellen von f aneinander, nämlich in 0 (2fach) und 3 (1fach).

In der Praxis berechnet man die Flächenstücke A_i getrennt, die über und unter der x -Achse liegen:

$$\int_{-2}^0 \frac{2}{9}x^2(3-x) dx = \frac{2}{9} \int_{-2}^0 (3x^2 - x^3) dx = \frac{2}{9} \left[x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right]_{-2}^0 = 0 - \frac{2}{9}(-8 - 4) = \frac{8}{3}, \quad A_1 = \frac{8}{3}$$

$$\int_0^3 \frac{2}{9}x^2(3-x) dx = \frac{2}{9} \int_0^3 (3x^2 - x^3) dx = \frac{2}{9} \left[x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^3 = \frac{2}{9} \left(27 - \frac{81}{4} \right) - 0 = \frac{3}{2}, \quad A_2 = \frac{3}{2}$$

$$\int_3^4 \frac{2}{9}x^2(3-x) dx = \frac{2}{9} \int_3^4 (3x^2 - x^3) dx = \frac{2}{9} \left[x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right]_3^4 = \frac{2}{9} (64 - 64) - \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}, \quad A_3 = \frac{3}{2}$$

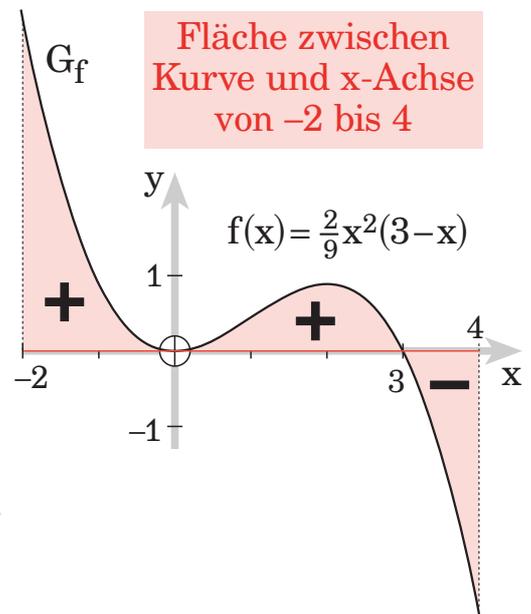
$$A = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{8}{3} + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = \frac{17}{3}$$

Dagegen liefert $\int_{-2}^4 f(x) dx$ die Flächenbilanz: $A_1 + A_2 - A_3 = \frac{8}{3}$

Bei gerader Vielfachheit einer Nullstelle ist ein Teilintegral unnötig:

$$\int_{-2}^3 \frac{2}{9}x^2(3-x) dx = \frac{2}{9} \left[x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right]_{-2}^3 = \frac{2}{9} \left(27 - \frac{81}{4} - (-8 - 4) \right) = \frac{25}{6}, \quad A^* = \frac{25}{6}$$

$$A = A^* + A_3 = \frac{25}{6} + \frac{3}{2} = \frac{17}{3}$$



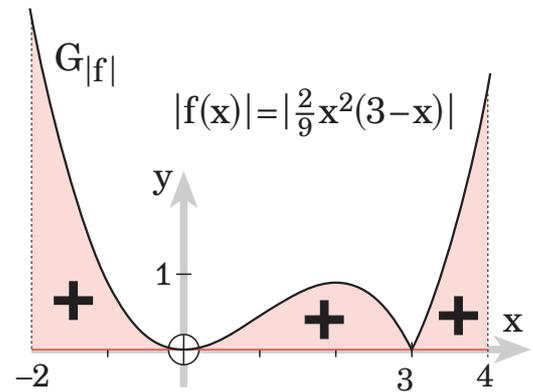
Formal löst man die Aufgabe so:

$$A = \int_a^b |f(x)| \, dx.$$

Der Betrag bewirkt, dass die Flächenstücke unter der x-Achse nach oben geklappt und positiv gezählt werden.

Vor der Integration beseitigt man die Betragstriche mit Fallunterscheidung:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{für } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{für } f(x) < 0 \end{cases}$$



Allgemeiner Typ: Die Fläche liegt zwischen 2 Kurven G_f und G_g .

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{3}x^2(4-x)$, $g(x) = \frac{1}{3}x^2$

Gesucht ist der Inhalt der Fläche, die von -2 bis 4 zwischen G_f und G_g liegt.

Auch hier berechnet man die Flächenstücke A_i einzeln. Diese hängen ab von den Schnittpunkten von G_f und G_g .

Schnitt von G_f und G_g :

$$f(x) = g(x) \text{ oder } f(x) - g(x) = 0$$

$$\frac{1}{3}x^2(4-x) - \frac{1}{3}x^2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}x^2(3-x) = 0$$

Schnittstellen: 0 (2fach), 3 (1fach)

Ein solches Flächenstück A_i errechnet sich als Differenz zweier Flächenstücke:

Das große liegt zwischen der x-Achse und der oberen Kurve, das kleinere zwischen der x-Achse und der unteren Kurve:

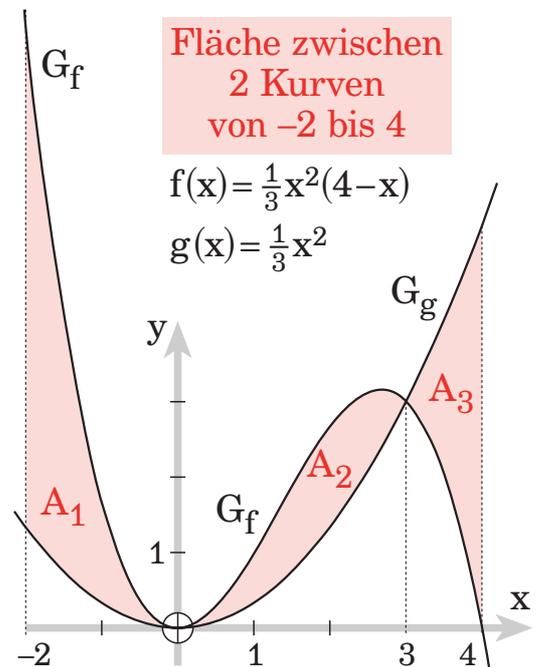
$$A_1 = \int_{-2}^0 f(x) \, dx - \int_{-2}^0 g(x) \, dx = \int_{-2}^0 (f(x) - g(x)) \, dx \quad (\text{Summenformel!})$$

Dem Bild entnimmt man: Im 1. und 2. Integrationsintervall liegt G_f über G_g , im 3. unter G_g . A_1 und A_2 ergeben sich also gleich als Integral der Differenzfunktion $f(x) - g(x)$:

$$A_1 = \int_{-2}^0 (f(x) - g(x)) \, dx = \int_{-2}^0 \frac{1}{3}x^2(3-x) \, dx = \int_{-2}^0 \frac{1}{3}(3x^2 - x^3) \, dx = \frac{1}{3} \left[x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right]_{-2}^0$$

$$A_1 = 0 - \frac{1}{3}(-8 - 4) = 4$$

$$A_2 = \int_0^3 (f(x) - g(x)) \, dx = \int_0^3 \frac{1}{3}x^2(3-x) \, dx = \frac{1}{3} \left[x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^3 = \frac{1}{3} \left(27 - \frac{81}{4} \right) - 0 = \frac{9}{4}$$



$$A_3 = \int_3^4 (g(x) - f(x)) \, dx = \int_3^4 \frac{1}{3}x^2(-3+x) \, dx = \frac{1}{3}[-x^3 + \frac{1}{4}x^4]_3^4 = \frac{1}{3}(-64 + 64) + \frac{9}{4} = \frac{9}{4}$$

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = 4 + \frac{9}{4} + \frac{9}{4} = \frac{17}{2}$$

0 ist 2fache Schnittstelle, bei 0 berühren sich beide Kurven ohne Durchdringung. Also lässt sich auch hier ein Integral einsparen:

$$A^* = \int_{-2}^3 (f(x) - g(x)) \, dx = \frac{1}{3}[x^3 - \frac{1}{4}x^4]_{-2}^3 = \frac{1}{3}(27 - \frac{81}{4}) - \frac{1}{3}(-8 - 4) = \frac{9}{4} + 4 = \frac{25}{4}$$

$$A = A^* + A_3 = \frac{25}{4} + \frac{9}{4} = \frac{17}{2}$$

Im vorigen Beispiel liegen alle Flächenstücke über der x-Achse. Doch das Verfahren klappt auch dann, wenn Teile der Flächenstücke unter der x-Achse liegen.

Begründung: In Gedanken addiert man zu beiden Termen $f(x)$ und $g(x)$ eine Konstante c , die so groß ist, dass alle Flächenstücke dann über der x-Achse liegen. Für $f(x) \geq g(x)$ gilt dann:

$$A = \int_a^b [(f(x)+c) - (g(x)+c)] \, dx = \int_a^b (f(x) - g(x)) \, dx$$

Allgemein gilt: Ist $f(x) \geq g(x)$ in $[a; b]$, dann ist der Inhalt A der Fläche von a bis b

$$\text{zwischen den Kurven } G_f \text{ und } G_g: A = \int_a^b (f(x) - g(x)) \, dx$$

Vorm Integrieren muss man die Schnittstellen berechnen; diese sind die Nullstellen der Differenzterms $f(x) - g(x)$.

Bewährtes Rezept:

- Bilde den Differenzterm: $f(x) - g(x)$ [oder $g(x) - f(x)$]
- Bestimme die Nullstellen des Differenzterms, das sind die Schnittstellen beider Kurven und zugleich die Integrationsgrenzen.
- Integriere den Differenzterm auf den Intervallen, die diese Nullstellen bilden.
- Addiere die Beträge dieser Teilintegrale.

Aufgaben

Fläche zwischen Kurve und x-Achse

◇1 $f(x) = 4x(x + 2)(x - 5)$

Bestimme den Inhalt der Fläche,
die von a bis b zwischen G_f und der x-Achse liegt.

- a)** $a = -1, b = 0$ **b)** $a = 0, b = 1$ **c)** $a = -1, b = 1$
d) a ist die kleinste, b die größte Nullstelle von f.

◇2 $f(x) = 105(x^2 - 1)(x^4 - 1)$

Bestimme die Inhalte der Flächenstücke,
die G_f und die x-Achse einschließen.

- 3 Eine Polynomfunktion vom Grad 4 habe die Eigenschaften:
– G_f hat den Ursprung als Terrassenpunkt und die Nullstelle 4,
– die Fläche zwischen G_f und der x-Achse hat den Inhalt 6,4.
Bestimme $f(x)$ und skizziere G_f .
- 4 $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$
Bestimme die Koeffizienten a bis e so, dass gilt:
– G_f hat im Ursprung eine Tangente mit Steigung 8,
– G_f hat den Wendepunkt $(2|0)$,
– G_f und die x-Achse begrenzen zwischen 0 und 2 ein Flächenstück mit Inhalt 1,6.
- 5 Jedes Schaubild der folgenden Scharfunktionen begrenzt mit der x-Achse ein endliches Flächenstück.
Bestimme den Scharparameter so, dass dieses den Inhalt A hat.

◇a) $f_a(x) = \frac{1}{4}ax(x+a), \quad A = 54$ b) $g_a(x) = ax^2 + 2x, \quad A = 12$

c) $h_a(x) = \frac{1}{12}x(x-a)^2, \quad A = \frac{1}{9}$ d) $i_a(x) = \frac{2}{3a^2}x^3 - \frac{2}{a}x^2, \quad A = 72$

◆6 $f_a(x) = \frac{4}{a^2}(a-8)(x^2 - ax)$

- a)** Bestimme den Inhalt $A(a)$ der Fläche zwischen G_{f_a} und der x-Achse.
b) Für welche Werte von a ist der Flächeninhalt $A(a)$ gleich 8 ?
c) Bestimme a so, dass $A(a)$ möglichst groß ist,
und gib den maximalen Flächeninhalt an.

Gegeben ist die Integralfunktion F_4 mit $F_4(x) = \int_4^x f_4(t) dt$

- d)** Bestimme den Term $F_4(x)$ und alle seine Nullstellen.
e) Bestimme die Hoch-, Tief- und Wendepunkte von G_{F_4} .
Skizziere G_{f_4} und G_{F_4} in ein und dem selben Koordinatensystem.

•7 $f_a(x) = \frac{a-1}{3}x^3 - ax$

Für welchen Wert $a > 0$ begrenzen das Schaubild von f_a und die x -Achse eine möglichst kleine Fläche?

•8 Gegeben ist jeweils eine Funktionenschar. Bestimme den Scharparameter so, dass das zugehörige Schaubild und die x -Achse eine Fläche von extremalem Inhalt einschließen. Entscheide, was für ein Extremum vorliegt.

a) $a_k(x) = (1-4k)x - k^2x^2$

b) $b_k(x) = kx - \frac{1}{24}(k^2+1)x^2$

c) $c_k(x) = 2x - \frac{k-1}{k}x^2$

d) $d_k(x) = \frac{1}{3}kx^3 - (k-1)x^2$

•e) $e_k(x) = \frac{1}{3}kx^3 - (k+1)x$

•f) $f_k(x) = \frac{1}{k}x^2 + k - 12$

•9 Obacht! Akrobatische Algebra nötig

Gegeben ist jeweils eine Funktionenschar. Bestimme den Scharparameter so, dass das zugehörige Schaubild und die x -Achse eine Fläche von extremalem Inhalt einschließen. Entscheide, was für ein Extremum vorliegt.

a) $a_k(x) = \frac{1}{k}x^2 - 2x - \frac{2}{k}$

b) $b_k(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2kx + 4k^2 - 4k$

•10 $f_a(x) = \frac{1}{4}x^3 - 2x^2 + \frac{a}{4}x$

Für welchen Wert von a hat G_f die x -Achse als Tangente?

Bestimme dann von dieser Funktion die Waagrechtspunkte und den Wendepunkt und skizziere das Schaubild.

Berechne den Inhalt des Flächenstücks zwischen Kurve und x -Achse.

•11 $f_a(x) = \begin{cases} a-x^2 & \text{für } x \leq 0 \\ x^3+1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$

a) Bestimme a so, dass f_a stetig ist.

b) Zeige: Die in a) bestimmte Funktion ist differenzierbar. Bestimme ihre 1. Ableitung.

c) Skizziere Kurven von f_a und f'_a .

d) Berechne den Inhalt der Fläche, die G_{f_1} und die Koordinatenachsen einschließen.

•12 $f(x) = (3 - |x|)(x + 1)$

a) Zeichne G_f .

b) Untersuche f auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

c) Berechne die Inhalte der beiden Flächenstücke, die von G_f und der x -Achse begrenzt sind.

Fläche zwischen 2 Kurven

◊13 Berechne die Inhalte der Flächen zwischen den Kurven mit den Termen:

a) $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ und $g(x) = x + 1$

b) $f(x) = x^2 - 4x + 1$ und $g(x) = -x^2 + 6x - 7$

14 $f(x) = |2x + 2|$ $g(x) = -x + 2$

Berechne den Inhalt der Fläche zwischen G_f und G_g .

Überprüfe geometrisch das Ergebnis.

15 Berechne den Inhalt der Fläche, die von G_f und G_g eingeschlossen ist.

◊a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ $g(x) = -x$

b) $f(x) = x^4 - 2x^2 - x$ $g(x) = -x - 1$

c) $f(x) = x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 13x - 7$ $g(x) = 1 - x$

16 Berechne den Inhalt der Fläche, die von G_f und G_g eingeschlossen ist.

◊a) $f(x) = x^3 - 4x$ $g(x) = 4 - x^2$

b) $f(x) = x^3 - 3x$ $g(x) = x^2 - 2x - 1$

c) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x + 1$ $g(x) = 4x^2 - 8x - 8$

•◊17 f sei eine Polynomfunktion mit Grad 4.

G_f habe den Ursprung als Wendepunkt mit der x -Achse als Tangente dort und gehe durch $A(-4|0)$ und $B(2|2)$.

a) Bestimme $f(x)$.

b) Bestimme Ort und Art von Waagrecht- und Flachpunkten, zeichne G_f .

c) Bestimme die Wendetangenten und zeichne sie ein.

d) Jede der beiden Wendetangenten und G_f begrenzen ein Flächenstück. Berechne die beiden Inhalte.

18 Die Sinus- und die Kosinus Kurve begrenzen kongruente Flächenstücke. Berechne den Inhalt eines dieser Flächenstücke.

19 $f(x) = x + \sin x$, $D_f = [0; 2\pi]$

a) Zeichne G_f und berechne: $\int_0^1 f(x) dx$, $\int_0^\pi f(x) dx$, $\int_{\pi/3}^{2\pi} f(x) dx$

b) Berechne den Inhalt des Flächenstücks, das begrenzt ist von G_f , der y -Achse und der Gerade mit $y=2\pi$.

•c) In welchem Verhältnis teilt die waagrechte Tangente das Flächenstück in Aufgabe b) ?

•d) In welchem Verhältnis teilt die Ursprungstangente das Flächenstück in Aufgabe b) ?

20 $f(x) = x^3 - x$

Bestimme die Wendetangente und Wendenormale und skizziere G_f .

Wie groß ist die Fläche, die zwischen G_f und der Wendenormale liegt?

•21 $f(x) = \frac{1}{2}x^2, \quad g_a(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{a}x^3$

Eine Scharkurve und die x -Achse schließen ein Flächenstück ein, das von der Parabel geteilt wird.

In welchem Verhältnis stehen die Inhalte der Teilflächen?

•22 $f_a(x) = x(x - a)^2, \quad g_a(x) = x(x^2 - a^2), \quad a > 0$

a) Skizziere aus jeder Schar die Kurve für $a = 2$. Bestimme den Inhalt $A(a)$ der Fläche, die eine Scharkurve von f_a und eine von g_a einschließen.

b) Bestimme m so, dass die Gerade mit $y = mx$ die Fläche mit Inhalt $A(a)$ halbiert.

•23 $f_a(x) = a - \frac{1}{a}x^2, \quad g_a(x) = a^3 - ax^2, \quad a > 0$

Bestimme a so, dass das von beiden Scharkurven oberhalb der x -Achse begrenzte Flächenstück möglichst groß ist. Berechne diesen Flächeninhalt.

•24 $f(x) = 4 - (x - 2)^2, \quad g_a(x) = ax$

a) Berechne den Inhalt $A(a)$ der Fläche, die G_f und G_{g_a} einschließen.

b) Für welchen Wert von a liegt zwischen G_f und G_{g_a} keine Fläche? Welche besondere Lage haben dann G_f und G_{g_a} ?

c) Die Parabel und die Schargerade durch den Scheitel der Parabel begrenzen ein Flächenstück. Wie oft passt sein Inhalt in die Fläche, die begrenzt ist von der Parabel und der x -Achse?

d) Bestimme den Term der Integralfunktion $I_c(x) = \int_c^x f(t) dt$

e) Für welche Werte von c ist der Graph von I_c symmetrisch zum Koordinatensystem?

f) Für welche Werte von c geht der Graph von I_c durch den Ursprung?

•25 Gegeben sei eine Parabel mit $f(x) = ax^2 + bx + c$.

2 Parallelen zur y -Achse mit Abstand $2k$, die Parabel und die x -Achse begrenzen ein Flächenstück.

Zeige: Die zugehörige Flächenbilanz, also das Integral, ist

$$\int_{x_0}^{x_0+2k} f(x) dx = \frac{2k}{6}(f(x_0) + 4f(x_0+k) + f(x_0+2k))$$

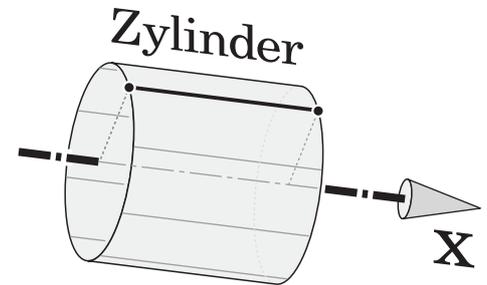
Tipp: Wähle $x_0 = 0$. Warum ist diese Wahl erlaubt?

2. Volumen von Rotationskörpern

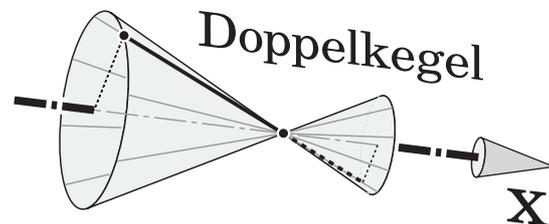
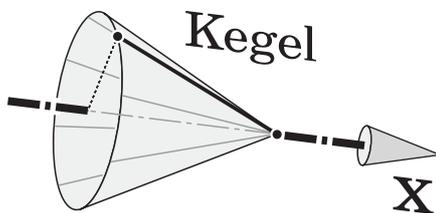
Rotiert eine ebene Kurve um eine Achse, die in der Ebene dieser Kurve liegt, so beschreibt sie eine **Rotationsfläche**, und diese begrenzt einen **Rotationskörper**.

Beispiele:

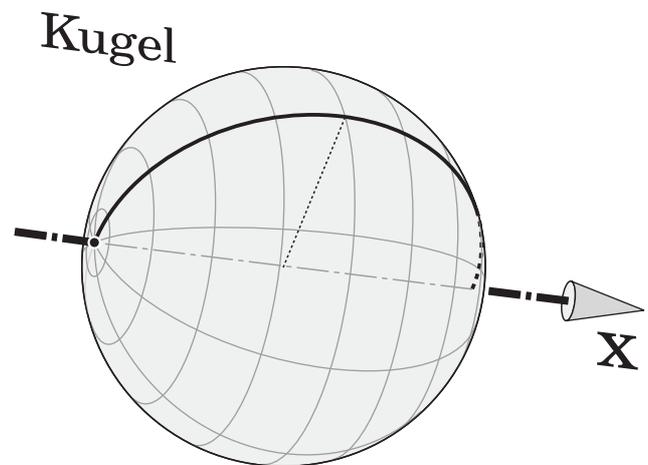
Kurve Strecke
Rotationsachse echt parallel zur Strecke
Rotationskörper Zylinder



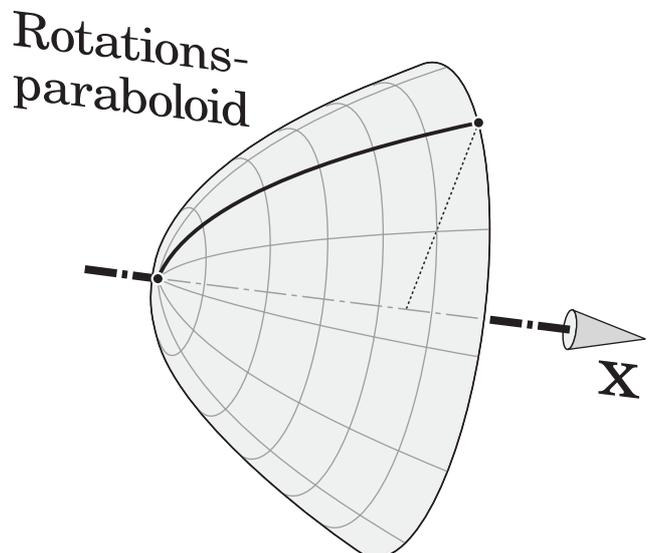
Kurve Strecke
Rotationsachse schneidet Strecke
Rotationskörper (Doppel)Kegel



Kurve Halbkreis
Rotationsachse Durchmesser
Rotationskörper Kugel

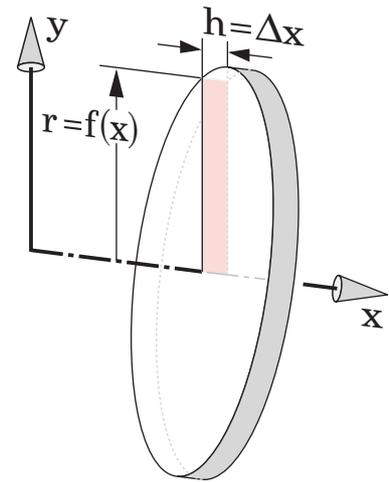


Kurve Parabelbogen
Rotationsachse Parabelachse
Rotationskörper Rotationsparaboloid

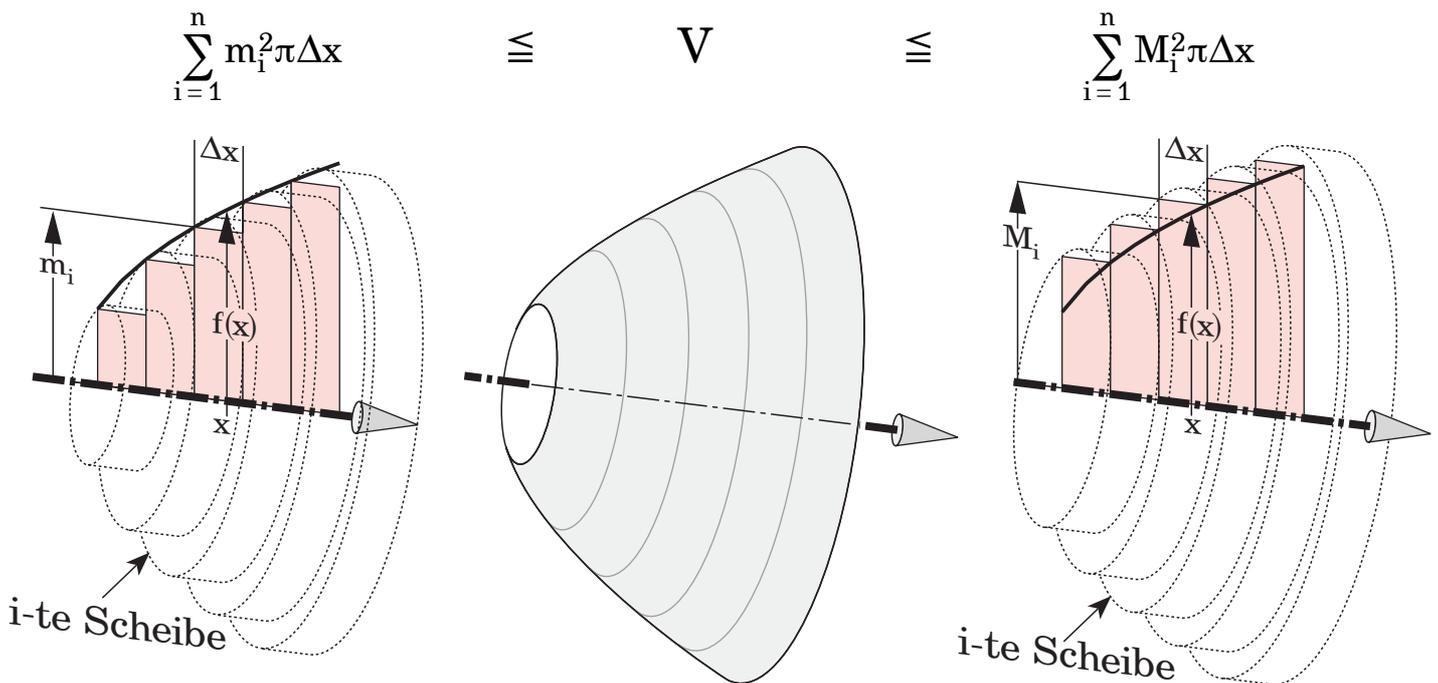


Man berechnet Volumina von Rotationskörpern mit Integralen. Die Überlegungen entsprechen denen der Streifenmethode zur Flächenberechnung: Haben wir dort Streifeninhalte addiert, so sind es jetzt Rauminhalte von Zylinderscheiben. Die x -Achse ist die Drehachse. Für eine Scheibe gilt:

$$\begin{aligned} \text{der Zylinderradius ist} & \quad r = f(x) \\ \text{die Zylinderhöhe ist} & \quad h = \Delta x \\ \text{das Zylindervolumen ist} & \quad V = r^2 \pi h = (f(x))^2 \pi \Delta x \end{aligned}$$



Nun rotiere ein Stück des Graphen von $y=f(x)$ um die x -Achse. Parallele Ebenen im Abstand Δx , senkrecht zur x -Achse, zerschneiden den Rotationskörper in Scheiben der Dicke Δx . Fürs Volumen V_i der i -ten Scheibe gilt: $m_i^2 \pi \Delta x \leq V_i \leq M_i^2 \pi \Delta x$. m_i (M_i) ist das Minimum (Maximum) im i -ten Teilintervall. Fürs Volumen V des Rotationskörpers gilt:



Wir fassen nun eine bestimmte Stelle x der Rotationsachse ins Auge und lassen die Scheibendicke Δx gegen 0 gehen. Dann werden die Radien m_i und M_i zu $f(x)$ und die beiden Summen zum Integral

$$V_x = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

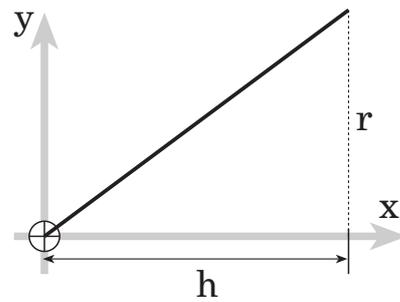
Der Index x bei V_x erinnert an die x -Achse als Rotationsachse.

Zur Kontrolle berechnen wir das Volumen eines Kegels mit Radius r und Höhe h :

$$f(x) = \frac{r}{h} x$$

$$V_x = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx = \pi \int_0^h \frac{r^2}{h^2} x^2 dx = \pi \frac{r^2}{h^2} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^h$$

$$V_x = \pi \frac{r^2}{h^2} \cdot \frac{1}{3} h^3 = \frac{1}{3} r^2 \pi h$$



Aber auch weniger vertraute Rotationskörper lassen sich so berechnen,

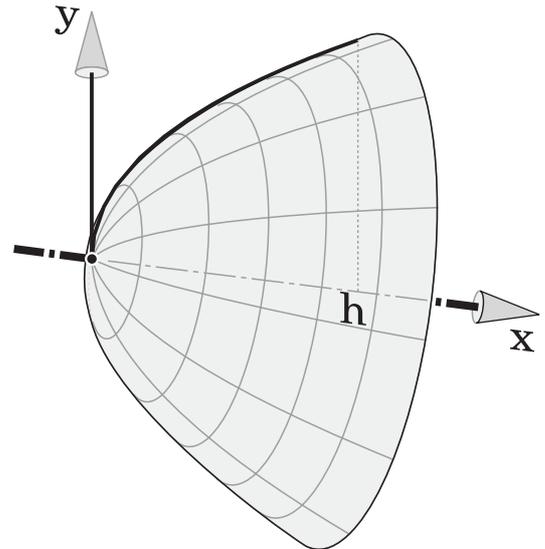
wie das Rotationsparaboloid:

Dieses entsteht zum Beispiel bei der Rotation der Wurzelkurve (halbe Parabel) um die x -Achse.

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$V_x = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx = \pi \int_0^h (\sqrt{x})^2 dx = \pi \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^h$$

$$V_x = \frac{1}{2} h^2 \pi$$



Rotiert die Wurzelkurve um die y -Achse, so entsteht ebenfalls ein Rotationskörper.

Sein Volumen V_y lässt sich mit der selben Formel berechnen: Man ersetzt den Term $f(x)$ durch den der Umkehrfunktion $f^{-1}(y)$ und dx durch dy :

$$V_y = \pi \int_a^b (f^{-1}(y))^2 dy$$

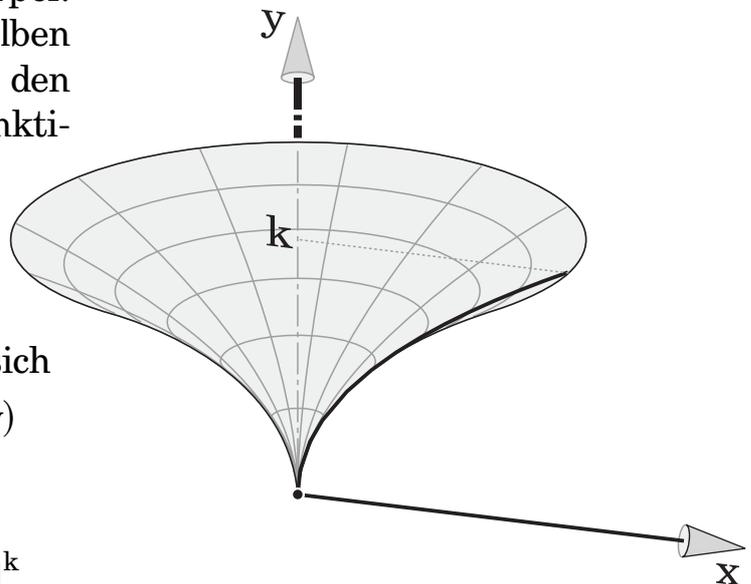
Im Fall der Parabel-Rotation ergibt sich

$$y = f(x) = \sqrt{x} \iff x = y^2 = f^{-1}(y)$$

$$D_f = D_{f^{-1}} = \mathbb{R}_0^+$$

$$V_y = \pi \int_a^b (f^{-1}(y))^2 dy = \pi \int_0^k y^4 dy = \pi \left[\frac{1}{5} y^5 \right]_0^k$$

$$V_y = \frac{1}{5} k^5 \pi$$



Aufgaben

- ◇1 $f(x) = 2x$, $D_f = [1; 3]$
 Was für ein Körper entsteht, welches Volumen hat er, wenn G_f rotiert um
- a) die x-Achse b) die y-Achse
 ☸c) die Winkelhalbierende des 1. Quadranten ?
- 2 $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$
 Bestimme die maximale Definitionsmenge und zeige:
 Jeder Punkt des Schaubilds ist vom Ursprung gleich weit entfernt.
 Berechne das Volumen einer Kugel mit Radius r .
- 3 Die Parabel mit $f(x) = x^2$, $D_f = [-2; 2]$ soll Umriss eines Sektglases sein, das drehsymmetrisch ist zur y-Achse.
- a) Welchen Rauminhalt hat das Sektglas?
 b) Wie hoch steht der Sekt, wenn das Glas halb voll ist?
 c) Bei welchem Sektvolumen ist das Glas bis zur halben Höhe gefüllt?
- 4 $f_a(x) = -\frac{1}{a^3}(x^2 - 2ax)$, $D_f = [0; 2a]$, $a > 0$
- a) Welchen Inhalt hat das Flächenstück, das G_f und die x-Achse einschließen?
 b) Berechne das Volumen des Körpers, der bei Rotation von G_f um die x-Achse entsteht.
 c) Bei welchem Wert von a hat der Körper das selbe Volumen wie eine Kugel mit Durchmesser $2a$?
- 5 $f(x) = x^2$ $D_f = [0; c]$
 Bei Rotation von G_f um die y-Achse entsteht ein konvexer Drehkörper, bei Rotation von G_f um die x-Achse entsteht ein konkaver Drehkörper.
 Bei welchem Wert von c haben beide Körper das selbe Volumen?
- ☸6 $f(x) = 3x - 4$, $D_f = [2; c]$, $c > 2$
 Bei Rotation der Strecke G_f um die x-Achse entsteht ein Kegelstumpf vom Rauminhalt V_x , bei ihrer Rotation um die y-Achse ein Kegelstumpf vom Rauminhalt V_y . Bei welchem Wert von c haben beide Körper das selbe Volumen?

3. Weg

Viele physikalische Größen sind definiert als Produkte mit 2 Faktoren. Produkte aus 2 Faktoren a und b lassen sich immer veranschaulichen als Flächeninhalte $a \cdot b$. Flächeninhalte berechnen wir mit Integralen.

Bei konstanter Geschwindigkeit v eines Körpers errechnet sich der in der Zeit $\Delta t = t - t_0$ zurückgelegte Weg $s(t)$ als Produkt: $s(t) = v \cdot (t - t_0)$.

Im t - v -Diagramm lässt sich $s(t)$ deuten als Inhalt eines Rechtecks mit den Seiten Δt und v .

Bei konstanter Beschleunigung a eines Körpers (Freier Fall) ändert sich dagegen die Geschwindigkeit $v(t)$ linear mit der Zeit: $v(t) = a \cdot t$.

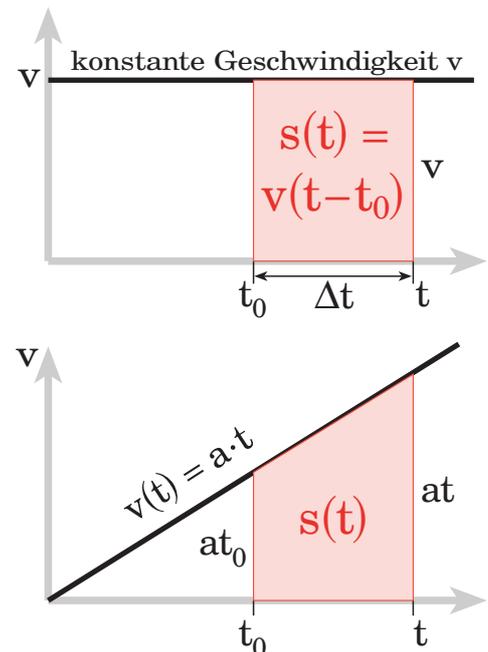
Im t - v -Diagramm lässt sich $s(t)$ jetzt deuten als Inhalt eines Dreiecks oder Trapezes.

Man berechnet $s(t)$ elementargeometrisch oder mit Integralen. Für den Fall, dass die Bewegung zu einem festen Zeitpunkt t_0 startet, ergibt sich für irgendeinen späteren Zeitpunkt t :

Elementargeometrie: $s(t) = \frac{1}{2}(at + at_0) \cdot (t - t_0) = \frac{1}{2}a(t^2 - t_0^2)$ (Trapezformel!)

$$\text{Integral: } s(t) = \int_{t_0}^t v(x) dx = \int_{t_0}^t a \cdot x dx = a \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_{t_0}^t = \frac{1}{2}a(t^2 - t_0^2)$$

Die Formel für den im Zeitintervall $[t_0; t]$ zurückgelegten Weg $s(t) = \int_{t_0}^t v(x) dx$ gilt auch dann, wenn die $v(t)$ -Kurve keine Gerade ist.



Aufgaben

1 Ein Punkt bewege sich so, dass seine Geschwindigkeit $v(t)$ in m/s immer gleich sei seinem Abszissenwert t in Sekunden. Er starte

a) zum Zeitpunkt $t_0 = 1$ [s]

b) zum Zeitpunkt $t_0 = 2$ [s]

Wo ist er 1 Sekunde, 2 oder 10 Sekunden nach dem Start?

2 Ein Körper bewege sich mit der Geschwindigkeit $v(t)$ in m/s. Seine Geschwindigkeit sei immer gleich dem Quadrat t^2 seiner Abszisse t . Welchen Weg hat er zurückgelegt:

a) nach der ersten Sekunde

b) nach den ersten 2 Sekunden

c) nach den ersten 10 Sekunden

d) während der 2. Sekunde?

4. Arbeit

Auch die Arbeit in der Mechanik lässt sich darstellen als Produkt mit 2 Faktoren, zum Beispiel mit den Faktoren Kraft und Weg (falls sie parallel sind). Die Flächenberechnung ist einfach, wenn die Kraft längs des Wegs konstant ist oder linear vom Ort abhängt. Im Fall konstanter Kraft berechnet man den Inhalt eines Rechtecks (Hubarbeit bei kleinen Höhen). Im Fall linear sich ändernder Kraft berechnet man den Inhalt eines Dreiecks oder Trapezes.

Schwieriger wird es, wenn die Kraft nicht linear vom Ort abhängt, Beispiel: Hubarbeit in große Höhen über der Erde.

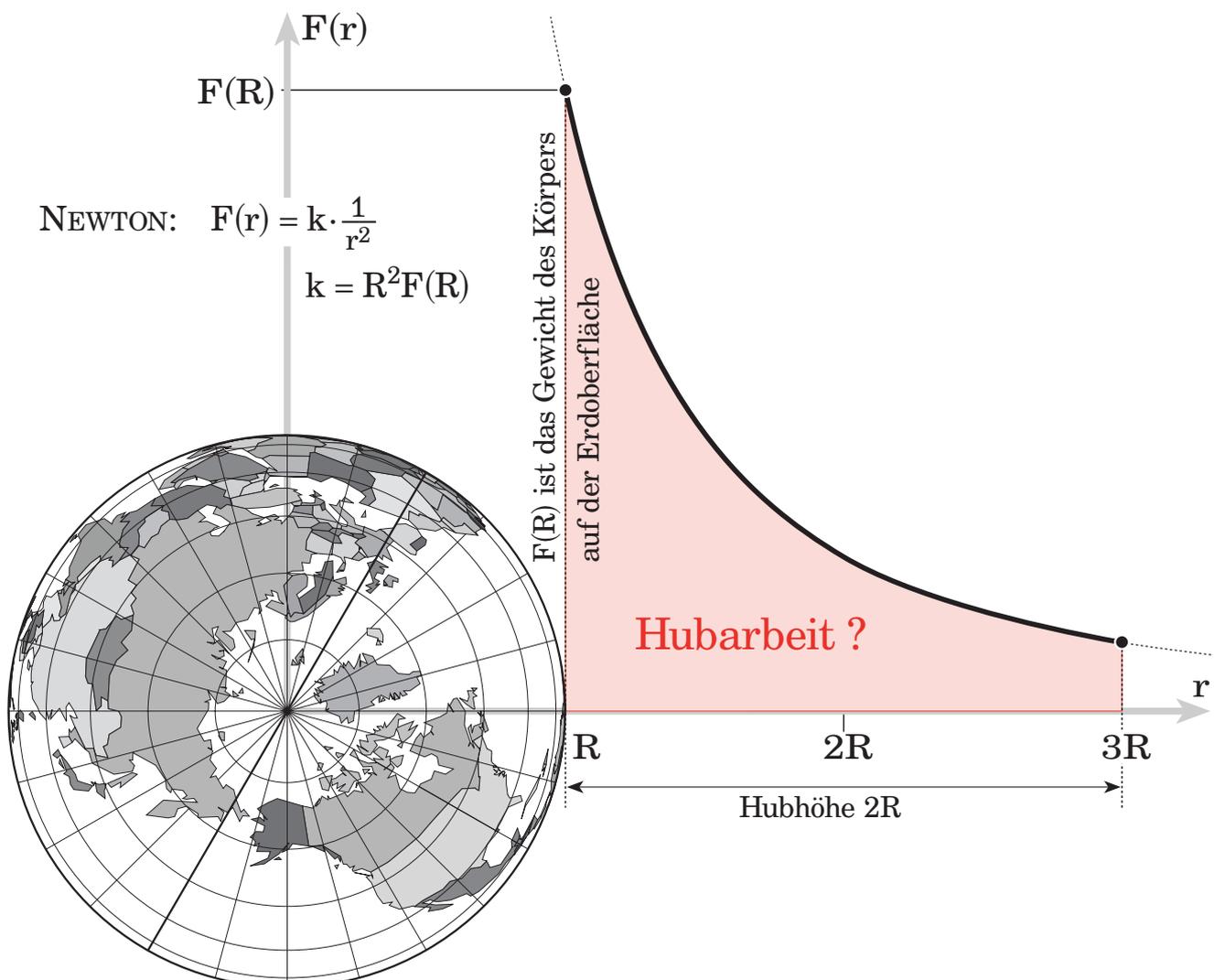
Nach NEWTONS Gravitationsgesetz hängt die Gewichtskraft F vom Ort r ab:

$$F(r) = k \cdot \frac{1}{r^2}$$

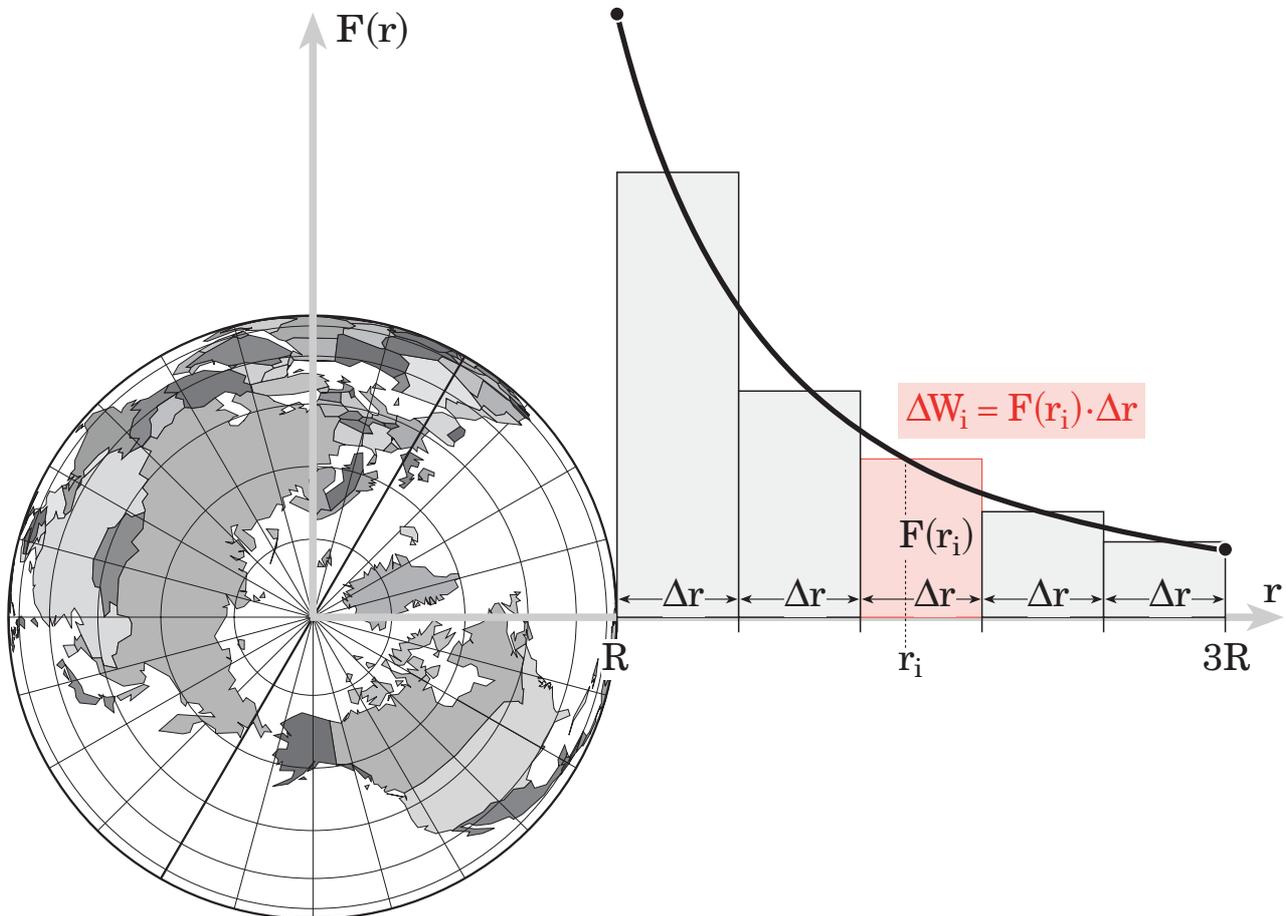
k ist eine Konstante, sie hat überall den selben Wert wie auf der Erdoberfläche, nämlich $k = R^2 \cdot F(R)$.

$F(R)$ ist die Gewichtskraft des Körpers auf der Erdoberfläche.

Das Bild zeigt, wie die Gewichtskraft vom Ort r abhängt.



Wir fragen nach der Arbeit, die nötig ist, um einen Körper vom Gewicht $F(R)$ in die Höhe $2R$ über der Erdoberfläche zu heben. Die bekannte Formel für die Hubarbeit $W=F \cdot s$ dürfen wir nicht anwenden, weil sie ja nur dann gilt, wenn F konstant ist. Wir unterteilen den Weg $[R;3R]$ in n Strecken Δr . Die Hubarbeit ΔW auf einer solchen Strecke Δr ist $\Delta W_i \approx F(r_i) \cdot \Delta r$, wobei r_i irgendeine Stelle auf dem i -ten Wegstück Δr ist.



Um den Körper 2 Erdradien hoch zu heben,

braucht man $W \approx \sum_{i=1}^n \Delta W_i = \sum_{i=1}^n F(r_i) \Delta r$.

$\sum_{i=1}^n F(r_i) \Delta r$ ist eine Zwischensumme für das Integral $\int_R^{3R} F(r) dr$.

Für $F(r) = k \cdot \frac{1}{r^2}$ ergibt sich:

$$W = \int_R^{3R} k \cdot \frac{1}{r^2} dr = \left[-\frac{k}{r} \right]_R^{3R} = -\frac{k}{3R} - \left(-\frac{k}{R} \right) = \frac{-k+3k}{3R} = \frac{2}{3} \cdot \frac{k}{R}$$

und mit $k=R^2 \cdot F(R)$ ist $W = \frac{2}{3} R \cdot F(R)$.

Um eine Tafel Schokolade (100g) 2Erdradien = $2 \cdot 6370 \text{ km} = 12740 \text{ km}$ zu heben, ist also nötig $W = \frac{2}{3} \cdot 6,37 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot 1 \text{ N} = 4,25 \cdot 10^6 \text{ J}$.

Bleibe die Gewichtskraft konstant, so könnte man mit dem selben Aufwand W die Tafel nur 4250km heben.

Aufgaben

- ◊1 Welche Arbeit ist nötig, um 1 Liter Wasser [$F(R) = 10\text{N}$] in die Höhe $r=n \cdot R$ zu heben? Was ergibt sich für $n \in \{2; 10; 100\}$ und $n \rightarrow \infty$?

Welche Geschwindigkeit v_F müsste ein Körper der Masse m demnach auf der Erdoberfläche haben, um die Erde für immer zu verlassen?

(Fluchtgeschwindigkeit v_F , Bewegungsenergie $\frac{1}{2}mv_F^2$)

2 Spannarbeit bei Federn

Die Federhärte D ist definiert als $D = \frac{F(s)}{s}$, s ist die Federdehnung. Nach dem Gesetz von HOOKE ist D innerhalb gewisser Grenzen von s konstant. Skizziere in einem s - F -Diagramm den Kraftverlauf und berechne die Arbeit, um eine entspannte Feder der Härte D um eine Strecke s zu dehnen.

•3 Adiabatische Kompression

Bei schnellem Verdichten eines Gases erwärmt sich das Gas (Diesel-Motor, Fahrradschlauch aufpumpen). Das Gasvolumen V hängt ab vom Druck p nach dem Gesetz $p \cdot V^k = C_k$; C_k ist eine Konstante, $k_{\text{Luft}} = 1,4$.

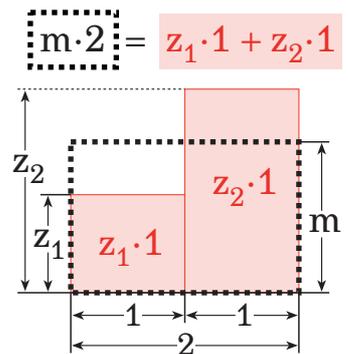
- a) Skizziere in einem x - y -Diagramm die Kurve $y = \frac{1}{x^{1,4}}$ und berechne den Inhalt der Fläche zwischen Kurve und x -Achse von $x=1$ bis $x=0,5$.
- b) Welche Arbeit braucht man, um 1 Liter Luft bei Normaldruck von 1 bar adiabatisch auf die Hälfte zu komprimieren? Beachte:
Arbeit = Druck mal Volumenänderung. Deute das Ergebnis von a):
 x sei das Volumen in Liter, y sei der Druck in bar ($=10\text{N/cm}^2$). Welche physikalische Bedeutung hat der Flächeninhalt im Diagramm?

5. Mittelwert

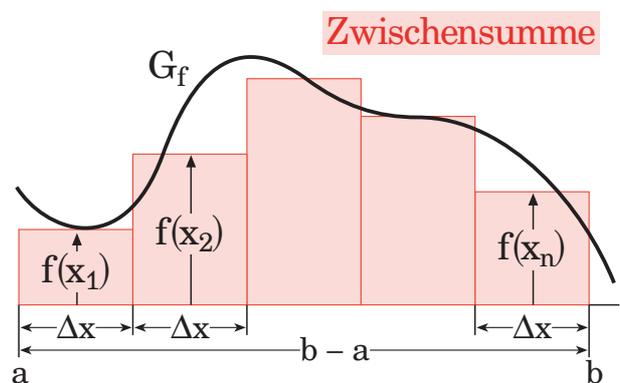
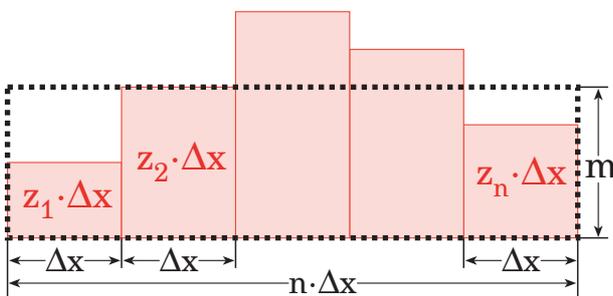
Das arithmetische Mittel m zweier Zahlen z_1 und z_2 ist definiert als $m = \frac{1}{2}(z_1+z_2)$. Das lässt sich mit Flächen veranschaulichen, wenn man umformt: $2 \cdot m = 1 \cdot z_1 + 1 \cdot z_2$.

Bei n Zahlen gilt: $m = \frac{1}{n}(z_1+z_2+ \dots + z_n)$ oder $m \cdot n = z_1+z_2+ \dots + z_n$. Auch das lässt sich mit Flächen veranschaulichen. Gibt man den Rechtecken allgemein die Breite Δx , so gilt:

$$m \cdot n \cdot \Delta x = z_1 \cdot \Delta x + z_2 \cdot \Delta x + \dots + z_n \cdot \Delta x \text{ oder } m = \frac{1}{n \cdot \Delta x} (z_1 \cdot \Delta x + z_2 \cdot \Delta x + \dots + z_n \cdot \Delta x)$$



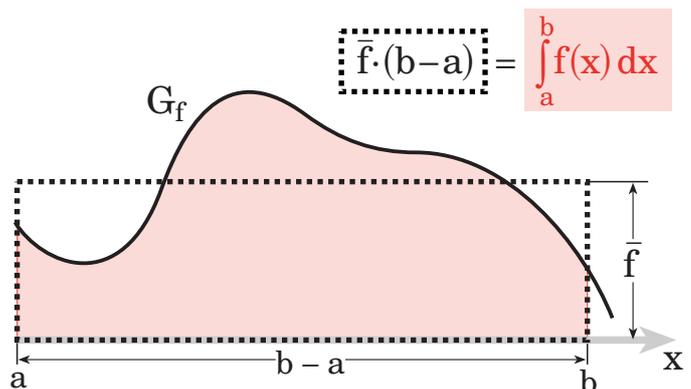
$$m \cdot n \cdot \Delta x = z_1 \cdot \Delta x + z_2 \cdot \Delta x + \dots + z_n \cdot \Delta x$$



Deutet man die Zahlen z_i als Funktionswerte $f(x_i)$, so ergibt sich für m die Zwischensumme eines Integrals; m ist dann der Mittelwert der Funktionswerte $f(x_i)$. Ist das Integrationsintervall $n\Delta x = b - a$ konstant, so ist dieser Mittelwert für $\Delta x \rightarrow 0$ der mittlere Funktionswert »aller Funktionswerte« über diesem Intervall $[a; b]$. So ist es möglich, sogar für unendlich viele Werte einen Mittelwert zu berechnen.

Definition: $\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$
 \bar{f} heißt **Mittelwert** der Funktion f über dem Intervall $[a; b]$.

Anschauliche Deutung:
 \bar{f} ist die Höhe eines Rechtecks der Breite $b - a$, das den selben Inhalt hat wie das Flächenstück zwischen x -Achse und Funktionsgraph G_f .

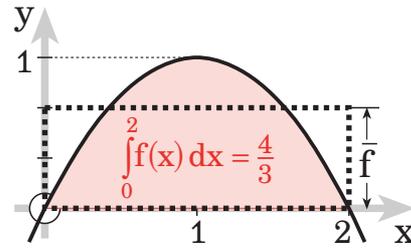


Beispiel: $f(x) = x(2-x)$

Mittelwert \bar{f} von f über $[0;2]$

$$\bar{f} = \frac{1}{2-0} \int_0^2 (2x-x^2) dx = \frac{1}{2} [x^2 - \frac{1}{3}x^3]_0^2$$

$$\bar{f} = \frac{1}{2} \cdot 4 \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$



Die Temperatur T an einem Ort ändert sich mit der Zeit t . Ein »Thermograph« (Temperatur-Schreiber), registriert die zugehörige Kurve, das »Thermogramm«.

Das Bild zeigt ein idealisiertes Thermogramm als Parabelbogen.

Die mittlere Temperatur \bar{T} dieses Tages ist der Mittelwert der Temperatur-Funktion über dem Intervall $[0;24]$:

$$\bar{T} = \frac{1}{24-0} \int_0^{24} \left(-\frac{1}{10}t^2 + 2t + 10\right) dt = \frac{1}{24} \left[-\frac{1}{30}t^3 + t^2 + 10t\right]_0^{24} = 14,8 \text{ (}^\circ\text{C)}.$$

In der Praxis kennt man den Funktionsterm nicht. Beim Auswerten des Thermogramms begnügt man sich oft mit einzelnen Messwerten – mathematisch kommt das gleich der Berechnung einer Zwischensumme.

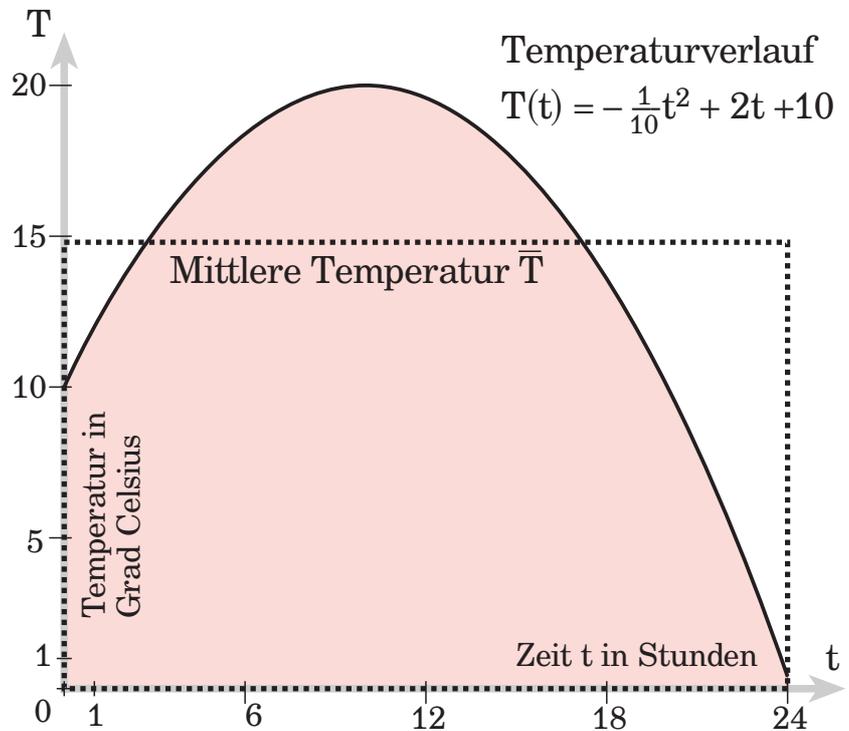
Eine praktizierte, bewährte Möglichkeit:

Man mittelt die Temperatur um 7, 14 und 21 Uhr, wobei man den letzten Wert doppelt zählt, was einem doppelt so breiten Rechteck entspricht:

$$\bar{T} = \frac{1}{4} (T(7) + T(14) + 2T(21)) = 13,3 \text{ (}^\circ\text{C)}.$$

Ähnlich verfährt man mit Größen wie:

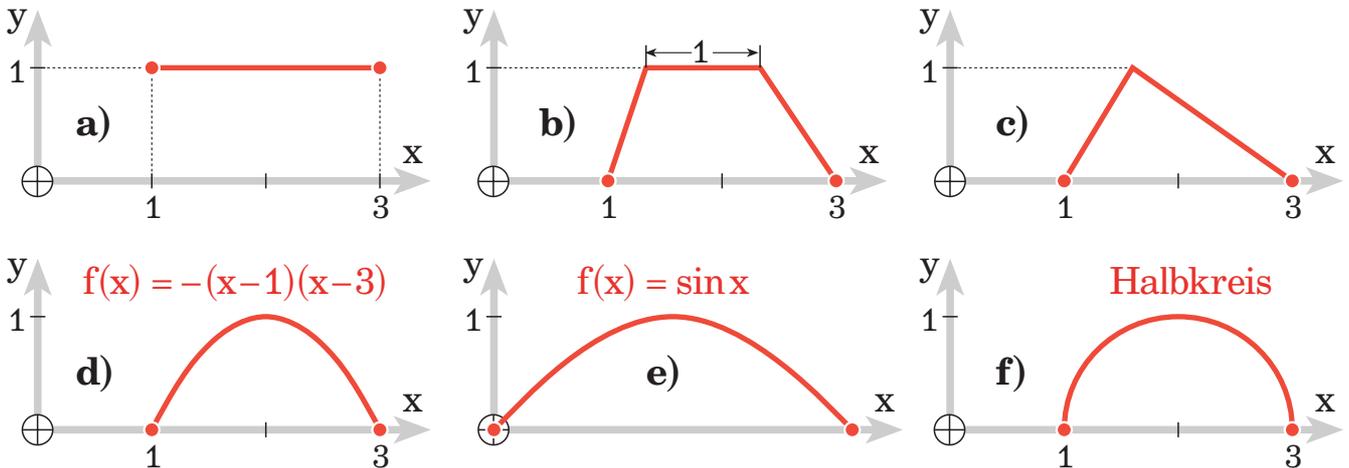
- mittlere Sonnenscheindauer,
- mittlerer Luftdruck,
- mittlere Niederschlagsmenge,
- mittlerer Pegelstand.



Aufgaben

1 Wie groß ist bei einem Temperaturverlauf mit $T(t) = -\frac{1}{10}(t^2 - 20t - 100)$ die mittlere Temperatur in der 1. Tageshälfte, in der 2. Tageshälfte, zwischen 6 und 18 Uhr?

2 Funktionen sind durch ihre Graphen gegeben. Bestimme elementargeometrisch oder durch Integration den mittleren Funktionswert.



3 $f(x) = \frac{1}{8}x(x-6)^2$. Berechne die Mittelwerte von f über den Intervallen

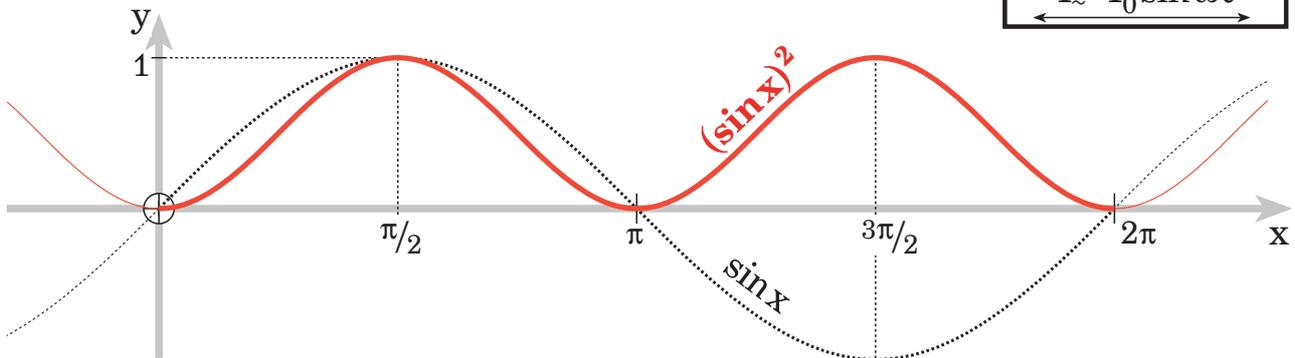
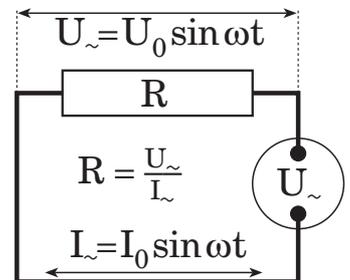
a) $[0;2]$

b) $[2;6]$

c) $[0;6]$

•4 **Effektivwerte beim Einphasen-Wechselstrom**

In einem Widerstand R sind Wechselspannung U_{\sim} und Wechselstrom I_{\sim} in Phase. Mit $x=\omega t$ schreiben wir einfacher $U=U_0 \sin x$ und $I=I_0 \sin x$. Für die Leistung P im Widerstand R gilt $P = U \cdot I = U_0 \cdot I_0 \cdot (\sin x)^2$.



a) Zeige: $\bar{P} = a \cdot U_0 \cdot I_0$. Berechne a . Wegen der Periodizität muss man für den Mittelwert \bar{P} bloß von 0 bis π integrieren.

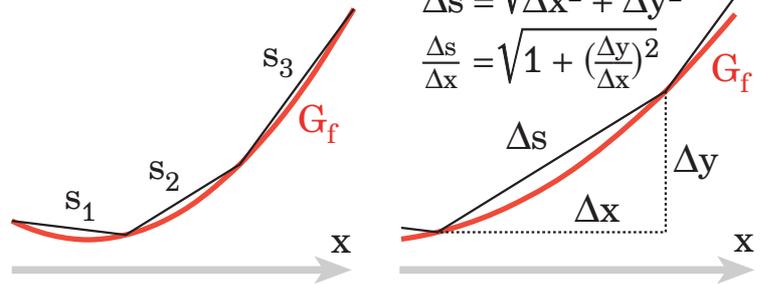
Tipp: $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$ und $\int_0^\pi (\sin x)^2 dx = \int_0^\pi (\cos x)^2 dx$

b) Definition der Effektivwerte U_{eff} und I_{eff} : $\bar{P} = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}}$ und $R = \frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}}$. Was ergibt sich damit für U_{eff} und I_{eff} ?

Zum Nachdenken

① Bogenlänge

Neben Flächen- und Volumenberechnung eignet sich das Integral auch, um Bogenlängen zu berechnen. Dazu nähert man den Bogen durch einen Sehnenzug an.



Für $\Delta x \rightarrow 0$ ergibt sich $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$
 $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

Der Differentialquotient $\frac{ds}{dx}$ ist die Ableitung der Bogenlänge nach x .

Nach dem Hauptsatz gilt dann für die Bogenlänge s zwischen a und b : $s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$

Beispiel: $f(x) = x\sqrt{x}$

Wie lang ist der Bogen von G_f zwischen $(0|0)$ und $(1|1)$?

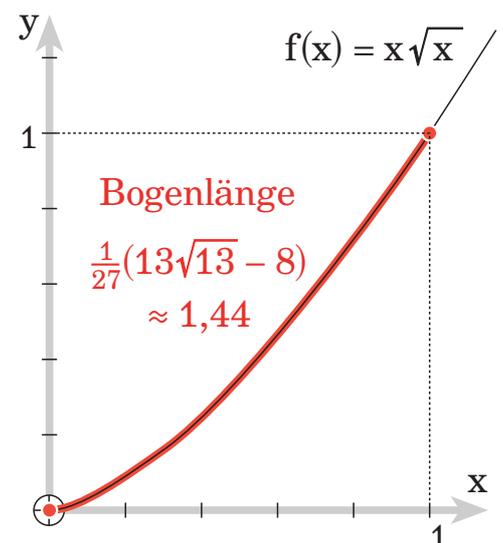
$$f'(x) = (x^{3/2})' = \frac{3}{2}x^{1/2}, \quad (f'(x))^2 = \frac{9}{4}x$$

$$s(x) = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx$$

Durch gezieltes Raten findet man den Term einer Stammfunktion von $s(x)$: $\left(\frac{2}{3}\sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\right)^3$

$$\int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \frac{8}{27} \left[\left(\sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\right)^3 \right]_0^1$$

$$= \frac{8}{27} \left(\sqrt{\frac{13}{4}}^3 - 1 \right) = \frac{8}{27} \left(\frac{13}{8} \sqrt{13} - 1 \right) = \frac{1}{27} (13\sqrt{13} - 8) \approx 1,44$$



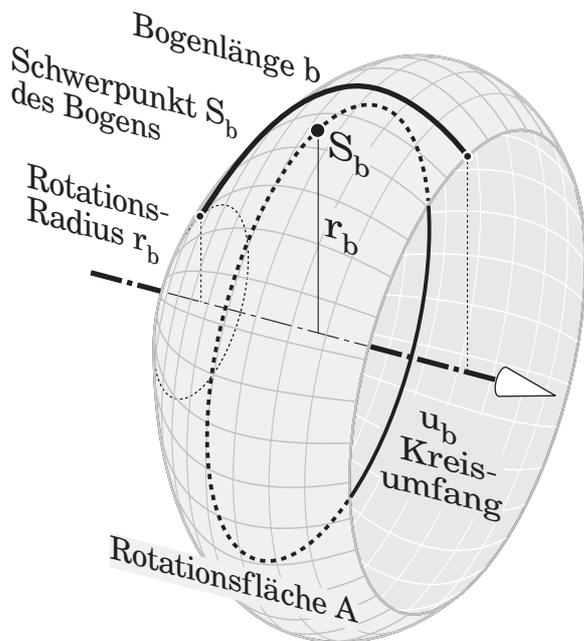
Im Allgemeinen macht allerdings das Integral $\int \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$ große Schwierigkeiten.

② Guldin-Regeln

Rotiert ein Bogen um eine Achse, so entsteht eine Rotationsfläche.

Rotiert ein Flächenstück um eine Achse, so entsteht ein Rotationskörper.

Der schweizerische Mathematiker Paul GULDIN (1577 bis 1643) hat 2 verblüffende Zusammenhänge gefunden zwischen den rotierenden Bögen bzw. Flächenstücken und den entstehenden Rotationsflächen bzw. Rotationskörpern. Er veröffentlichte sie im 2. Band seines 4-bändigen Hauptwerks »Centrobaryca« (=Schwerpunkte), an dem er von 1635 bis 1641 arbeitete.



1. Guldin-Regel

Ein ebener Kurvenbogen b rotiere um eine Achse, die in seiner Ebene liege (und ihn nicht zerlege).

Der Inhalt A der dabei entstehenden Rotationsfläche ist dann gleich dem Produkt von Bogenlänge b und Umfang $u_b = 2r_b \pi$ der Kreisbahn, auf der der Schwerpunkt S_b läuft:

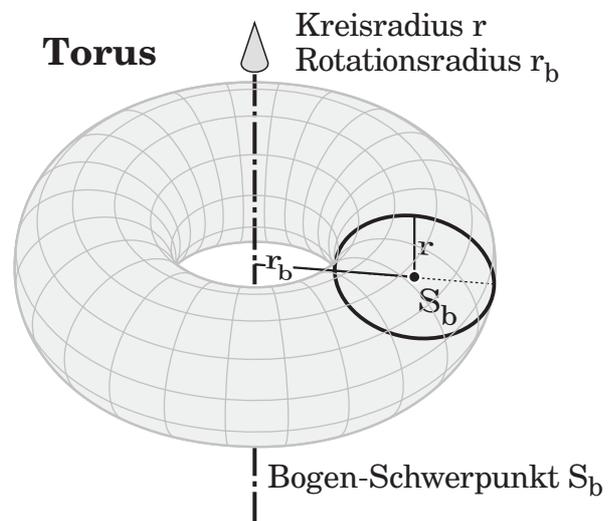
$$A = u_b \cdot b = 2r_b \pi \cdot b$$

Sind Schwerpunkt und Länge eines Bogens bekannt, so lässt sich der Inhalt der Rotationsfläche berechnen.

Beispiel: Torus (Ring)

Der Torus entsteht, wenn ein Kreis um eine Passante seiner Ebene rotiert. Aus Symmetriegründen ist der Schwerpunkt des Kreises der Kreismittelpunkt. Mit r_b als Rotationsradius gilt für die Oberfläche A des Torus

$$\text{Guldin: } A = 2r_b \pi \cdot 2r \pi = 4r_b r \pi^2$$



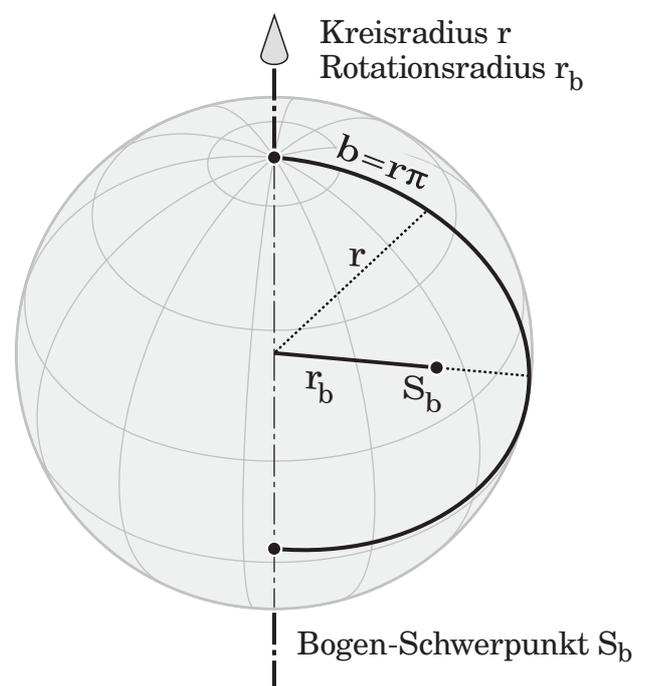
Sind Bogenlänge und Inhalt der Rotationsfläche bekannt, so lässt sich der Rotationsradius des Bogenschwerpunkts berechnen.

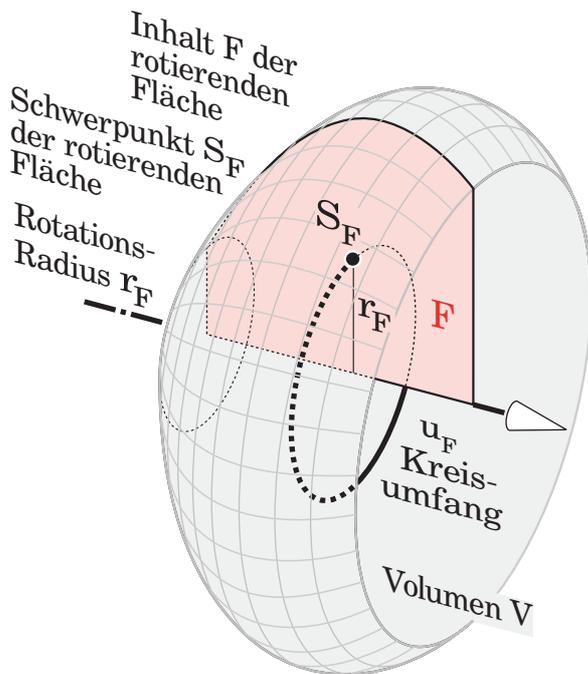
Beispiel: Schwerpunkt eines Halbkreises

$$\text{Bogenlänge: } b = r \pi$$

$$\text{Oberfläche der Kugel: } A = 4r^2 \pi$$

$$\text{Guldin: } 4r^2 \pi = 2r_b \pi \cdot r \pi \Rightarrow r_b = \frac{2r}{\pi}$$





2. Guldin-Regel

Ein ebenes Flächenstück F rotiere um eine Achse, die in seiner Ebene liege (und es nicht zerlege).

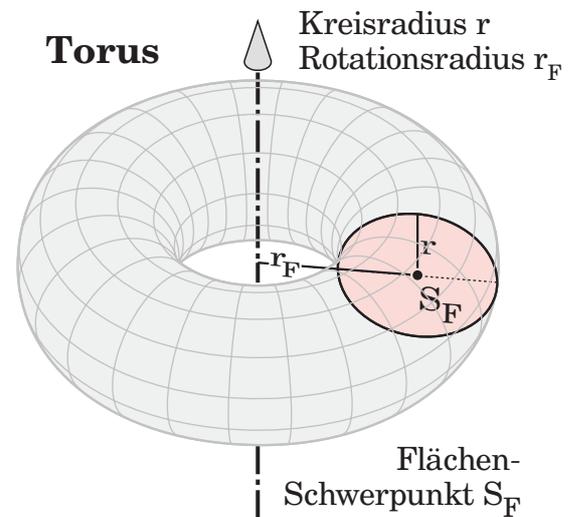
Der Inhalt V des dabei entstehenden Rotationskörpers ist dann gleich dem Produkt von Inhalt F der rotierenden Fläche und Umfang $u_F = 2r_F\pi$ der Kreisbahn, auf der der Schwerpunkt S_F läuft:

$$V = u_F \cdot F = 2r_F\pi \cdot F$$

Sind Schwerpunkt und Inhalt der rotierenden Fläche bekannt, so lässt sich der Inhalt des Rotationskörpers berechnen.

Beispiel: Torus

$$\text{Guldin: } V = 2r_F\pi \cdot r^2\pi = 2r_Fr^2\pi^2$$



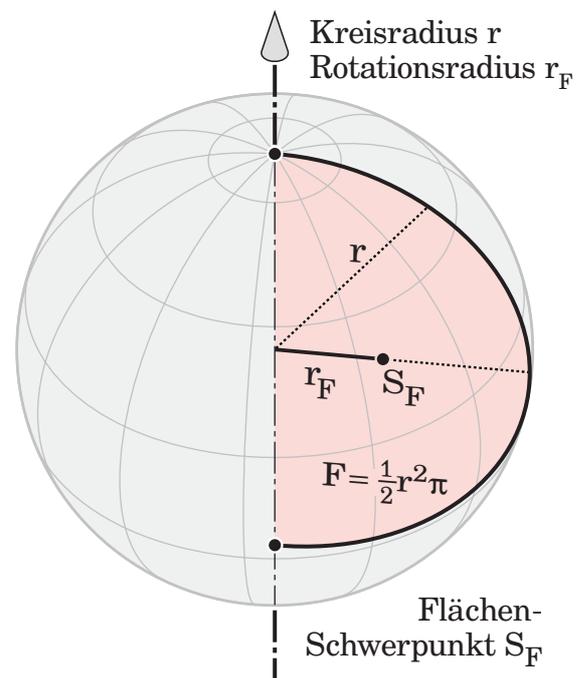
Sind Inhalt der rotierenden Fläche und Volumen des Rotationskörpers bekannt, so lässt sich der Rotationsradius des Schwerpunkts der rotierenden Fläche berechnen.

Beispiel: Schwerpunkt einer Halbkreisfläche

$$\text{Kugelvolumen } V = \frac{4}{3}r^3\pi$$

$$\text{Guldin: } \frac{4}{3}r^3\pi = 2r_F\pi \cdot \frac{1}{2}r^2\pi = r_Fr^2\pi^2$$

$$\Rightarrow r_F = \frac{4}{3\pi}r$$



Begründung der 1. Guldin-Regel

Das Integrationsintervall $[u; v]$ sei von x_0 bis x_n in n gleiche Teile zerlegt.

Der Bogen sei durch einen Sehnenzug angenähert.

Bei der Rotation entstehen dann Kegelstümpfe mit den Mantellinien Δs_i .

Näherungsweise gilt für die Rotationsfläche A

$$\text{des Rotationskörpers: } A \approx \sum_{i=0}^{n-1} \Delta s_i \cdot 2 \cdot f(x_i) \pi$$

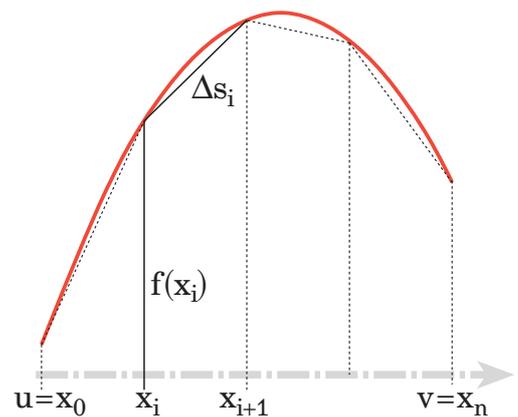
Im Grenzfall $n \rightarrow \infty$ ist $A = 2\pi \int_u^v f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$,
siehe Nachdenken ①.

Die Ordinate r_b des Bogen-Schwerpunkts S_b ist das gewichtete Mittel der Ordinaten der Teilpunkte auf dem Bogen. Als Gewicht dient der Anteil $\Delta s_i/b$, den die i -te Sehne Δs_i am

ganzen Bogen b hat. $r_b \approx \frac{1}{b} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \cdot \Delta s_i$. Im Grenzfall $n \rightarrow \infty$ ist $r_b = \frac{1}{b} \int_u^v f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$.

Beim Einsetzen des Integrals $\int_u^v f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = b \cdot r_b$ ergibt sich die
1. Guldin-Regel $A = 2r_b \pi \cdot b$.

(Mit der gleichen Überlegung findet man übrigens auch die Abszisse x_b des Bogen-Schwerpunkts S_b : $x_b \approx \frac{1}{b} \sum_{i=0}^{n-1} x_i \cdot \Delta s_i$. Im Grenzfall $n \rightarrow \infty$ ist $x_b = \frac{1}{b} \int_u^v x \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$.)



Begründung der 2. Guldin-Regel

Das Integrationsintervall $[u; v]$ sei von x_0 bis x_n in n gleiche Teile zerlegt.

Die Fläche sei durch Rechteck-Streifen angenähert.

Bei der Rotation entstehen dann Zylinder mit der Höhe Δx_i .

Volumen des Rotationskörpers: $V_x = \pi \int_u^v (f(x))^2 dx$.

Ordinate des Schwerpunkts S_i im i -ten Rechteck:

$$y_i = 0,5 \cdot f(x_i).$$

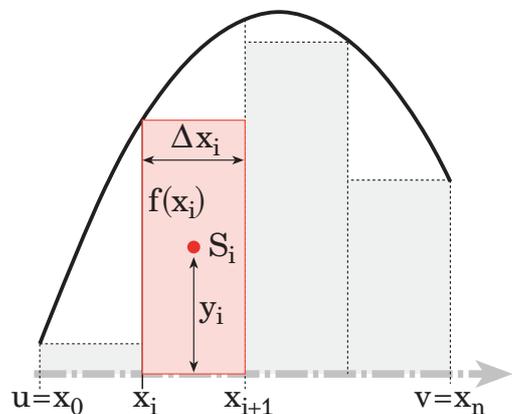
Die Ordinate r_F des Flächen-Schwerpunkts S_F ist

das gewichtete Mittel der Ordinaten y_i . Als Gewicht dient der Anteil $f(x_i)\Delta x_i/F$, den die i -te Rechteckfläche $f(x_i)\Delta x_i$ am gesamten Flächeninhalt F hat.

$$r_F \approx \frac{1}{F} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2} f(x_i) \cdot f(x_i) \Delta x_i. \text{ Im Grenzfall } n \rightarrow \infty \text{ ist } r_F = \frac{1}{2F} \int_u^v (f(x))^2 dx.$$

Beim Einsetzen des Integrals $\int_u^v (f(x))^2 dx = 2F \cdot r_F$ ergibt sich die
2. Guldin-Regel $V_x = 2r_F \pi \cdot F$.

(Mit der gleichen Überlegung findet man übrigens auch den x -Wert des Flächen-Schwerpunkts S_F : $x_F \approx \frac{1}{F} \sum_{i=0}^{n-1} x_i \cdot f(x_i) \Delta x_i$. Im Grenzfall $n \rightarrow \infty$ ist $x_F = \frac{1}{F} \int_u^v x \cdot f(x) dx$.)



③ Angenäherte Berechnung von $\int_a^b f$

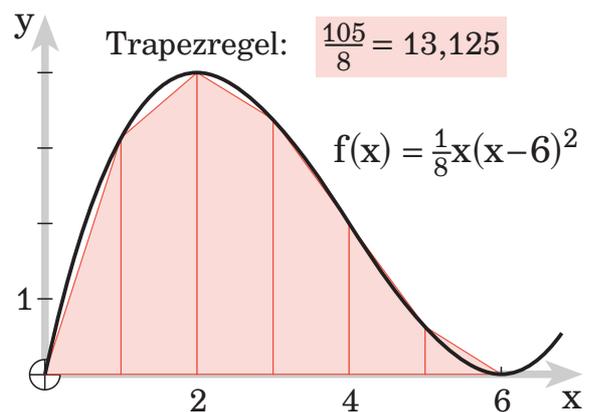
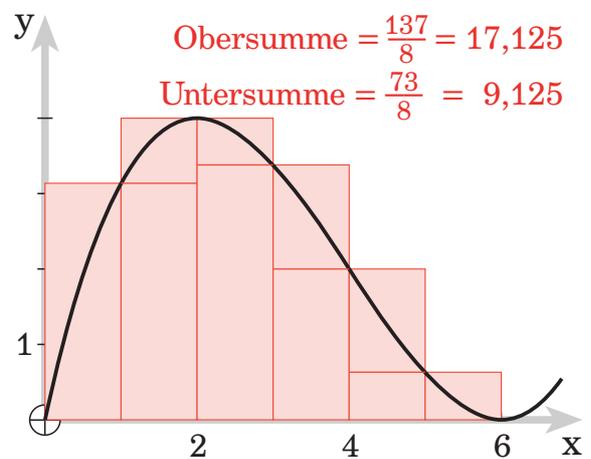
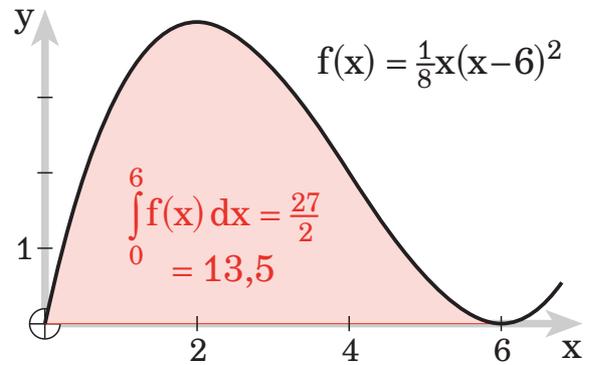
Findet man keine Stammfunktion, so kann man Flächeninhalte nicht mit dem Hauptsatz berechnen. Man zerschneidet dann das Flächenstück in Streifen und denkt sich den Flächeninhalt als Summe der Streifeninhalte (Prinzip von der Zerlegungsinvarianz des Flächeninhalts). Die verschiedenen Näherungsverfahren unterscheiden sich in der Form, mit der man diese Streifen näherungsweise berechnet. Um die Güte der Näherung beurteilen zu können, wählen wir ein Beispiel mit bekannter Stammfunktion.

- Ein grobes Verfahren ist die Streifenmethode: Hier sind die Streifen ersetzt durch Rechtecke. (Ober-, Unter-, Zwischensumme).

- Genauer arbeitet die »Trapezregel«: Sie ersetzt die Kurve durch einen Sehnenzug. In der Zeichnung sieht man, dass der so berechnete Wert das arithmetische Mittel von Ober- und Untersumme ist.

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2} + \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} + \dots + \frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2} \right)$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2n} (f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n))$$



- Noch genauer ist die »**Simpson-Regel**« (Thomas SIMPSON, englischer Mathematiker 1710 bis 1761). Sie ersetzt die Kurve durch eine Folge von Parabelbögen; jeder geht durch 3 benachbarte Kurvenpunkte. Der zugehörige Inhalt errechnet sich nach dem Satz in Aufgabe 25 auf Seite 62:

$$1. \text{ Streifen: } A_1 = \frac{b-a}{6n} (f(x_0) + 4f(x_{0,5}) + f(x_1))$$

$$2. \text{ Streifen: } A_2 = \frac{b-a}{6n} (f(x_1) + 4f(x_{1,5}) + f(x_2))$$

... = ...

n. Streifen:

$$A_n = \frac{b-a}{6n} (f(x_{n-1}) + 4f(x_{n-0,5}) + f(x_n))$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6n} (f(x_0) + 4f(x_{0,5}) + 2f(x_1) + 4f(x_{1,5}) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + 4f(x_{n-0,5}) + f(x_n))$$

Die Simpson-Regel arbeitet exakt bei Polynomen bis zum Grad 3.

Ihre Näherungstauglichkeit sei deswegen an einer andern Funktion überprüft:

$$\int_0^{\pi} \sin x \, dx = 2$$

Der Sinuskurve begrenzt mit der x-Achse zwischen 0 und π eine Fläche vom Inhalt 2.

$$\text{Simpson-Regel mit 1 Streifen: } \int_0^{\pi} \sin x \, dx \approx \frac{2}{3}\pi = 2,094\dots$$

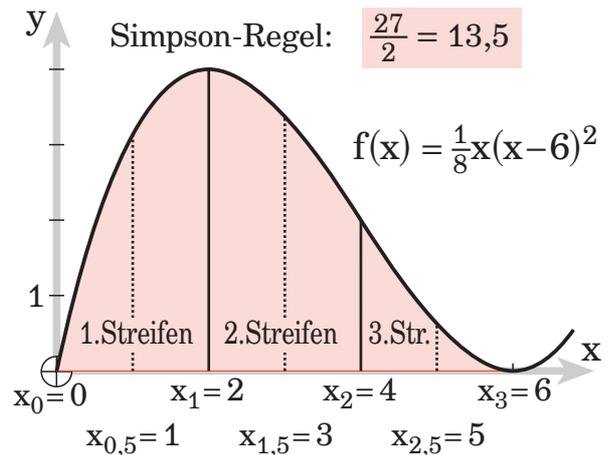
$$\text{Simpson-Regel mit 2 Streifen: } \int_0^{\pi} \sin x \, dx \approx \frac{1}{6}\pi(1+2\sqrt{2}) = 2,0045\dots$$

$$\text{Simpson-Regel mit 3 Streifen: } \int_0^{\pi} \sin x \, dx \approx \frac{1}{9}\pi(4+\sqrt{3}) = 2,00086\dots$$

Johannes KEPLER (deutscher Mathematiker und Astronom 1571 bis 1630) hat 1615 einen einfacheren Vorläufer der Simpson-Regel angegeben. Er fand eine Formel zur Berechnung von Querschnittflächen; die Formel brauchte er, um das Volumen von Weinfässern zu bestimmen. Sie ist nichts anderes als die Simpson-Regel mit 1 Streifen:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} (f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b))$$

Heute ist sie bekannt unter dem Namen »Fassregel« von KEPLER.



Computer-Einsatz: Simpson-Regel

Vorgaben: $f(x)$ sei Term einer in $[a;b]$ definierten Funktion, StreifenZahl

Ziel: Angenäherte Berechnung von $\int_a^b f(x) dx$ nach Simpson

Zur Mathematica-Programmierung:

Die 6 fetten Zeilen enthalten die Anweisungen zur Berechnung (die 5. enthält die Formel), die letzten 4 Zeilen geben die Ergebnisse bekannt.

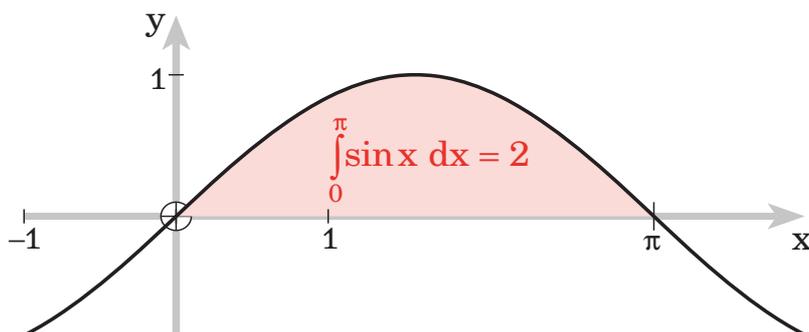
```
Simpson[f_Symbol, {Xvon_,Xbis_}, StreifenZahl_Integer?Positive, rechneExakt_]:=Module[
  {dx, dx6, Xstütz, Xmitte,Ywerte, Summe},
L
  dx=(Xbis-Xvon)/StreifenZahl;    dx6=dx/6;
  If[rechneExakt==False, dx=N[dx]; dx6=N[dx6]];
  Xstütz=Table[Xvon+dx*k,          {k,0,StreifenZahl}];
  Xmitte=Table[Xvon+dx*k+dx/2,    {k,0,StreifenZahl}];
  Ywerte=Table[f[Xstütz[[k]]]+4*f[Xmitte[[k]]]+f[Xstütz[[k+1]]], {k,1,StreifenZahl}];
  Summe=Sum[Ywerte[[n]]*dx6, {n,1,StreifenZahl}];
  Print["f(x) = ", f[x], "\t IntegrationsIntervall = [",Xvon,";",Xbis,""]\t",
  StreifenZahl," Streifen          \tStreifen Breite = ", dx];
  If[rechneExakt, Print["SIMPSON: StreifenSumme = ",Summe," ≈ ",N[Summe] ],
  Print["SIMPSON: StreifenSumme ≈ ",Summe]]
]
```

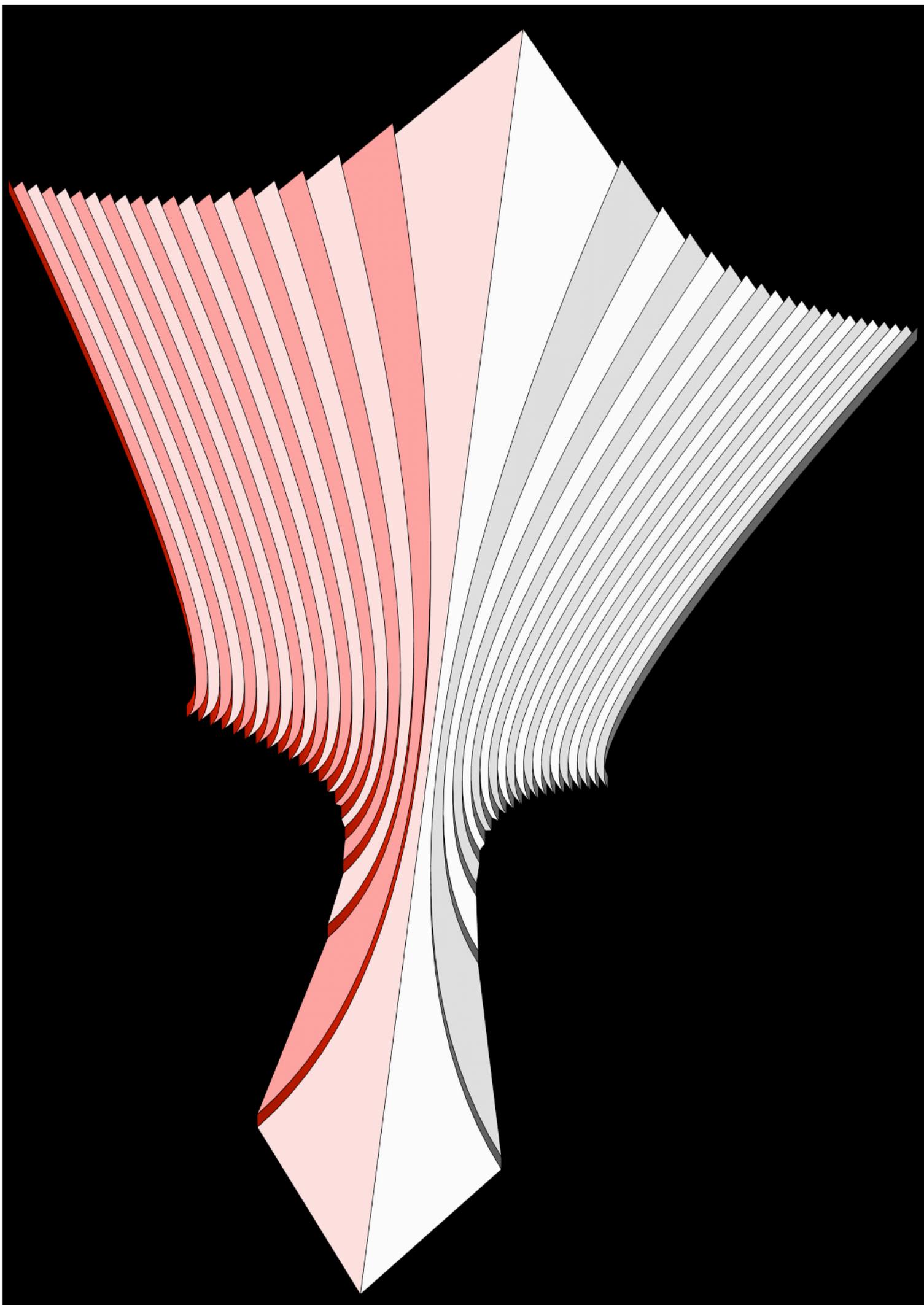
Beispiel: $f(x) = \sin[x]$; Intervall = $\{0,\pi\}$; StreifenZahl = 2; rechneExakt = True;

Simpson[f, Intervall, StreifenZahl, rechneExakt]; (* Aufruf von »Simpson«*)

Die Ergebnisse für 6 StreifenZahl-Werte zusammengefasst:

| Streifen-Zahl | Simpson-Wert exakt | Simpson-Wert dezimal |
|---------------|--|----------------------|
| 1 | $\frac{2\pi}{3}$ | 2,0944 |
| 2 | $\frac{\pi}{6}(1+2\sqrt{2})$ | 2,00456 |
| 3 | $\frac{\pi}{9}(4+\sqrt{3})$ | 2,00086 |
| 4 | $\frac{\pi}{12}(1+\sqrt{2}+2\sqrt{2(2+\sqrt{2})})$ | 2,00027 |
| 5 | $\frac{\pi}{15}(2+2\sqrt{5}+\sqrt{5+2\sqrt{5}})$ | 2,00011 |
| 6 | $\frac{\pi}{18}(2+2\sqrt{2}+\sqrt{3}+2\sqrt{6})$ | 2,00005 |





V. Umkehrfunktion und ihre Ableitung

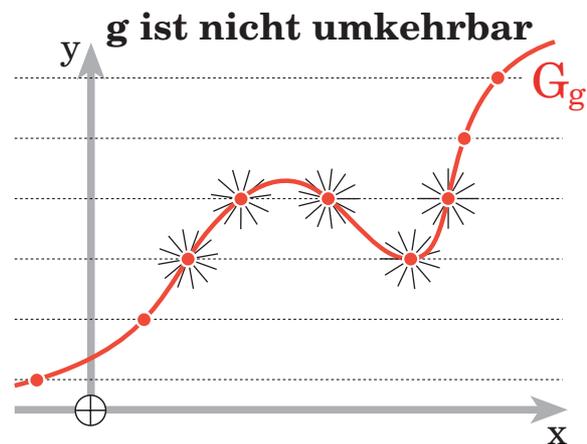
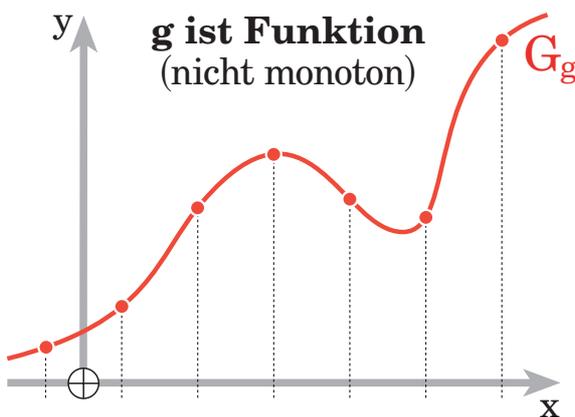
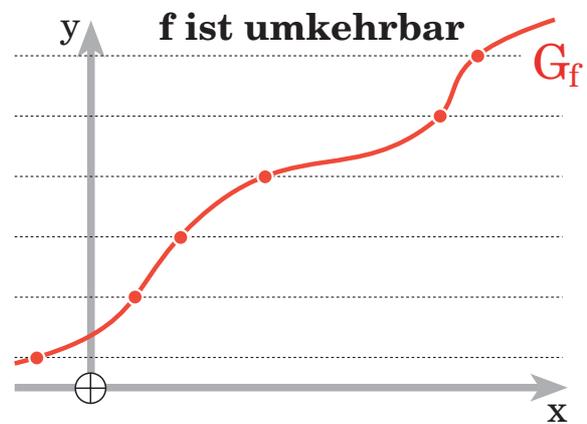
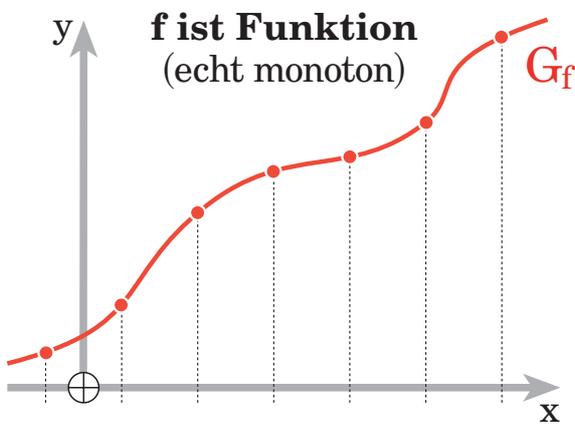
1. Zur Erinnerung

Definition: Eine Funktion f heißt **umkehrbar** oder **eindeutig**, wenn verschiedene Urbilder x immer verschiedene Bilder y haben: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Anschaulich bedeutet das nichts anderes, als dass jede Parallele zur x -Achse den Graphen höchstens einmal schneidet. Das ist vor allem der Fall bei echt monotonen Funktionen, denn für sie gilt:

echt monoton steigend $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

echt monoton fallend $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$



Übersicht Ist eine Funktion f umkehrbar,
so bezeichnet man die Umkehrfunktion von f mit f^{-1} .

Funktion $y = f(x)$ mit D_f und W_f

Umkehrfunktion $x = f^{-1}(y)$ mit $D_{f^{-1}} = W_f$ und $W_{f^{-1}} = D_f$
oder nach Vertauschung der Variablen x und y

Umkehrfunktion $y = f^{-1}(x)$ mit $D_{f^{-1}} = W_f$ und $W_{f^{-1}} = D_f$.

Für die Verkettung von f und f^{-1} gelten die Identitäten:

$$f^{-1}(f(x)) = x, x \in D_f \quad \text{und} \quad f(f^{-1}(x)) = x, x \in D_{f^{-1}}.$$

Auf den ersten Blick stößt diese abstrakte Schreibweise ab. Doch dahinter verbirgt sich ein einfacher, wichtiger Zusammenhang: Funktion f und Umkehrfunktion f^{-1} heben sich auf in ihrer Wirkung auf ein Argument x , zum Beispiel:

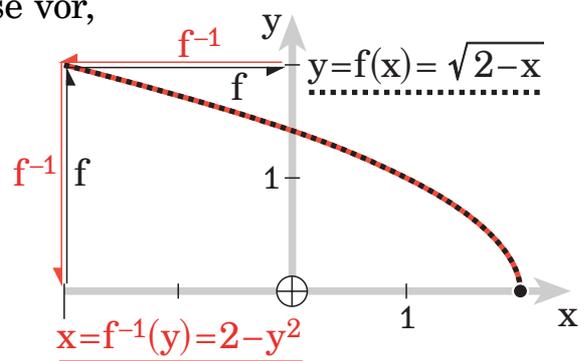
Die Wurzel aus dem Quadrat einer Zahl (≥ 0) ist die Zahl selber,
das Quadrat einer Wurzel aus einer Zahl (≥ 0) ist die Zahl selber,
der Kehrwert vom Kehrwert einer Zahl ($\neq 0$) ist die Zahl selber.

Bestimmung der Umkehrfunktion f^{-1}

Man findet den Term der Umkehrfunktion, indem man die Funktionsgleichung $y = f(x)$ nach x auflöst. Bei umkehrbaren Funktionen ist die Auflösung eindeutig, sonst nicht. In der Praxis geht man schrittweise vor,

Beispiel:

$$f(x) = \sqrt{2-x}, \quad D_f =]-\infty; 2], \quad W_f = \mathbb{R}_0^+$$



- **Ist f umkehrbar?**

Die Untersuchung auf Monotonie ergibt:
 f fällt echt monoton, f ist also umkehrbar.

- **Funktionsgleichung mit y anschreiben**

$$y = \sqrt{2-x} \quad \text{und nach } x \text{ auflösen} \quad x = 2 - y^2$$

- **Umkehrfunktion mit y als unabhängiger Variable**

$$f^{-1}(y) = 2 - y^2, \quad D_{f^{-1}} = W_f = \mathbb{R}_0^+, \quad W_{f^{-1}} = D_f =]-\infty; 2]$$

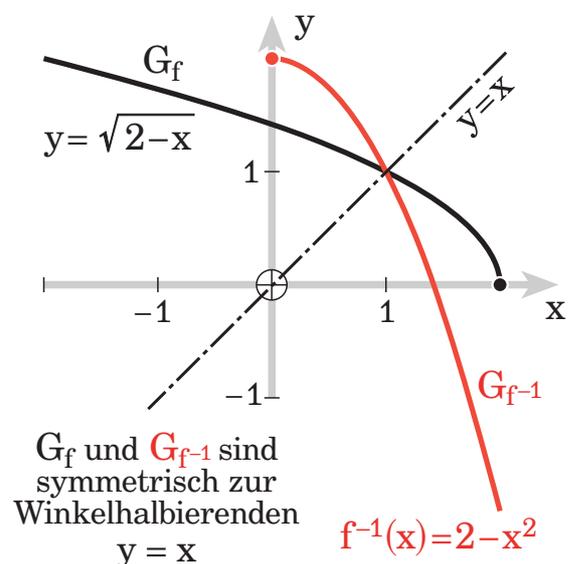
- **Umkehrfunktion mit x als unabhängiger Variable, Vertauschen von x und y**

$$f^{-1}(x) = 2 - x^2, \quad D_{f^{-1}} = W_f = \mathbb{R}_0^+, \quad W_{f^{-1}} = D_f =]-\infty; 2]$$

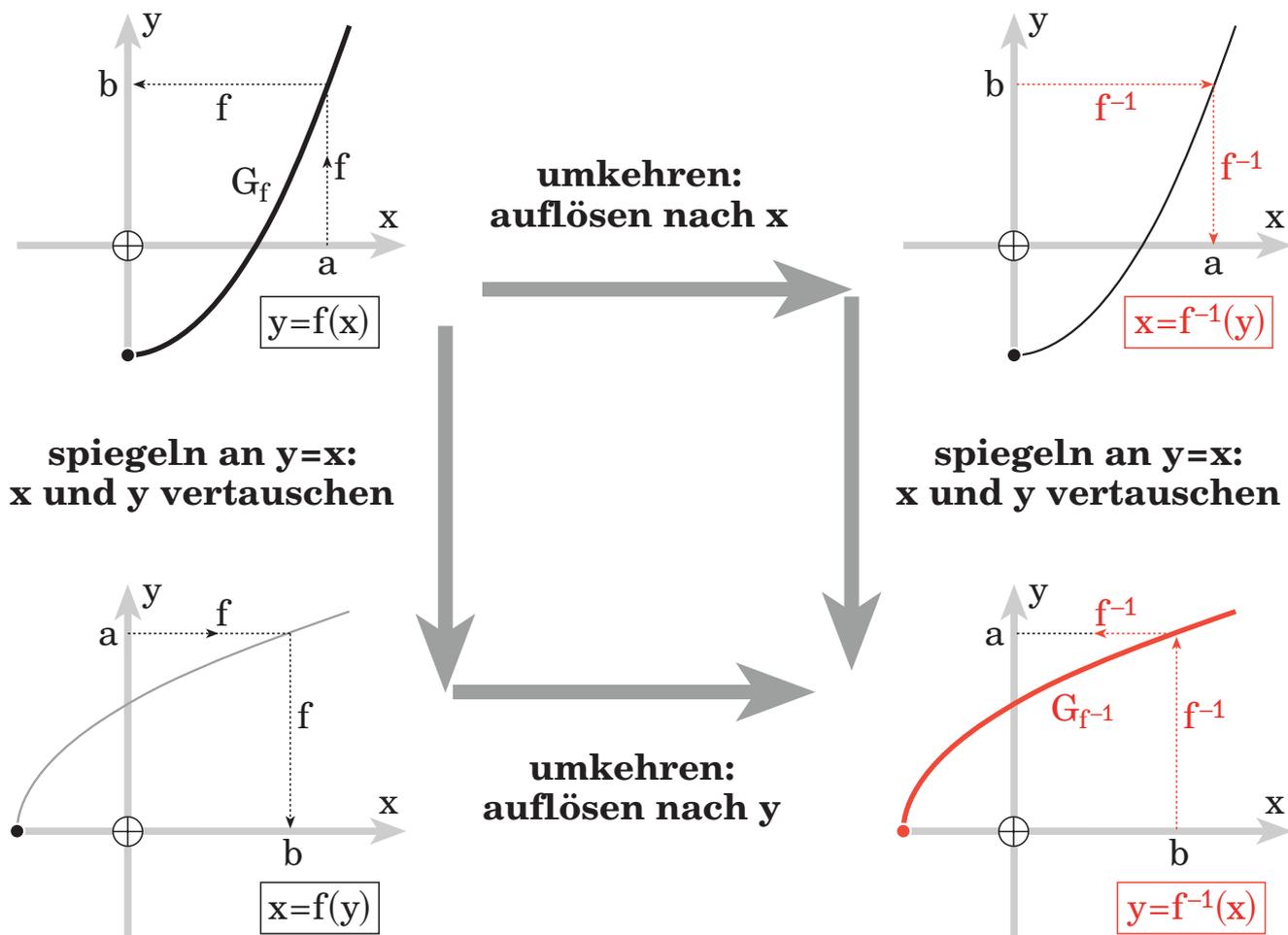
bedeutet im Koordinatensystem:

G_f spiegeln an der Winkelhalbierenden des 1. Quadranten

Der letzte Schritt hat mit dem Problem, eine Funktion umzukehren, nichts zu tun. Man vertauscht x und y nur deshalb, weil man sich so gewöhnt hat an x als unabhängige Variable, die man nach rechts abträgt. Wie man Variablen bezeichnet, ist ja egal: man kann sie x , t , v oder \ddot{u} nennen. Die Umkehrfunktion von oben hätte man genauso gut auch schreiben können als $f^{-1}(\ddot{u}) = 2 - \ddot{u}^2$, $D_{f^{-1}} = W_f = \mathbb{R}_0^+$.



Das folgende Bild veranschaulicht die beiden Wege zur Umkehrfunktion:
 – zuerst auflösen nach x , dann Koordinatentausch (wie im Beispiel oben)
 – zuerst Koordinatentausch, dann auflösen nach y .



Vereinbarung Mit $G_{f^{-1}}$ bezeichnen wir den Graphen, der entsteht, wenn man G_f an der Winkelhalbierenden $y=x$ spiegelt.

Aufgaben

1 Umkehrbarkeit

Die Bedingung (1) : $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$

für die Umkehrbarkeit einer Funktion f ist gleichwertig mit

der Bedingung (2) : $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$.

Untersuche mit (2), ob folgende Funktionen umkehrbar sind.

a) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$, $D_f = \mathbb{R}$

b) $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3$, $D_g = \mathbb{R}$

c) $h(x) = \frac{x}{x+1}$, $D_h = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

d) $i(x) = x + \frac{1}{x}$, $D_i = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

◇2 Bestimme f^{-1} und $D_{f^{-1}}$.

a) $f(x) = -2x + 5$, $D_f = \mathbb{R}$

b) $f(x) = \sqrt{x-2}$, $D_{f_{\max}}$

c) $f(x) = x^2 - 2x$, $D_f = [1; \infty[$

d) $f(x) = x^2 - 2x$, $D_f =]-\infty; 1]$

e) $f(x) = \frac{2x}{2+x}$, $D_{f_{\max}}, W_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

•f) $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{für } x \in [0; 1] \\ x^2 & \text{für } x \in]1; \infty[\end{cases}$

◇3 Bestimme möglichst große Teilmengen von $D_{f_{\max}}$ so, dass die Einschränkung von f dort umkehrbar ist. Gib jeweils die Umkehrfunktionen an.

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = -x^2 + 4x$

•c) $f(x) = x - 2\sqrt{x}$

◇4 Funktion und Umkehrfunktion

Bestimme $D_{f_{\max}}$, W_f und f^{-1} und bestätige $f^{-1}(f(x)) = x$ und $f(f^{-1}(x)) = x$. Für welche x -Werte gelten diese Gleichungen jeweils?

a) $f(x) = \sqrt{x-1}$

b) $f(x) = 1 - \sqrt{x-2}$

c) $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $W_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

5 $f(x) = \sqrt{1-x}$

Berechne und vergleiche: $f^{-1}(f^{-1}(x))$, $(f^{-1})^{-1}(x)$, $(f^{-1}(x))^{-1}$ und $(f(x)^{-1})^{-1}$.

6 Begründe: Steigt f echt monoton, dann steigt auch f^{-1} echt monoton.

7 Beschreibe $G_{f^{-1}}$, wenn man weiß:

a) G_f steigt echt monoton auf $[a; b]$ und liegt über der x -Achse.

b) G_f fällt echt monoton auf $[a; b]$ und liegt unter der x -Achse.

c) G_f fällt echt monoton auf $[a; b]$ im 2. Quadranten.

•8 Ungleichung und Umkehrfunktion

Wendet man auf beide Seiten einer Gleichung (Ungleichung) eine Funktion an, so entsteht eine neue Gleichung (Ungleichung).

Welche Eigenschaft muss eine Funktion haben, damit gilt:

a) $f(x) = a \Rightarrow x = f^{-1}(a)$

b) $f(x) < a \Rightarrow x < f^{-1}(a)$

c) $f(x) < a \Rightarrow x > f^{-1}(a)$

9 Bei einer Funktion sei $f=f^{-1}$. Woran erkennt man das am Graphen?

•10 Berechne die Schnittpunkte von G_f und $G_{f^{-1}}$.

a) $f(x) = 2 - \sqrt{x}$

b) $f(x) = x^2 - 2x + 2$, $D_f = [1; \infty[$

c) $f(x) = \sqrt{-1-x}$

d) $f(x) = 1 - x$

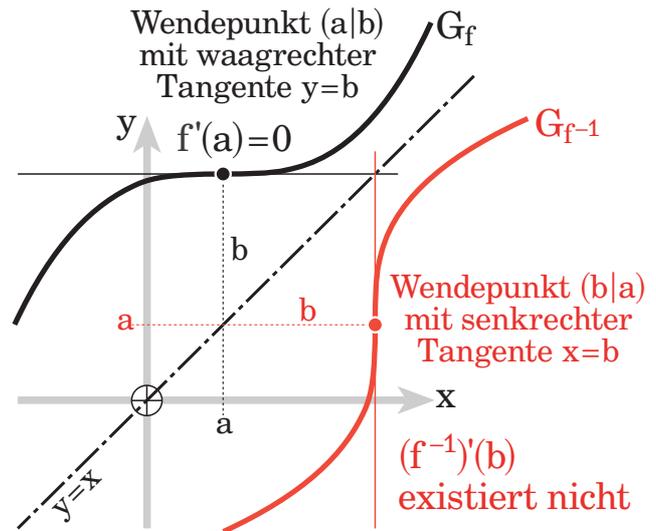
e) $f(x) = x^3 + x - 1$

2. Ableitung der Umkehrfunktion

Dem Bild rechts entnehmen wir:

Ist eine Funktion f umkehrbar und differenzierbar, dann ist es auch ihre Umkehrfunktion f^{-1} ; ausgenommen sind Punkte, in denen Tangenten von $G_{f^{-1}}$ parallel sind zur y -Achse. Solche Tangenten entstehen beim Spiegeln waagrechter Tangenten von G_f an der Achse $y=x$. Kurz:

Waagrechte Tangente in $(a|b) \in G_f \iff$
senkrechte Tangente in $(b|a) \in G_{f^{-1}}$.



Man berechnet den Term $(f^{-1})'(x)$ der abgeleiteten Umkehrfunktion aus der Identität $x=f(f^{-1}(x))$ mit der Kettenregel.

Zweckmäßigerweise nimmt man $f^{-1}(x)$ als Term der inneren Funktion.

Wir definieren eine Funktion φ mit $D_\varphi=D_{f^{-1}}$: $\varphi(x) = f(f^{-1}(x))$ [🍏]

Wegen der Identität $f(f^{-1}(x)) = x$, $x \in D_{f^{-1}}$ gilt: $\varphi(x) = x$ [♥]

Ableitung von [🍏]: $\varphi'(x) = f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x)$

Ableitung von [♥]: $\varphi'(x) = 1$

Damit gilt: $f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1$
 $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$, $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$

$f'(f^{-1}(x)) = 0$ bedeutet: G_f hat an der Stelle $f^{-1}(x)$ eine waagrechte Tangente,
und $G_{f^{-1}}$ hat an der Stelle x eine senkrechte Tangente.

Satz **Ist f in D_f umkehrbar und differenzierbar und hat G_f keine waagrechte Tangente, dann gilt: $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$**

Beispiel: Ableitung der Wurzelfunktion

Die Wurzelfunktion ist die Umkehrfunktion von f mit

$f(x) = x^2$, $D_f = \mathbb{R}^+$, $W_f = \mathbb{R}^+$. Weil die Quadratfunktion differenzierbar ist, ist es auch die Wurzelfunktion.

$$f'(x) = 2x, \quad D_{f'} = \mathbb{R}^+$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x}, \quad D_{f^{-1}} = W_f = \mathbb{R}^+$$

$$f'(f^{-1}(x)) = 2 \cdot f^{-1}(x) = 2\sqrt{x}$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad D_{(f^{-1})'} = \mathbb{R}^+$$

Hätten wir $D_f = \mathbb{R}_0^+$ gewählt, dann wäre f zwar auch umkehrbar, G_f aber hätte eine waagrechte Tangente in $(0|0)$ und damit $G_{f^{-1}}$ eine senkrechte Tangente in $(0|0)$. $(f^{-1})'(0)$ ist also nicht definiert.

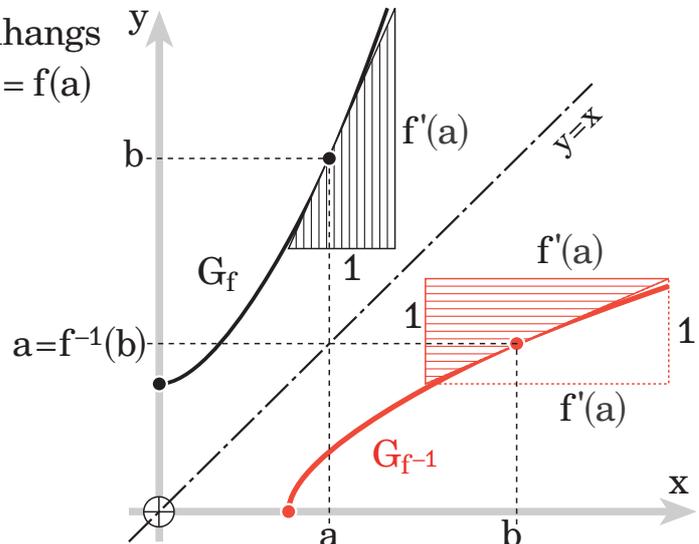
Oben haben wir die Wurzelfunktion abgeleitet mit $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.

Einfacher ist es, wenn man direkt die Beziehung $f(f^{-1}(x)) = x$, $x \in D_{f^{-1}}$ ausnutzt – hier: $(\sqrt{x})^2 = x$, $x \in \mathbb{R}^+$

$$\text{Kettenregel: } 2(\sqrt{x})(\sqrt{x})' = 1 \Rightarrow (\sqrt{x})' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

Veranschaulichung des Zusammenhangs zwischen $f'(a)$ und $(f^{-1})'(b)$, falls $b = f(a)$

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$



Aufgaben

◊1 Berechne $(f^{-1})'(x)$:

a) $f(x) = 3x+2$

b) $f(x) = \frac{1}{x}$

c) $f(x) = 1 + \sqrt{-x}$

◊2 Berechne $f^{-1}(x)$ und dann auf 2 Arten $(f^{-1})'(a)$:

a) $f(x) = \frac{1}{2}x - 3$, $a = 4$

b) $f(x) = \sqrt{x}$, $a \in \{1; 10; 0\}$

c) $f(x) = (x-1)^2 - 1$, $D_f = [1; \infty[$, $a \in \{2; \frac{5}{4}\}$

d) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $W_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $a \in \{-1; 0\}$

•3 Berechne $(f^{-1})'(x)$, ohne $f^{-1}(x)$ abzuleiten:

a) $f(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$

b) $f(x) = 2(x+1)^2$, $D_f = \mathbb{R}_0^+$

c) $f(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2-x}$

•4 Berechne $(f^{-1})'(a)$:

a) $f(x) = 3x^2 - x^3$, $x \geq 3$, $a = -16$

b) $f(x) = \sqrt{x} - x^2$, $x \geq 1$, $a = -14$

c) $f(x) = \sin x$, $D_f = [0; \frac{\pi}{2}]$, $a = \frac{1}{2}$

•5 $y = 2x - 1$ ist die Gleichung einer Tangente t im Punkt $P(3|p)$ von G_f .
Wie heißt die Gleichung der entsprechenden Tangente t^* von $G_{f^{-1}}$?
Gib den Berührungspunkt an.

3. Integration mit der Umkehrfunktion

Es kann vorkommen, dass der Inhalt A einer Fläche gefragt ist, die vom Graphen einer Funktion f begrenzt ist, von der man keine Stammfunktion kennt. Diesen Flächeninhalt kann man aber trotzdem berechnen, wenn eine Stammfunktion der Umkehrfunktion f^{-1} bekannt ist.

Beispiel: $f(x) = \sqrt{2x-6}$, $D_f = [3; \infty[$

$$A = \int_3^5 f(x) dx$$

Eine Stammfunktion von f ist nicht bekannt, dafür aber

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3$$

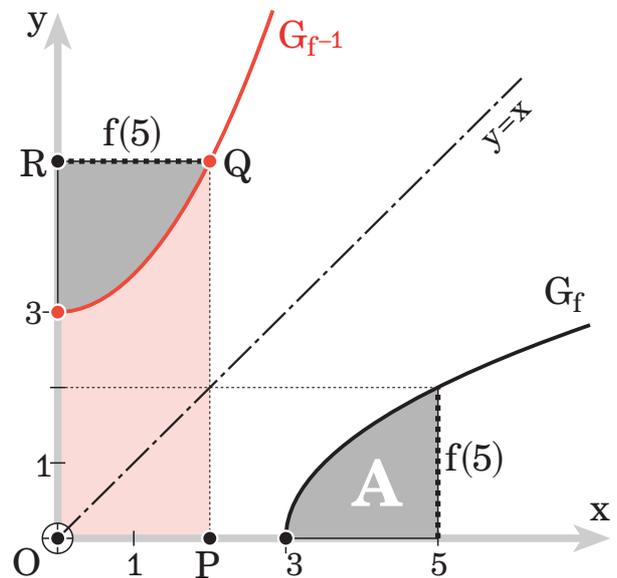
Der Zeichnung entnimmt man:

Inhalt des Rechtecks $OPQR$

$$A_{OPQR} = 5 \cdot f(5) = 5 \cdot 2 = 10$$

$$A = \int_3^5 f(x) dx = A_{OPQR} - \int_0^{f(5)} f^{-1}(x) dx$$

$$A = 10 - \int_0^2 \left(\frac{1}{2}x^2 + 3\right) dx = 10 - \left[\frac{1}{6}x^3 + 3x\right]_0^2 = 10 - \left(\left(\frac{8}{6} + 6\right) - 0\right) = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$



Aufgaben

Berechne die Integrale mit der Stammfunktion der Umkehrfunktion:

◇1 a) $\int_0^2 \sqrt{x} dx$

b) $\int_1^2 \sqrt{x} dx$

2 a) $\int_1^2 \sqrt{x-1} dx$

b) $\int_2^3 \sqrt{x-2} dx$

•3 a) $\int_{-1}^1 \sqrt{x+2} dx$

b) $\int_2^3 \sqrt{x+2} dx$

Zum Nachdenken

Differenzieren und Integrieren von Gleichungen und Ungleichungen

Um die Ableitung der Umkehrfunktion zu finden, haben wir die Gleichung $f(f^{-1}(x))=x$ auf beiden Seiten differenziert. Dieses Verfahren kann aber auch schief gehen, wenn man nicht aufpasst. Differenziert man nämlich eine Gleichung wie $2x=10$, so ergibt sich $2=0$. Welche Gleichungen darf man also gefahrlos ableiten?

Die Gleichung $2x=10$ ist eine Bestimmungsgleichung, sie gilt nur für den **einen** Wert $x=5$. Dagegen gilt eine Gleichung wie $(x-1)^2=x^2-2x+1$ für **jeden** Wert von $x \in \mathbb{R}$. Eine solche Gleichung heißt auch **Identität in \mathbb{R}** . Identitäten darf man ableiten, nicht aber Bestimmungsgleichungen. Die Ableitung der Identität $(x-1)^2=x^2-2x+1$ ist $2(x-1)=2x-2$.

Die Gleichung $f(f^{-1}(x))=x$ ist eine Identität in $D_{f^{-1}}$, ist also in $D_{f^{-1}}$ auf beiden Seiten ableitbar. Die beiden Seiten sind ja nur verschiedene Fassungen von Termen ein und der selben Funktion auf $D_{f^{-1}}$.

Eine Anwendung dieses Verfahrens ist das **implizite Differenzieren**:

Man differenziert die Funktionsgleichung

entweder in expliziter Form, wie $y=\sqrt{x}$

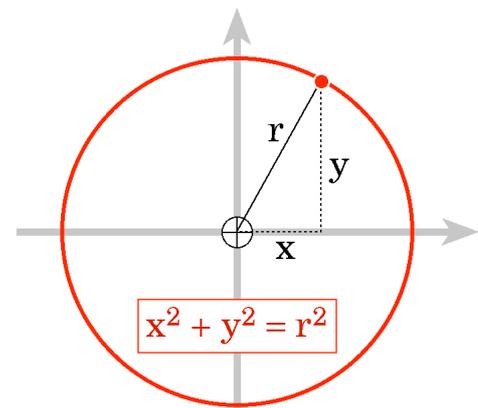
oder in impliziter Form, wie $y^2=x$.

$y^2=x$ ist eine Identität in \mathbb{R}^+ , wobei man sich $y=f(x)=\sqrt{x}$ zu denken hat. $y^2=x$ abgeleitet nach x ergibt $2yy'=1$, und aufgelöst: $y' = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Ein anderes Beispiel für eine Funktionsgleichung in impliziter Form ist die Gleichung eines Kreises um O mit Radius r : $x^2+y^2=r^2$. Das ist eine Identität für $x \in [-r;r]$. Ihre implizite Ableitung nach $x \in]-r;r[$ ist $2x+2yy'=0$, und aufgelöst:

$$y' = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}, \text{ wobei für den oberen}$$

Halbkreis gilt $y=\sqrt{r^2-x^2}$.



Bei Ungleichungen hat das Ableiten keinen Sinn. Auch wenn die Ungleichung $f(x)>g(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ gilt, darf man sie nicht differenzieren. Sie bedeutet ja nur, dass G_f über G_g liegt, nicht aber dass G_f überall steiler ist als G_g (was die Folgerung bei fälschlichem Ableiten wäre). Aus $x^2>0$ folgt also nicht $2x>0$.

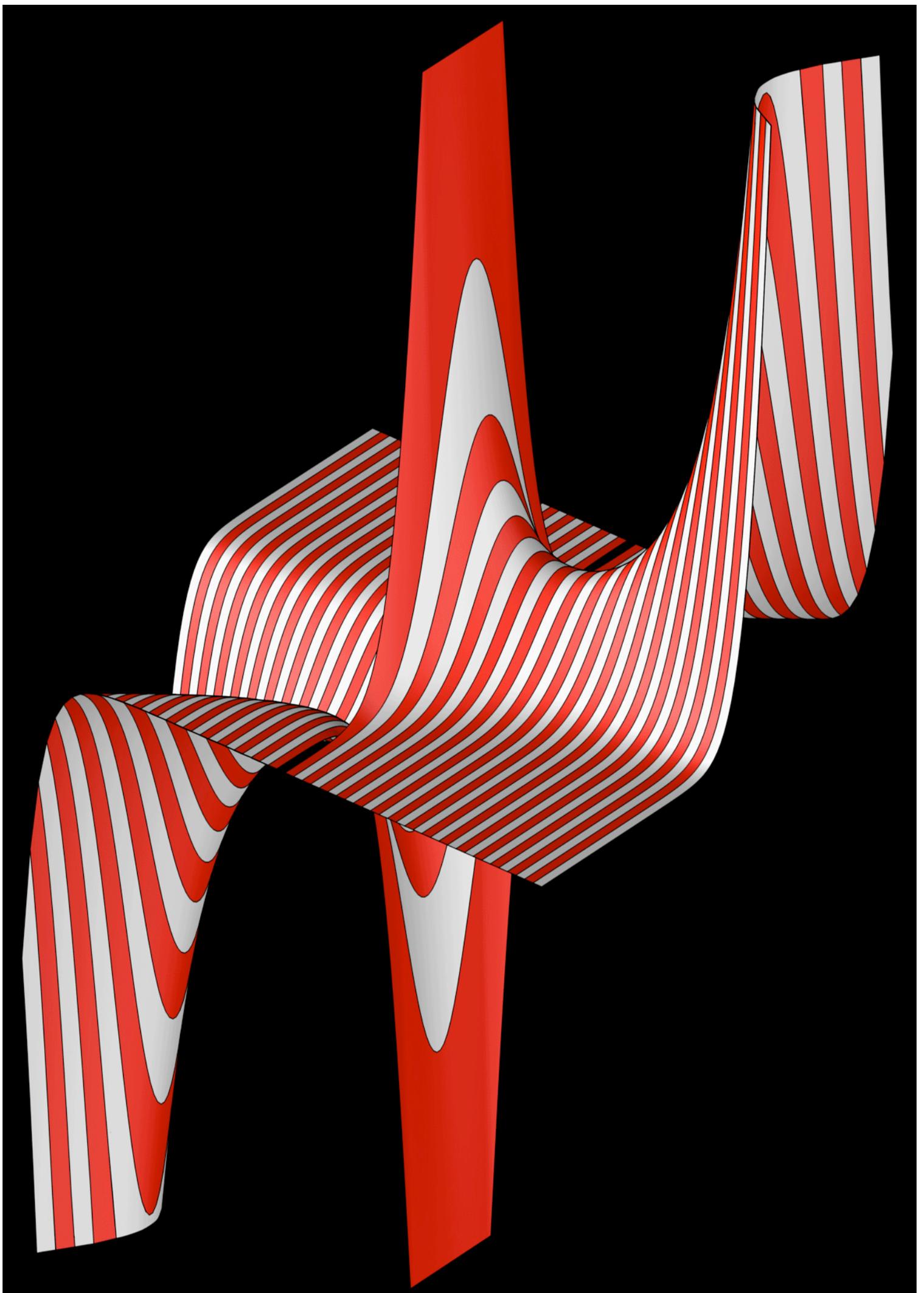
Das Integrieren von Bestimmungsgleichungen ist ebenso unsinnig wie das Differenzieren. Identitäten aber darf man in ihrem Gültigkeitsbereich integrieren; so vereinfacht sich manchmal auch die Rechnung:

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-(\sin x)^2} dx = \int_0^{\pi/2} \cos x dx = [\sin x]_0^{\pi/2} = 1, \text{ weil in } [0;\pi/2] \text{ gilt: } \sqrt{1-(\sin x)^2} = \cos x.$$

Auch Ungleichungen darf man in ihrem Gültigkeitsbereich integrieren (aber nicht differenzieren!). $f(x)>g(x)$ für $x \in D$ bedeutet, dass in der Definitionsmenge G_f über G_g liegt.

Damit ist auch die Flächenbilanz von G_f größer als die von G_g :

$$x \geq x^2 \text{ für } x \in [0;1] \Rightarrow \int_0^1 x dx \geq \int_0^1 x^2 dx \Rightarrow \frac{1}{2} \geq \frac{1}{3}.$$



VI. Exponentialfunktion

1. Definition

- Heißer Kaffee kühlt sich ab.
- Angezupfte Saiten schwingen aus.
- Licht wird im Wasser immer schwächer, je tiefer man taucht.
- Radioaktive Präparate strahlen mit der Zeit immer schwächer.
- Geld auf der Bank vermehrt sich durch Zinseszins immer mehr.
- Bakterienkulturen wachsen immer stärker an.
- Wissen nimmt immer mehr zu.

Diese Vorgänge, so vielfältig sie uns auch erscheinen, lassen sich mathematisch durch ein und den selben Funktionstyp beschreiben: die Exponentialfunktion.

Definition: Eine Funktion f heißt **Exponentialfunktion**, wenn sie den Term hat: $f(x) = b^x$, $b > 0$ und $b \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$. b heißt **Basis** der Exponentialfunktion. x , die unabhängige Variable, ist Exponent. Der zugehörige Graph G_f heißt **Exponentialkurve**.

Die Basis b muss positiv sein, damit der Exponent x auch ein Bruch oder sogar eine irrationale Zahl sein kann.

Die Basis $b=1$ schließen wir deshalb aus, weil der Term 1^x nur den konstanten Wert 1 liefert, also nicht die charakteristischen Eigenschaften einer Exponentialfunktion zeigt.

Die Basis b lässt sich deuten als Parameter der Schar der Exponentialfunktionen.

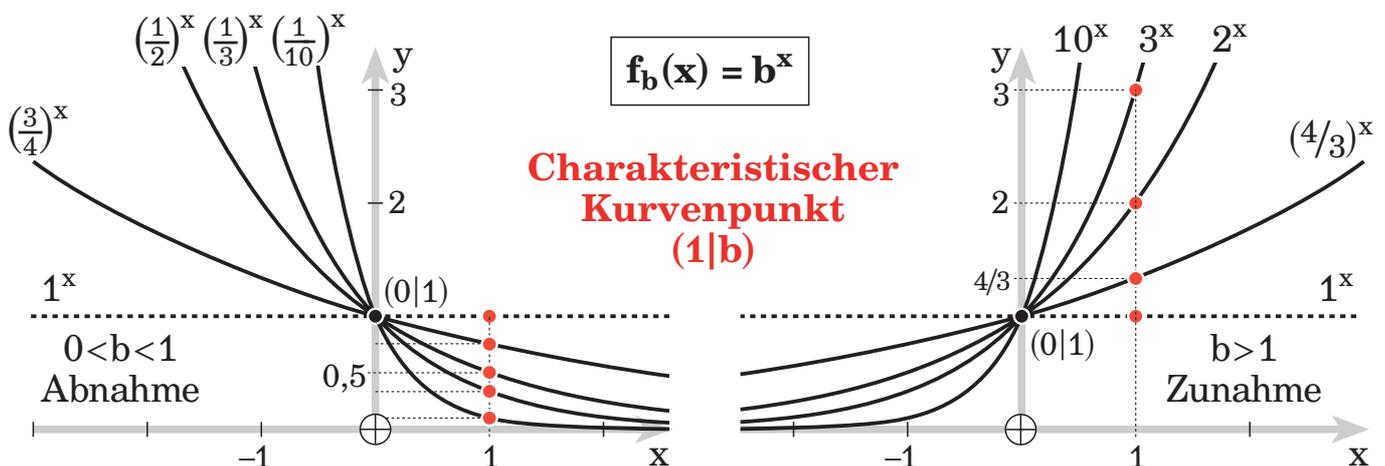
Die Typen des immer mehr Ab- oder Zunehmens erkennt man wieder im Bild:

Die Kurven für $0 < b < 1$ beschreiben das Abnehmen, die für $b > 1$ das Zunehmen.

Die Gerade $y=1^x$ trennt beide Typen.

Wegen $b^x > 0$ liegen alle Scharkurven über der x -Achse.

Wegen $b^0 = 1$ gehen alle Scharkurven durch $(0|1)$.



2. Ableitung

Die Exponentialfunktion ist mit keiner der bisher bekannten Funktionen verwandt. Wir wissen weder, ob sie überhaupt differenzierbar ist, noch kennen wir Regeln, nach denen wir sie ableiten könnten. Es bleibt also nur der etwas beschwerliche Weg: Tangentensteigung = Grenzwert der Sekantensteigung.

Funktionsterm: $f(x) = b^x$

Sekantensteigung m für die Stelle x :

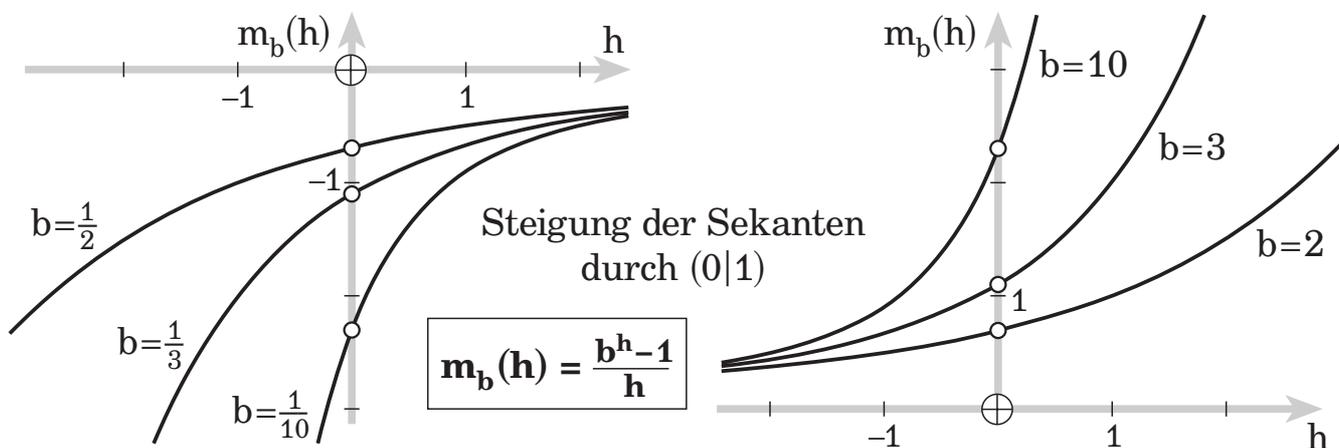
$$m(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{b^{x+h} - b^x}{h} = \frac{b^x \cdot b^h - b^x}{h} = b^x \cdot \frac{b^h - 1}{h}$$

$$1. \text{Ableitung: } f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} m(x) = \lim_{h \rightarrow 0} b^x \cdot \frac{b^h - 1}{h} = b^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{b^h - 1}{h}$$

Die Aufgabe wäre gelöst, wenn der Grenzwert $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{b^h - 1}{h}$ existierte und wir seinen Wert wüssten; er bedeutet die Tangentensteigung, also die Ableitung, für $x=0$:

$f'(0) = b^0 \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{b^h - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{b^h - 1}{h}$. Die Tabelle zeigt einige Werte von $\frac{b^h - 1}{h}$:

| | $h=-0,1$ | $h=-0,01$ | $h=-0,001$ | $h=-0,0001$ | $h=0$ | $h=0,0001$ | $h=0,001$ | $h=0,01$ | $h=0,1$ |
|----------|----------|-----------|------------|-------------|-------|------------|-----------|----------|---------|
| $b = 2$ | 0,6697 | 0,6908 | 0,6929 | 0,6931 | ? | 0,6932 | 0,6934 | 0,6956 | 0,7177 |
| $b = 3$ | 1,0404 | 1,0926 | 1,0980 | 1,0986 | ? | 1,0987 | 1,0992 | 1,1047 | 1,1612 |
| $b = 10$ | 2,0567 | 2,2763 | 2,2999 | 2,3023 | ? | 2,3029 | 2,3052 | 2,3293 | 2,5893 |



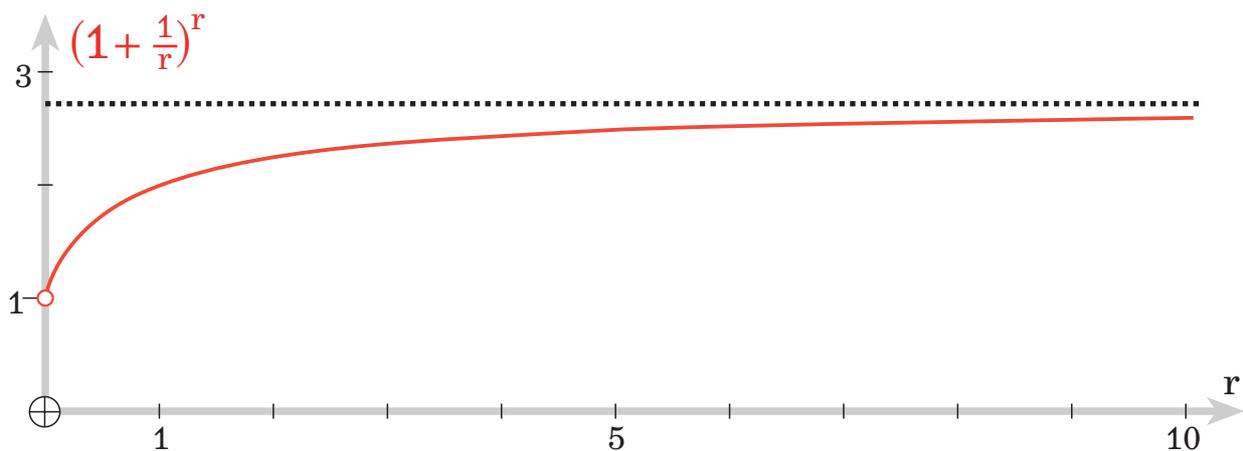
e-Funktion

Allem Anschein nach existiert der Grenzwert für die Steigung $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{b^h - 1}{h}$ und hängt ab von der Basis b . Schön wäre eine Basis, für die er den Wert 1 hätte. Denn dann wäre $f'(x) = b^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{b^h - 1}{h} = b^x \cdot 1 = b^x$, und der Funktionsterm wäre zugleich auch Term der 1. Ableitung. Wie ein Blick in die Tabelle zeigt, müsste b zwischen 2 und 3 liegen. Gesucht ist b so, dass gilt: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{b^h - 1}{h} = 1$. Man kann beweisen, dass b existiert. Wir nähern uns b mit einer plausiblen Überlegung:

Je näher h bei 0 liegt, desto mehr gleichen sich beide Seiten in $\frac{b^h-1}{h} \approx 1$, also $b^h \approx 1+h$ oder $b \approx (1+h)^{1/h}$. Den unbequemen Exponenten $1/h$ beseitigt man mit der Substitution $\frac{1}{h} = r$, also $h = \frac{1}{r}$. Je näher h bei 0 liegt, desto größer ist r , desto mehr gleichen sich die Seiten in $b \approx (1 + \frac{1}{r})^r$.

Der Taschenrechner liefert schnell einige Näherungswerte für b :

| r | 10^1 | 10^2 | 10^3 | 10^4 | 10^5 | 10^6 | 10^7 |
|-----------------------|--------|--------|--------|---------|---------|-----------|-------------|
| $(1 + \frac{1}{r})^r$ | 2,59 | 2,70 | 2,717 | 2,71815 | 2,71827 | 2,7182805 | 2,718281693 |



Diese Basis hat einen recht krummen Wert. Zu Ehren des schweizerischen Mathematikers Leonhard EULER (Basel 1707 bis 1783 St. Petersburg) bezeichnet man sie mit **e**; **e** heißt deshalb auch »Euler-Zahl«.

Definition: $e := \lim_{r \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{r})^r = 2,718281828\dots$

Die Exponentialfunktion mit Basis **e** heißt **e-Funktion**, symbolisch **exp**: $f(x) = e^x = \exp(x)$.

Die zugehörige Kurve heißt **e-Kurve**.

e lässt sich nicht schreiben als Bruch natürlicher Zahlen, ist also irrational. **e** lässt sich nicht einmal darstellen als Lösung einer algebraischen Gleichung; solche Zahlen heißen **transzendent**.

Wir haben also die Differenzierbarkeit und die Ableitung der Exponentialfunktion für den Sonderfall der Basis **e** gefunden. Für $f(x)$ gilt: $f(x) = e^x$

$$f'(x) = e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x \cdot 1$$

$$(e^x)' = e^x$$

Der allgemeine Fall $(b^x)'$ lässt sich leicht folgern, siehe überübernächste Seite.

3. Eigenschaften

e-Funktion $f(x) = e^x, D_f = \mathbb{R}$

Ableitung und Integral

$f(x) = e^x = f'(x) = f''(x) = \dots$ Wegen $e^x > 0$ steigt die e-Kurve echt monoton und ist linksgekrümmt.

$$\int e^x dx = e^x + C$$

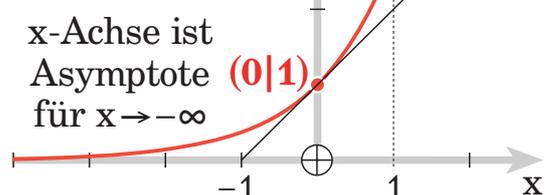
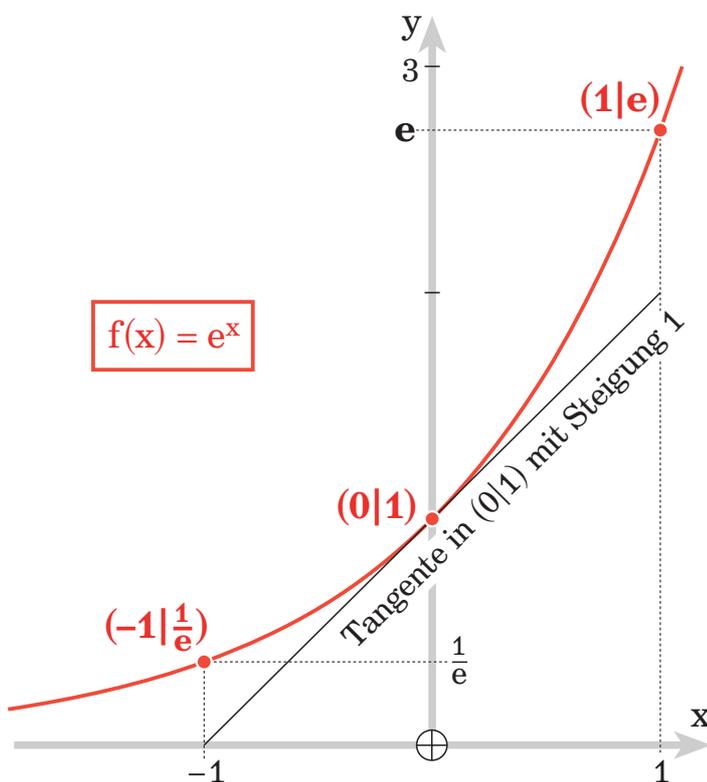
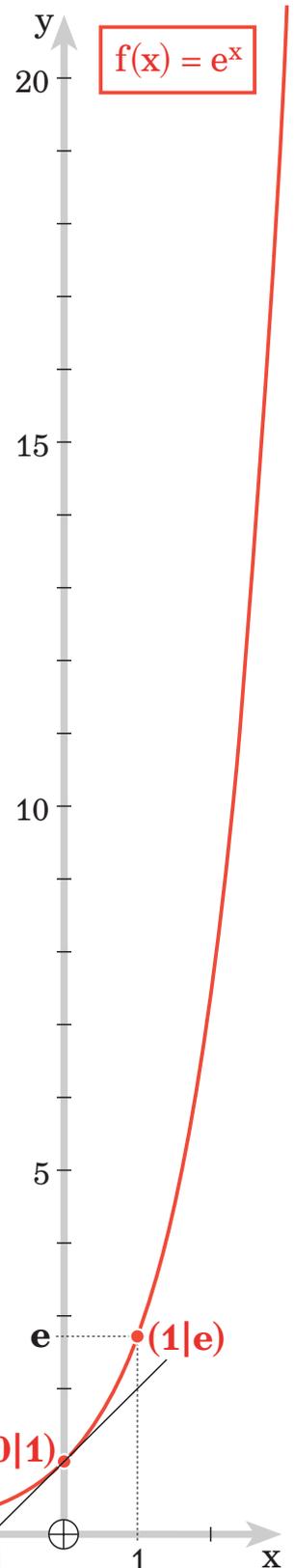
Verhalten im Unendlichen

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = \infty$ e^x überschreitet jede noch so große Zahl, weil bei jedem Einheitsschritt nach rechts der Funktionswert aufs e-fache steigt.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ e^x unterschreitet jede noch so kleine positive Zahl, weil bei jedem Einheitsschritt nach links der Funktionswert auf den e-ten Teil fällt. Die e-Kurve kommt also für $x \rightarrow -\infty$ der x-Achse beliebig nahe (trifft sie aber nie). Deshalb nennt man die x-Achse die **Asymptote** der e-Kurve für $x \rightarrow -\infty$.

Stetigkeit und Wertemenge

Weil \exp differenzierbar ist, ist \exp auch stetig und nimmt jeden positiven Wert an: $W_f = \mathbb{R}^+$



Umkehrfunktion

Die Exponentialfunktion ist eineindeutig.

Sie hat deshalb eine Umkehrfunktion: die Logarithmusfunktion.

Aus der Mittelstufe ist bekannt:

$$\begin{array}{lll}
 y = 10^x & \Leftrightarrow & x = \log_{10} y = \lg y & \text{Zehnerlogarithmus} \\
 y = 2^x & \Leftrightarrow & x = \log_2 y = \text{ld } y = \text{lb } y & \text{Dual- oder Binärlogarithmus} \\
 y = b^x & \Leftrightarrow & x = \log_b y & \text{Logarithmus zur Basis } b
 \end{array}$$

Definition: Der Logarithmus mit Basis e heißt

natürlicher Logarithmus.

Die zugehörige Funktion heißt **ln**: $f(x) = \log_e x = \ln x$.

Die zugehörige Kurve heißt **ln-Kurve**.

Die ln-Funktion ist also die Umkehrfunktion der e-Funktion und umgekehrt. Symbolisch: $\ln = \exp^{-1}$ und $\exp = \ln^{-1}$.

Funktion $f(x) = e^x$, $D_f = \mathbb{R}$, $W_f = \mathbb{R}^+$

Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = \ln x$, $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}^+$, $W_{f^{-1}} = \mathbb{R}$.

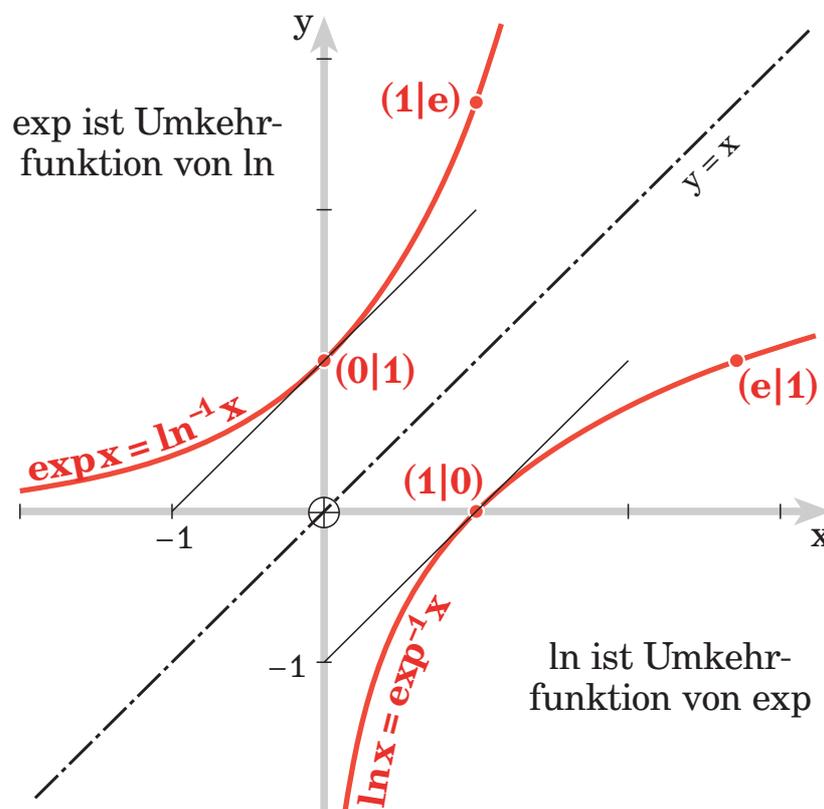
Wichtige Identitäten

$$e^{\ln x} = x, x > 0$$

$$\ln e^x = x, x \in \mathbb{R}$$

speziell $e^{\ln e} = e$

ln e = 1



Anwendung der Identitäten: Lösen von Gleichungen und Ungleichungen

Wir nutzen die Eigenschaft, dass \exp und \ln umkehrbar sind beziehungsweise echt monoton steigen.

| | | |
|-------------------|----------------------------------|-----------------------------|
| $e^x = 3$ | $e^{2x-1} = 10^{-5}$ | $e^{-3x} < \frac{1}{10}$ |
| $\ln e^x = \ln 3$ | $2x-1 = -5 \cdot \ln 10$ | $-3x < \ln \frac{1}{10}$ |
| $x = \ln 3$ | $x = \frac{1-5 \cdot \ln 10}{2}$ | $-3x < -\ln 10$ |
| | | $x > \frac{1}{3} \ln 10$ |
| | | |
| $\ln x = 5$ | $\ln(2x-1) = 10$ | $\ln(-3x) < -0,1$ |
| $e^{\ln x} = e^5$ | $2x-1 = e^{10}$ | $-3x < e^{-0,1}$ |
| $x = e^5$ | $x = \frac{1+e^{10}}{2}$ | $x > -\frac{1}{3} e^{-0,1}$ |

Basisänderung

Jede Potenz b^x lässt sich schreiben als Potenz mit der Basis e .

Wegen $a=e^{\ln a}$ gilt $b^x = (e^{\ln b})^x = e^{x \ln b}$

Damit ist jede Exponentialfunktion mit dem Term b^x zurückführbar auf die e -Funktion; ihr Term ist $(e^x)^{\ln b}$, also eine Potenz von e^x .

Ableitung von b^x

$$f(x) = b^x = e^{x \ln b}$$

$$\text{Kettenregel: } f'(x) = e^{x \ln b} \cdot \ln b = b^x \cdot \ln b$$

Der vom vorigen Kapitel unbekannt Faktor $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{b^h - 1}{h}$ erweist sich als $\ln b$.

$$\frac{d}{dx} 10^x = 10^x \cdot \ln 10$$

$$\frac{d}{dx} 2^x = 2^x \cdot \ln 2$$

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x \cdot \ln e = e^x$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \ln \frac{1}{2} = -\left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \ln 2 \quad \text{oder}$$

$$\frac{d}{dx} 2^{-x} = 2^{-x} \cdot \ln 2 \cdot (-1) = -2^{-x} \cdot \ln 2$$

Exponentialkurven

Alle folgenden Überlegungen beruhen auf der e -Kurve G mit Gleichung $y=e^x$. Zur schnellen und sicheren Orientierung dienen die Asymptote $y=0$ für $x \rightarrow -\infty$ und der »Angelpunkt *« $(0|1)$ mit der Tangente der Steigung 1. Durch einfache Abwandlungen des Terms e^x entstehen Exponentialkurven G_f . Wir zeigen Wege, wie man ohne ausladende Kurvendiskussion und Wertetabelle die Lage von G_f findet.

Spiegelungen im Koordinatensystem

Spiegelung von G an der x-Achse

$$f(x) = -e^x$$

G_f hat den Angelpunkt $(0|-1)$ und

die Asymptote $y=0$ für $x \rightarrow -\infty$.

Spiegelung von G an der y-Achse

$$f(x) = e^{-x} = \frac{1}{e^x} = \left(\frac{1}{e}\right)^x$$

G_f hat den Angelpunkt $(0|1)$ und

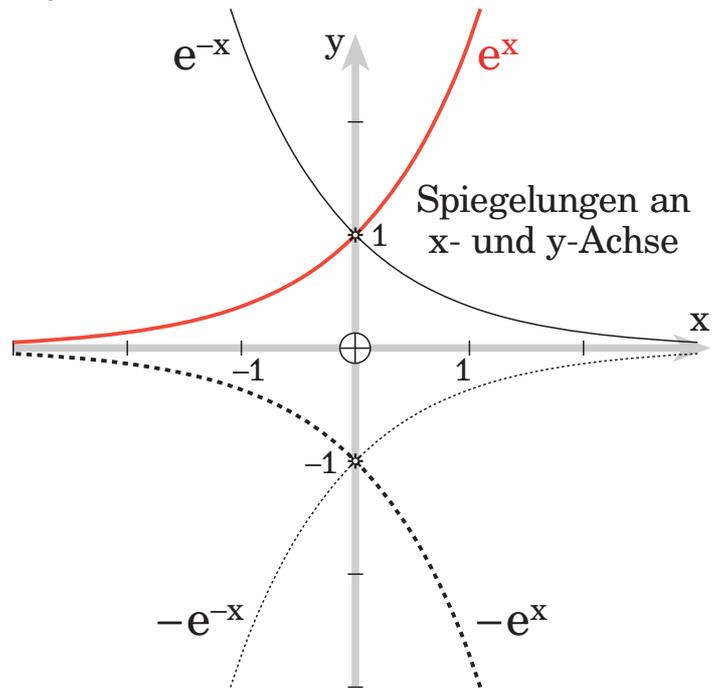
die Asymptote $y=0$ für $x \rightarrow +\infty$.

Spiegelung von G am Ursprung

$$f(x) = -e^{-x} = -\frac{1}{e^x} = -\left(\frac{1}{e}\right)^x$$

G_f hat den Angelpunkt $(0|-1)$ und

die Asymptote $y=0$ für $x \rightarrow +\infty$.



Schiebungen und Streckungen im Koordinatensystem

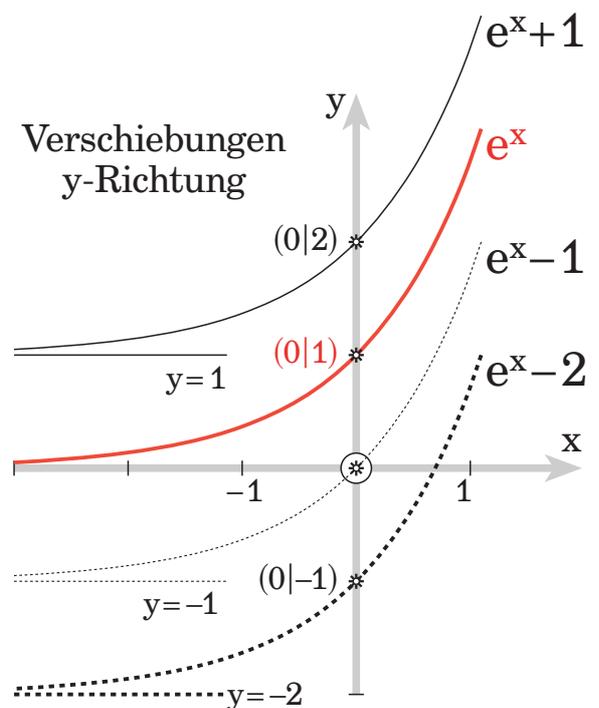
$$f(x) = e^x + b$$

G_f entsteht beim Verschieben

von G um b in y-Richtung.

G_f hat den Angelpunkt $(0|1+b)$ und

die Asymptote $y=b$ für $x \rightarrow -\infty$.



$$f(x) = ae^x, a > 0$$

G_f entsteht beim Strecken von G

in y-Richtung mit Faktor a.

Wegen $ae^x = e^{x+\ln a}$ ist diese Streckung gleichbedeutend mit einer Verschiebung um $-\ln a$ in x-Richtung.

G_f hat den Angelpunkt $(-\ln a|1)$ und

die Asymptote $y=0$ für $x \rightarrow -\infty$.

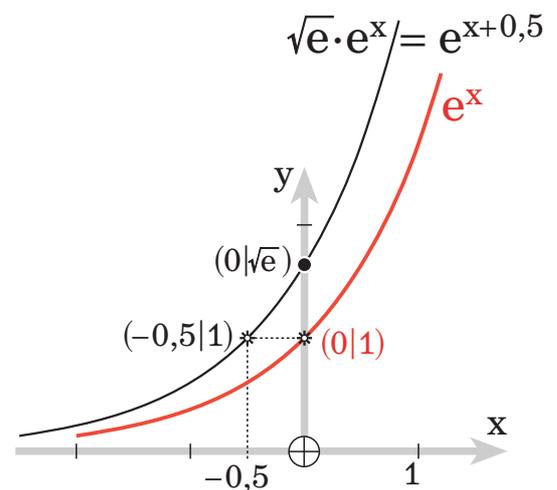
Zum Bild:

$$f(x) = \sqrt{e} \cdot e^x = e^{0,5} e^x = e^{x+0,5}$$

Streckung aufs \sqrt{e} -fache in y-Richtung

bewirkt das Selbe wie Verschiebung

um $-0,5$ in x-Richtung.



Allgemeiner Fall

$$f(x) = -2e^{-x} + 2$$

Um Angelpunkt und Asymptote zu finden, muss man den Term so umformen, dass der Koeffizient bei e entweder +1 oder -1 ist:

$$f(x) = -e^{-x+\ln 2} + 2$$

Bedingung für Angelpunkt: Exponent = 0

$$-x + \ln 2 = 0$$

$$x = \ln 2$$

$$f(\ln 2) = -e^0 + 2 = 1; \text{ Angelpunkt } (\ln 2 | 1)$$

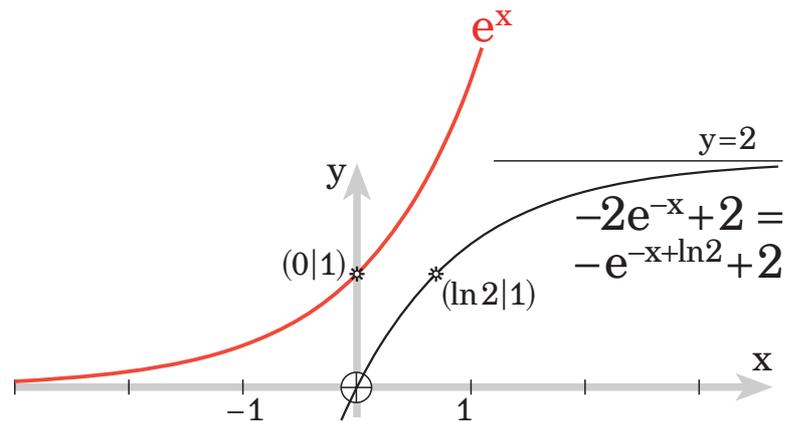
Bedingung für Asymptote:

$$\text{Exponent} \rightarrow -\infty$$

$$-x + \ln 2 \rightarrow -\infty$$

$$x \rightarrow +\infty$$

Asymptote $y=2$ für $x \rightarrow +\infty$.

**Aufgaben**

◇1 Berechne mit dem Taschenrechner.

a) $e^{0,1}$

b) $e^{-0,1}$

c) \sqrt{e}

d) e^e

e) e^{e^e}

f) $\sqrt[e]{e}$

g) e^π

h) π^e

i) $e^{-\sqrt{2}}$

j) $\frac{e^2 + e^{-2}}{2}$

◇2 Löse auf nach x und bestimme mit dem Taschenrechner auf 0,01 gerundete Näherungswerte

a) $e^x = 2$

b) $e^{2x} = 10^6$

c) $e^{-3x} = \pi$

d) $\sqrt{e^x} = 10^{-5}$

e) $e^{2x+5} = \sqrt{10}$

•f) $e^x - 2e^{-x} = 1$

3 Löse auf nach x und bestimme mit dem Taschenrechner Näherungswerte.

a) $1 < e^x < 2$

b) $1 < e^{-x} < 2$

c) $0,1 < e^x < 1000$

d) $\frac{1}{e} < e^x < e$

e) $e^{2x} \geq 10^{-3}$

•f) $e^{|x|} \leq e^e$

•g) $e^{2x} > e^x + 12$

h) $\frac{1-e^x}{1+e^x} > 0$

◇4 Leite ab.

a) $f(x) = x + e^x$

b) $f(x) = -\sqrt{e} \cdot e^x$

c) $f(x) = 2e^x + x \cdot e^2$

d) $f(x) = x \cdot e^x$

e) $f(x) = x^2 \cdot e^x$

f) $f(x) = \sqrt{x} \cdot e^x$

g) $f(x) = x^e \cdot e^x$

h) $f(x) = e^x + \sin x$

i) $f(x) = e^x \sin x$

j) $f(x) = \sin(e^x)$

k) $f(x) = e^{\sin x}$

◊5 Leite ab.

a) $f(x) = e^{-x}$

b) $f(x) = e^{2x}$

c) $f(x) = e^{x^2}$

d) $f(x) = e^{\sqrt{x}}$

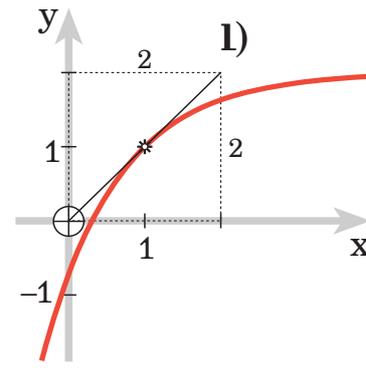
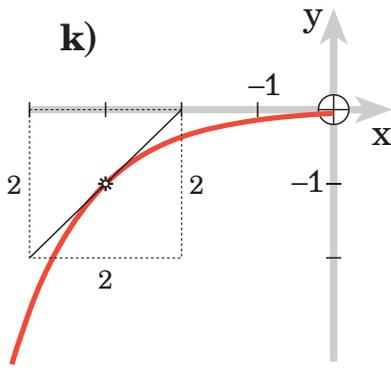
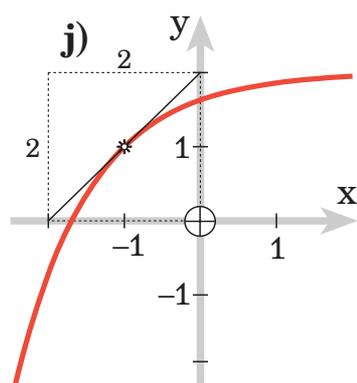
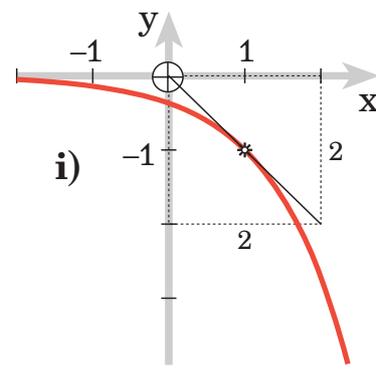
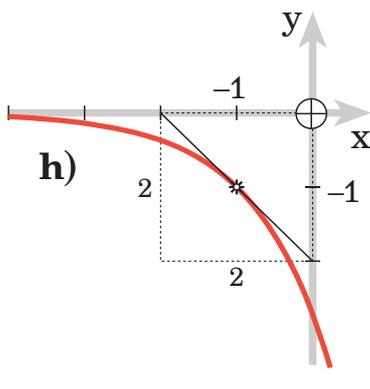
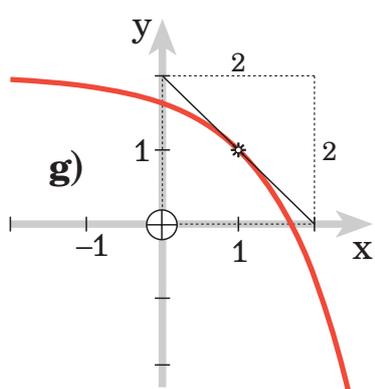
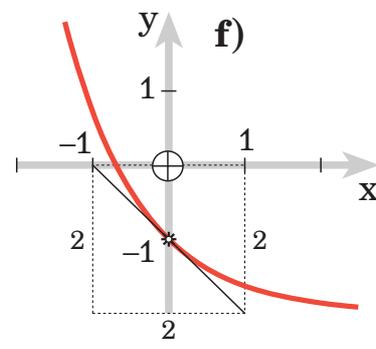
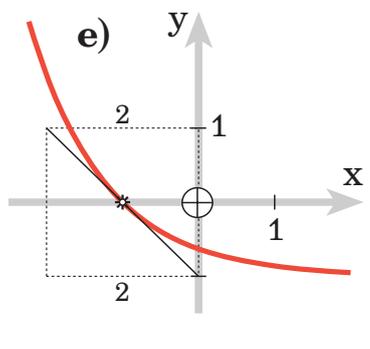
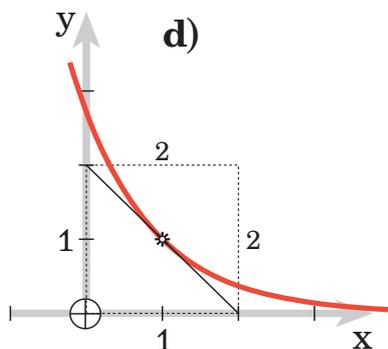
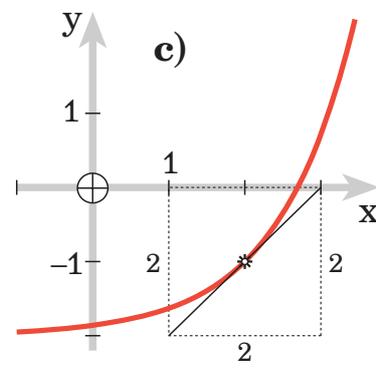
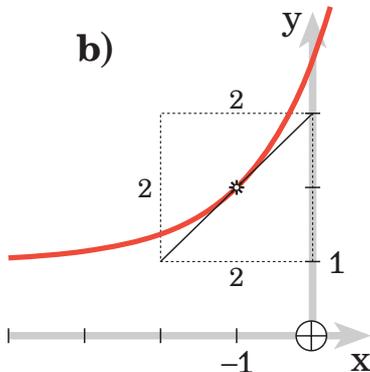
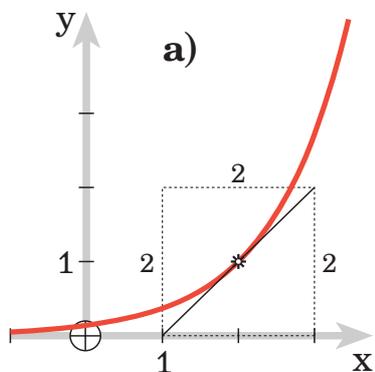
e) $f(x) = \sqrt{e^x}$

f) $f(x) = e^{\cos 2x}$

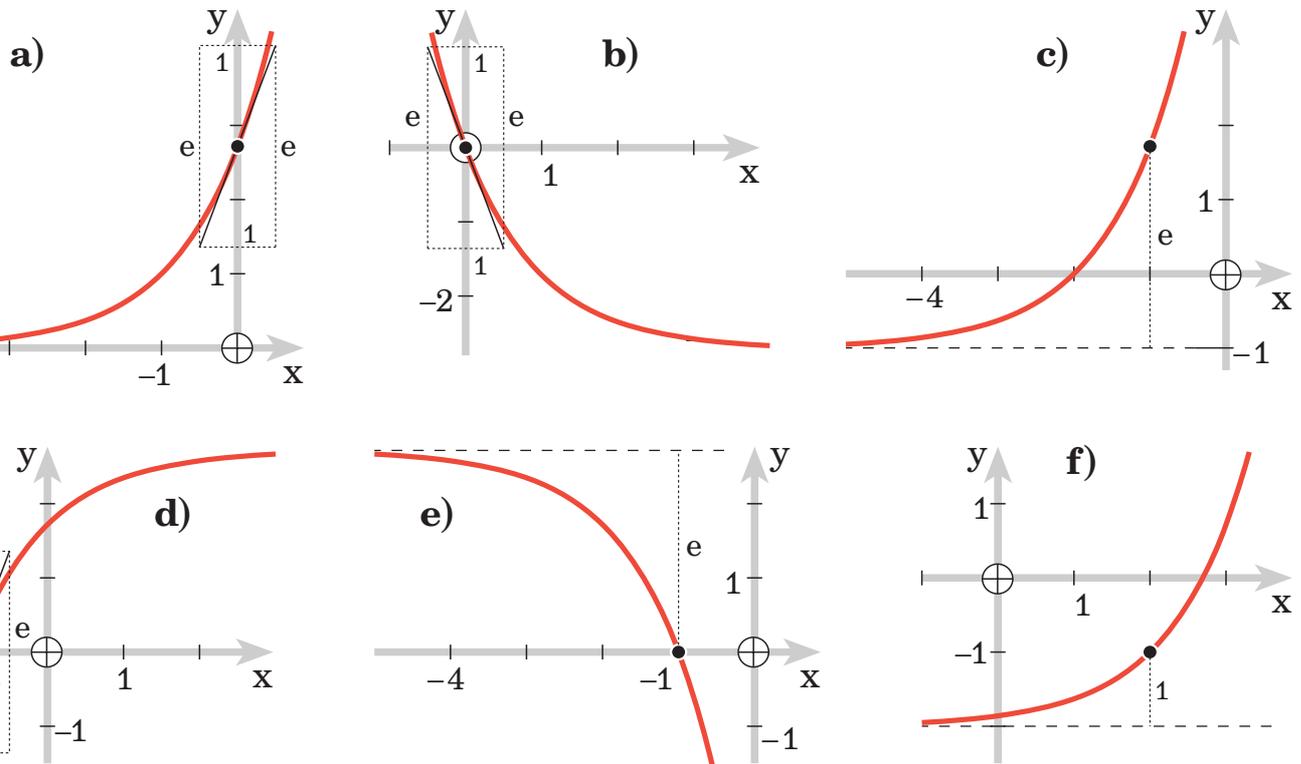
g) $f(x) = x^2 e^{-\sqrt{x}}$

h) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{e^x}}$

◊6 Die Bilder zeigen Kurven vom Typ $y = a \cdot e^{\pm x} + b$ mit Angelpunkt. Bestimme Funktionsterm, Achsenpunkte und Asymptote.



7 Die Bilder zeigen Kurven vom Typ $y = a \cdot e^{\pm x} + b$ mit Asymptote oder einem charakteristischen Kurvenpunkt.
Bestimme Funktionsterm und Achsenpunkte.



◇8 Gegeben sind Funktionsterme. Skizziere die zugehörigen Kurven, bestimme Achsenpunkte und Asymptoten.

- | | | |
|-------------------------|--------------------------------------|---------------------------|
| a) $e^{2+x} - 1$ | b) $e^{2-x} - e$ | c) $e - e^{-e-x}$ |
| d) $2e^{x-2}$ | e) $\frac{1}{e}(e^{2-x} - e)$ | f) $e(1 - e^{-x})$ |

9 $f(x) = a \cdot e^x + b$, $g(x) = a \cdot e^{-x} + b$

Bestimme a und b so, dass die Graphen im Ursprung berührt werden von der Winkelhalbierenden

- a)** des 1. Quadranten **b)** des 2. Quadranten.

◇10 $f(x) = a \cdot e^{tx} + b$, $a \cdot t \neq 0$

Zeige: $y=b$ ist die Gleichung der Asymptote von G_f .

Wie entscheidet man, ob sie Asymptote ist für $x \rightarrow +\infty$ oder $x \rightarrow -\infty$?

11 $f(x) = a \cdot e^{tx} + b$, $g(x) = u \cdot e^{sx} + v$.

Bestimme u, v und s so, dass die Asymptoten von G_f und G_g den Abstand 2 haben.

12 $f(x) = a \cdot e^{tx} + b$

Für welche Werte von a und b schneidet G_f :

- a)** nur die y-Achse **b)** die x-Achse **c)** nur die x-Achse

•13 $f(x) = a \cdot e^x + b$.

Wie viele Punkte legen G_f fest? Welche Bedingung müssen sie erfüllen?

◊14 Berechne $A = \int_{-1}^0 e^x dx$ und deute den Wert an einer skizzierten e-Kurve.
Bestimme $b > 0$ so, dass $\int_0^b e^x dx = A$ ist.

15 Berechne $A = \int_0^{\ln 9} e^x dx$.

Bestimme a so, dass die Gerade $x=a$ die Fläche mit Inhalt A halbiert.

•16 In welchem Verhältnis (<1) teilt die e-Kurve das Rechteck mit den Ecken $(0|0)$, $(2|0)$, $(2|e^2)$ und $(0|e^2)$?

17 Berechne das Integral und deute seinen Wert als Flächeninhalt (Skizze!).

a) $\int_{-1}^0 (1 - e^x) dx$ b) $\int_1^2 e^{x-2} dx$

18 $f(x) = e^{x-1} - e$

Berechne den Inhalt der Fläche, die begrenzt ist von G_f und den Koordinatenachsen.

•19 Die Gerade g schneide die e-Kurve in $(-1|?)$ und $(1|?)$.

Berechne den Inhalt der Fläche, die begrenzt ist von Gerade und e-Kurve.

•20 $f(x) = e^x$, $g(x) = e + 1 - e^{1-x}$

a) Berechne die Schnittpunkte von G_f und G_g .

b) Berechne den Inhalt der Fläche, die beide Graphen einschließen.

Verwende $\int e^{-x} dx = -e^{-x} + C$.

4. Polynom- und Exponentialfunktion

Polynomfunktion als Ersatz für die e-Funktion

Die Polynomfunktion ist uns vertrauter als die e-Funktion. Wir werden die beiden Funktionen vergleichen und so neue Eigenschaften der e-Funktion entdecken.

Zuerst zeigen wir, wie sich e^x in der Gegend der y-Achse annähern lässt durch Polynome. Der einfachste Fall einer Polynomkurve ist eine Gerade.

Von allen Geraden liefert die Tangente die beste Annäherung: $y = 1 + x$.

Wegen $\exp''(x) = e^x > 0$ ist die e-Kurve linksgekrümmt. Sie liegt deshalb immer über jeder ihrer Tangenten (bis auf den Berührungspunkt): $e^x > 1 + x$, ($x \neq 0$).

Wenn sich e-Kurve und Polynomkurve wenig unterscheiden, dann gilt das auch für die Inhalte der Flächen, die sich beim Integrieren $\int_0^x \dots$ für $x > 0$ ergeben:

$$\begin{aligned} e^x &> 1 + x && \parallel \int_0^x \dots \\ e^x - 1 &> x + \frac{1}{2}x^2 && \parallel \int_0^x \dots \\ e^x &> 1 + x + \frac{1}{2}x^2 && \parallel \int_0^x \dots \\ e^x - 1 &> x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 && \parallel \int_0^x \dots \\ e^x &> 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 \dots \text{ und so weiter.} \end{aligned}$$

Es ergibt sich $e^x > 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \dots + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n}x^n$

Der Nenner des letzten Bruchs ist ein auffälliges Produkt: $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n$.

In der Mathematik kommt es oft vor, zum Beispiel in der Kombinatorik.

Zu seiner bequemen Handhabung hat man eine Abkürzung geschaffen:

$n!$, gesprochen n-Fakultät.

$n!$ ist das Produkt der natürlichen Zahlen von 1 bis n. So ist $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Der Vollständigkeit halber hat man auch noch $0!$ und $1!$ definiert, nämlich so,

dass auch für sie die Regel gilt

$$n! = [1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1)] \cdot n = (n-1)! \cdot n$$

$$\text{Fall } n=2: \quad 2! = (2-1)! \cdot 2 \Rightarrow 2 = 1! \cdot 2 \Rightarrow \mathbf{1=1!} \quad \text{Fall } n=1: \quad 1! = (1-1)! \cdot 1 \Rightarrow \mathbf{1=0!}$$

| |
|---|
| $0! = 1$ |
| $1! = 1$ |
| $2! = 1 \cdot 2$ |
| $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$ |
| |
| n-Fakultät $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ |

In der Fakultät-Schreibweise sieht die Ungleichung für e^x dann für $x > 0$ so aus:

$$e^x > \frac{1}{0!}x^0 + \frac{1}{1!}x^1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots + \frac{1}{n!}x^n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}x^k$$

Die Polynome $p_n(x) = \frac{1}{0!}x^0 + \frac{1}{1!}x^1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots + \frac{1}{n!}x^n$ eignen sich sogar für $x < 0$ als Näherungspolynome für e^x :

$$e^x \approx \frac{1}{0!}x^0 + \frac{1}{1!}x^1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots + \frac{1}{n!}x^n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}x^k$$

Für $x=0$ stimmen die ersten n Ableitungen von e^x und $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}x^k$ überein:

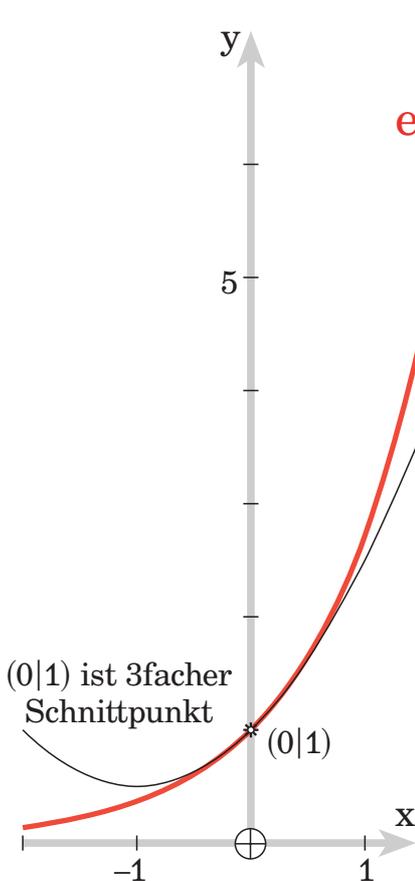
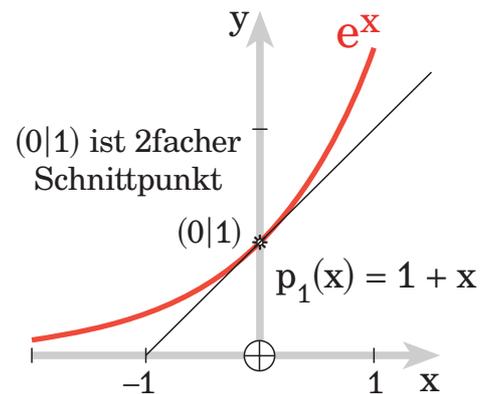
e -Kurve und Polynomkurve haben einen $(n+1)$ -fachen Schnittpunkt.

Die Bilder veranschaulichen, wie sich mit wachsendem n die Annäherung verbessert. Mit größerem mathematischen Aufwand lässt sich sogar zeigen, dass gilt

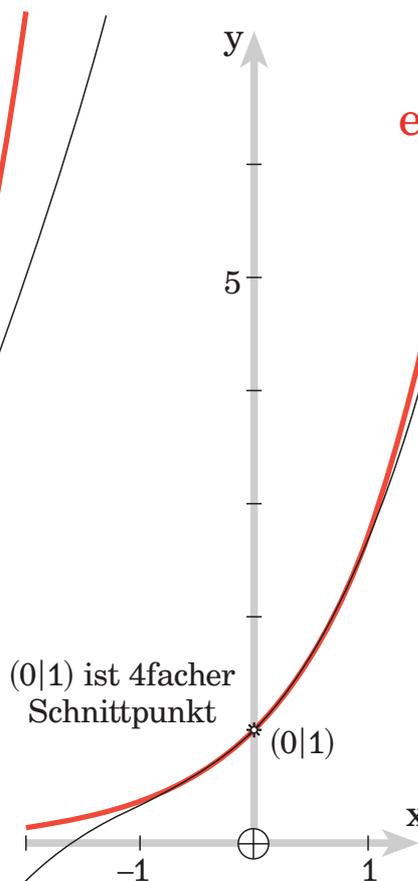
$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k$$

Damit haben wir eine weitere Grenzwert-Darstellung für die Euler-Zahl e gefunden

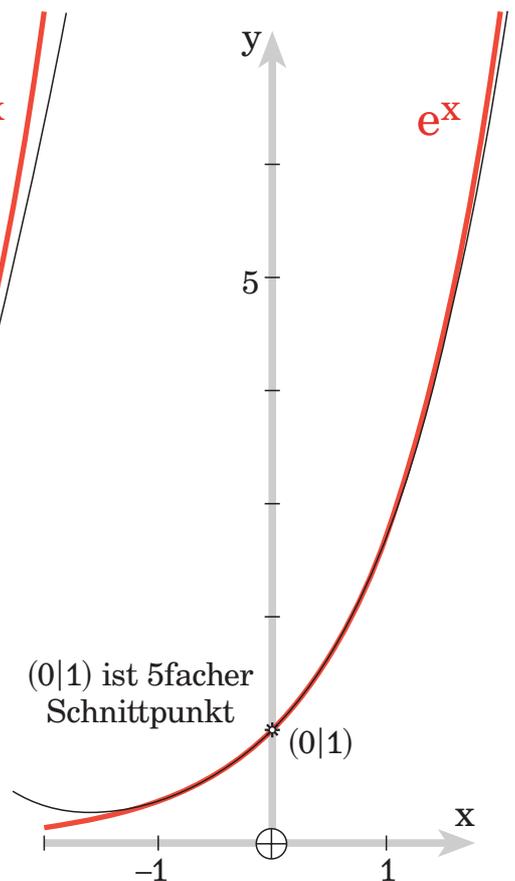
$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$



$$p_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$$



$$p_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$$



$$p_4(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4$$

Polynom- und e-Funktion im Unendlichen

Die Potenzfunktion mit dem Term x^n ($n \in \mathbb{N}$) und die e-Funktion mit dem Term e^x werden unendlich groß für $x \rightarrow +\infty$, die e-Funktion aber unvergleichlich viel stärker. Der Bruch $\frac{e^x}{x^n}$ zeigt dies deutlich

$$\frac{e^x}{x^n} = \frac{1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{1}{(n+1)!}x^{n+1} + \dots}{x^n}$$

$$\frac{e^x}{x^n} = \frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{1}{2x^{n-2}} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}x^1 + \dots$$

Damit wird $\frac{e^x}{x^n}$ beliebig groß für $x \rightarrow \infty$, symbolisch: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$

Der Kehrwert $\frac{x^n}{e^x}$ liegt beliebig nah bei 0 für $x \rightarrow \infty$: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^n e^{-x} = 0$

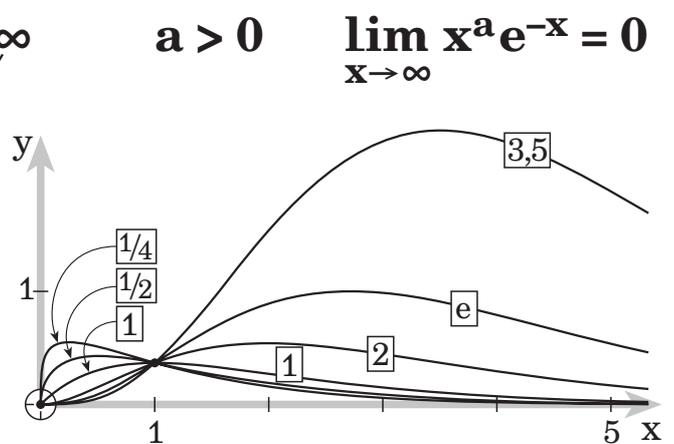
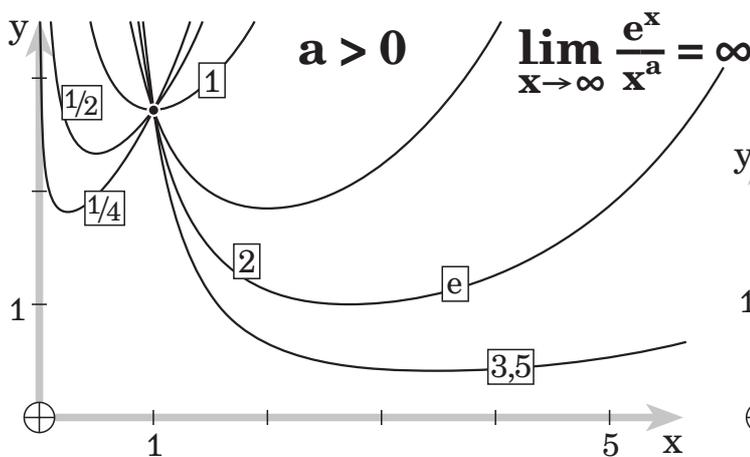
Die e-Funktion wächst also für $x \rightarrow \infty$ viel stärker als jede x-Potenz.

Gleichbedeutend damit ist $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} p_n(x) \cdot e^x = 0$,

wobei $p_n(x)$ ein Polynom vom Grad n ist.

Kurz und einprägsam: » e^x setzt sich gegen $|x|^a$ durch«

| | $\lim_{x \rightarrow \dots} x ^a e^x$ | |
|---------|--|-----------------------------|
| | $x \rightarrow -\infty$ | $x \rightarrow +\infty$ |
| $a > 0$ | 0 | $+\infty$ |
| $a < 0$ | 0 | $+\infty$ |



5. Integration

Eine nützliche Formel

Wegen $(e^{f(x)})' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$ gilt

$$\int f'(x) \cdot e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + C$$

Beispiel: $\int x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int (-2x e^{-x^2}) dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2}$

Ansatz-Methode: Integration von $p_n(x) \cdot e^x$

Ist $p_n(x)$ ein Polynom vom Grad n , dann gilt

$$(p_n(x) \cdot e^x)' = p_n'(x) \cdot e^x + p_n(x) \cdot e^x = (p_n'(x) + p_n(x))e^x = q_n(x) \cdot e^x$$

Leitet man ein Produkt $p_n(x) \cdot e^x$ ab, so ergibt sich ein Produkt $q_n(x) \cdot e^x$, wobei der Polynomfaktor $q_n(x)$ vom selben Grad ist wie $p_n(x)$. Umgekehrt muss eine Stammfunktion F von $f(x) = p_n(x) \cdot e^x$ den Term $r_n(x) \cdot e^x$ haben, wobei $r_n(x)$ wieder ein Polynom vom Grad n ist. Das nutzt man beim Integrieren aus.

Beispiel $\int (x^2 + 1)e^x dx = ?$

Ansatz $\int (x^2 + 1)e^x dx = (ax^2 + bx + c)e^x + C$

Ableiten $(x^2 + 1)e^x = (2ax + b)e^x + (ax^2 + bx + c)e^x$
 $x^2 + 1 = ax^2 + (2a + b)x + b + c$

Vergleich der Koeffizienten

| | |
|-----------------------|--------------|
| Koeffizient bei x^2 | $1 = a$ |
| Koeffizient bei x^1 | $0 = 2a + b$ |
| Koeffizient bei x^0 | $1 = b + c$ |

$\Rightarrow a = 1, b = -2, c = 3$

Ergebnis $\int (x^2 + 1)e^x dx = (x^2 - 2x + 3)e^x + C$

Integration von $(a \sin x + b \cos x) \cdot e^x$

Die »nützliche Formel« und die »Ansatz-Methode« führen auch hier zum Ziel, denn

$$\begin{aligned} ((a \sin x + b \cos x) \cdot e^x)' &= (a \cos x - b \sin x) \cdot e^x + (a \sin x + b \cos x) \cdot e^x \\ &= ((a+b) \cos x + (a-b) \sin x) \cdot e^x \end{aligned}$$

Die Ableitung ist von der selben Bauart wie der Integrand.

Beispiel $\int e^{-x} \sin(2x) dx = ?$

Ansatz $\int e^{-x} \sin(2x) dx = (a \sin(2x) + b \cos(2x))e^{-x} + C$

Ableiten $e^{-x} \sin(2x) = (2a \cos(2x) - 2b \sin(2x))e^{-x} + (a \sin(2x) + b \cos(2x))e^{-x}(-1)$
 $= e^{-x}((2a-b) \cos(2x) + (-2b-a) \sin(2x))$

Vergleich der Koeffizienten

| | |
|----------------------------|---------------|
| Koeffizient bei $\cos(2x)$ | $0 = 2a - b$ |
| Koeffizient bei $\sin(2x)$ | $1 = -2b - a$ |

$\Rightarrow b = -\frac{2}{5}, a = -\frac{1}{5}$

Ergebnis $\int e^{-x} \sin(2x) dx = e^{-x}(-\frac{1}{5} \sin(2x) - \frac{2}{5} \cos(2x)) + C$
 $= -\frac{1}{5} e^{-x}(\sin(2x) + 2 \cos(2x)) + C$

Zum Nachdenken

Ausdrücke mit 0 und ∞

Bei stetigen Funktionen berechnet man Grenzwerte, wenn möglich, durch Einsetzen:

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x} = \frac{0}{e^0} = 0$. Schwieriger wird es, wenn Einsetzen nicht mehr möglich ist: $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow a$, wobei a eine Zahl ist, für die der Term nicht definiert ist: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x}$ oder $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

Formales Einsetzen führt zu Ausdrücken »...«, die zunächst keinen Sinn haben

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = \gg \frac{\infty}{\infty} \ll \quad \text{oder} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \gg \frac{0}{0} \ll.$$

Manchem solcher Ausdrücke mit 0 und ∞ kann man aber einen Sinn geben. Sie heißen

bestimmte Ausdrücke.

Beispiele: $\gg \infty + c \ll = \infty$, $\gg \infty + \infty \ll = \infty$, $\gg \infty \cdot c \ll = \infty \cdot \text{sgn } c$ mit $c \neq 0$,

$$\gg \infty \cdot \infty \ll = \infty, \quad \gg \frac{c}{\infty} \ll = 0, \quad \gg \frac{\infty}{c} \ll = \infty \cdot \text{sgn } c \text{ mit } c \neq 0$$

$$\gg \frac{\infty}{0} \ll = \pm \infty \text{ je nachdem, wie man sich der 0 beim Grenzübergang nähert,}$$

$$\gg \frac{c}{0} \ll = \pm \infty \text{ mit } c \neq 0, \text{ je nachdem, welches Vorzeichen } c \text{ hat und wie man sich der 0 beim Grenzübergang nähert.}$$

Beispiele für Grenzwerte mit bestimmten Ausdrücken:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x + e^x) = \gg \infty + \infty \ll = \infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{-x} = \gg (-\infty) \cdot \infty \ll = -\infty \quad \lim_{x \geq 0} \frac{e^x}{1 - e^x} = \gg \frac{+1}{-0} \ll = -\infty$$

Es gibt aber auch Ausdrücke mit 0 und ∞ , denen man auf den ersten Blick keinen Sinn geben kann. Sie heißen **unbestimmte Ausdrücke**.

$$\text{Beispiele: } \gg \infty - \infty \ll = ?, \quad \gg \infty \cdot 0 \ll = ?, \quad \gg \frac{\infty}{\infty} \ll = ?, \quad \gg \frac{0}{0} \ll = ?, \quad \gg 1^\infty \ll = ?,$$

$$\gg \infty^0 \ll = ?, \quad \gg 0^\infty \ll = ?, \quad \gg 0^0 \ll = ?$$

Anstelle der Fragezeichen ist alles möglich: Der Grenzwert kann unbestimmt sein, er kann gleich irgendeiner Zahl sein, er kann aber auch jede Zahl unter- oder überschreiten, das heißt $-\infty$ oder $+\infty$ sein. Seine Berechnung verlangt jeweils eigene Überlegungen.

Es gibt 3 Verfahren, die oft zum Erfolg führen:

1. Umformen $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{e^{2x} + e^x} - e^x) = \infty - \infty = ?$

$$\sqrt{e^{2x} + e^x} - e^x = \frac{(\sqrt{e^{2x} + e^x} - e^x)(\sqrt{e^{2x} + e^x} + e^x)}{\sqrt{e^{2x} + e^x} + e^x} = \frac{e^{2x} + e^x - e^{2x}}{\sqrt{e^{2x} + e^x} + e^x}$$

$$= \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x} + e^x} + e^x} = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{-x}} + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{e^{2x} + e^x} - e^x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + e^{-x}} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 + 0} + 1} = \frac{1}{2}$$

2. Substituieren $\lim_{x \geq 0} x e^{1/x} = \infty \cdot 0 = ?$

Substitution: $u := \frac{1}{x}; \quad x \geq 0 \Leftrightarrow u \rightarrow \infty$

$$\lim_{x \geq 0} x e^{1/x} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{u} e^u = \infty \quad (\text{siehe vorige Seite})$$

3. Regeln von DE L'HOSPITAL

Der französische Mathematiker Guillaume François Antoine de L'HOSPITAL (1661–1704) hat 1696 in seinem Lehrbuch der Differenzialrechnung Regeln formuliert, mit denen man oft Grenzwerte des Typs $\frac{0}{0}$ und $\frac{\infty}{\infty}$ findet.

Führt Einsetzen bei den Grenzwerten $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ zu den unbestimmten Ausdrücken $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$, dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Voraussetzung ist allerdings, dass jeweils der rechte Grenzwert existiert.

Wir beweisen nur den einfachsten Fall $f(a)=g(a)=0$, also $\frac{0}{0}$ für $x \rightarrow a$.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - 0}{g(x) - 0} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Beispiele: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{0}{0}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sqrt{e^x} - 1} = \frac{0}{0} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sqrt{e^x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{\frac{e^x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} 2\sqrt{e^x} = 2$$

Manchmal muss man die Regel mehrmals anwenden

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n x^{n-1}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \dots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n!}{e^x} = \frac{n!}{\infty} = 0$$

oder den Funktionsterm erst in einen Bruch umformen

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = \infty \cdot 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^x = 0$$

Aufgaben

◇1 $f(x) = e^x$, $g(x) = 1 + x$

a) Berechne $f(x)$ und $g(x)$ für $x \in \{0; \pm 1; \pm 0,5; \pm 0,1; \pm 0,01\}$.

b) Der **relative Fehler** φ ist der Betrag des Quotienten von der Differenz der Werte und dem wahren Wert: $\left| \frac{f(x) - g(x)}{f(x)} \right| =: \varphi(x)$
Berechne $\varphi(x)$ für $x \in \{0; \pm 1; \pm 0,1; \pm 0,01; \pm 0,01\}$ und skizziere G_φ .

2 $f(x) = e^x$, $g(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$

Berechne $f(x)$, $g(x)$ und $\varphi(x)$ für $x \in \{0; \pm 1; \pm 0,5; \pm 0,1; \pm 0,01\}$ und skizziere G_φ . ($\varphi(x)$ ist in Aufgabe 1 erklärt.)

◇3 $d(x) = e^x - (1 + x)$

a) Untersuche die Monotonie von d und zeige: $e^x \geq 1 + x$

b) Zeige damit, dass für $x < 1$ gilt: $1 + x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x}$
(Ersetze x durch $-x$ und denke nach.)

◇4 Annäherungsversuche

$$f(x) = xe^x, \quad g(x) = ax^2 + bx + c$$

Bestimme a , b und c so, dass gilt:

$$f(x_0) = g(x_0), \quad f'(x_0) = g'(x_0) \quad \text{und} \quad f''(x_0) = g''(x_0),$$

falls **a)** $x_0 = 0$ **b)** $x_0 = 1$

und skizziere die Graphen.

•5 Annäherungsversuche

$$f(x) = e^{-x^2}, \quad g(x) = ax^2 + bx + c$$

Bestimme a , b und c so, dass gilt:

$$f(x_0) = g(x_0), \quad f'(x_0) = g'(x_0) \quad \text{und} \quad f''(x_0) = g''(x_0),$$

falls **a)** $x_0 = 0$ **b)** $x_0 = 1$

und skizziere die Graphen.

6 $e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots + \frac{1}{n!}x^n$

Bestimme mit dem Taschenrechner Näherungswerte für

a) e für $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ **b)** $\frac{1}{e}$ für $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ **c)** \sqrt{e} für $n \in \{1, 2, 3, 4\}$

◇7 Berechne

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x}$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{e^x}}{x}$ c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{e^x}}{x}$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x$ e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{e^x + e}}{e^x}$ f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{(e^x - 1)(e^{x-2} - 1)}$

g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

•8 Berechne, soweit möglich die Grenzwerte von $e^{1/x}$ für

a) $x \rightarrow \infty$ b) $x \rightarrow -\infty$ c) $x \gtrsim 0$ d) $x \lesssim 0$

•9 Berechne, soweit möglich die Grenzwerte von $\frac{1}{1 - e^{1/x}}$ für

a) $x \rightarrow \infty$ b) $x \rightarrow -\infty$ c) $x \gtrsim 0$ d) $x \lesssim 0$

•10 Berechne – soweit möglich – die Grenzwerte von $e^{ax} - a e^x$ für $x \rightarrow \infty$ und $x \rightarrow -\infty$. (Fallunterscheidungen für a!)

•11 Berechne und achte auf die Fallunterscheidungen für a.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^{ax}}$, $n \in \mathbb{N}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{a/x^2}}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}$ c) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{e^x - e^a}{x - a}$

◇12 Berechne

a) $\int_0^1 e^x dx$ b) $\int_0^1 x^2 e^x dx$ c) $\int_0^1 x e^{x+2} dx$

d) $\int_{-1}^2 (x-1)e^x dx$ e) $\int_0^3 (x^2+1)(e^x+1) dx$

•13 Berechne

a) $\int_0^1 e^{-x} dx$ (Suche eine Stammfunktion durch Probieren!)

b) $\int_{-1}^0 x e^{-x} dx$

•14 Berechne

a) $\int_0^{0,5} 2e^{2x} dx$ (Suche eine Stammfunktion durch Probieren!)

b) $\int_0^1 4x^2 e^{2x} dx$

6. Kurvendiskussion

Diskussion einer Kurve

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{2}xe^{2/x}$

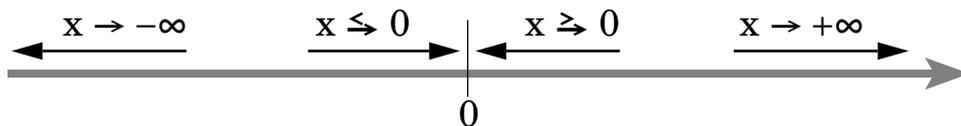
Maximale Definitionsmenge $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Symmetrie zum Koordinatensystem

$$f(-x) = -\frac{1}{2}xe^{-2/x} \neq \begin{cases} f(x), & \text{also keine Symmetrie zur } y\text{-Achse} \\ -f(x), & \text{also keine Symmetrie zum Ursprung} \end{cases}$$

Verhalten am Rand von D

Für den Rand kommen allgemein infrage: $-\infty, +\infty$, Definitionslücken.
Das Verhalten von $f(x)$ am Rand von D findet man mit der Grenzwert-Rechnung. Hier im Beispiel sind das die 4 Grenzwerte für:



In den folgenden Grenzwert-Rechnungen ist $\frac{2}{x}$ substituiert durch u .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2}xe^{2/x} \right) = \gg -\infty \cdot e^0 \ll = \lim_{u \leq 0} \left(\frac{1}{u}e^u \right) = \gg -\infty \cdot 1 \ll = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}xe^{2/x} \right) = \gg +\infty \cdot e^0 \ll = \lim_{u \geq 0} \left(\frac{1}{u}e^u \right) = \gg +\infty \cdot 1 \ll = +\infty$$

$$\lim_{x \leq 0} \left(\frac{1}{2}xe^{2/x} \right) = \gg 0 \cdot e^{-\infty} \ll = \gg 0 \cdot 0 \ll = 0$$

$$\lim_{x \geq 0} \left(\frac{1}{2}xe^{2/x} \right) = \gg 0 \cdot e^{\infty} \ll = \gg 0 \cdot \infty \ll = \lim_{u \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{u}e^u \right) = +\infty$$

Die y -Achse ist also Asymptote für $x \geq 0$.

Schiefe Asymptote

Die Kurve hat auch die schiefe Asymptote $a: y = \frac{1}{2}x + 1$. Wie man ihre Gleichung findet, steht im übernächsten Kapitel »Rationale Funktion«. Wir zeigen hier bloß, dass a tatsächlich Asymptote ist. Der Unterschied der Ordinaten von Kurve und Asymptote muss für $x \rightarrow \pm\infty$ gegen 0 gehen:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2}xe^{2/x} - \left(\frac{1}{2}x + 1 \right) \right) = \lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{1}{u}e^u - \frac{1}{u} - 1 \right) = \lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{e^u - 1}{u} - 1 \right) = \ln e - 1 = 0 \quad \text{q.e.d.}$$

Nullstellen

$$\frac{1}{2}xe^{2/x} = 0$$

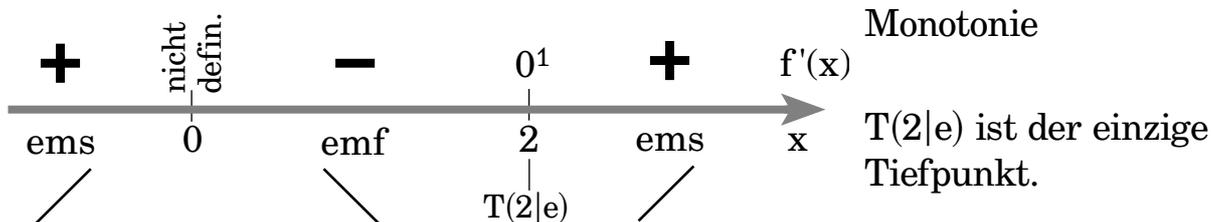
Die Faktoren $\frac{1}{2}x$ und $e^{2/x}$ sind ungleich 0 für $x \neq 0$.

G_f hat also keine Nullstelle.

Waagrechtpunkte

$$f'(x) = \frac{1}{2}(e^{2/x} + xe^{2/x} \cdot (-\frac{2}{x^2})) = \frac{1}{2}e^{2/x}(1 - \frac{2}{x}) = \frac{1}{2}e^{2/x} \cdot \frac{x-2}{x} = \frac{x-2}{2x}e^{2/x}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x=2, f(2)=e \quad \text{Waagrechtpunkt } (2|e)$$



G_f steigt echt monoton in $]-\infty; 0[$ und in $[2; +\infty[$.

G_f fällt echt monoton in $]0; 2]$.

Wie mündet G_f in $(0|0)$?

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x-2}{2x} e^{2/x} \right) = \gg +\infty \cdot 0 \ll \quad \text{Substitution: } \frac{2}{x} = -u \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} \left(\frac{1+u}{2} e^{-u} \right) = \frac{1}{2} \lim_{u \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{e^u} + \frac{u}{e^u} \right) = \frac{1}{2}(0 + 0) = 0 \end{aligned}$$

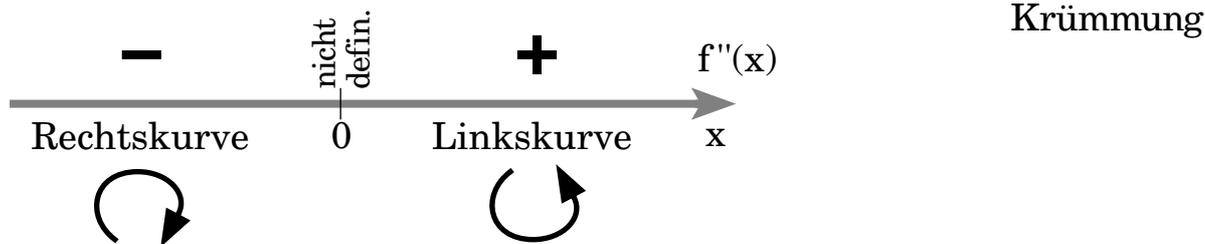
G_f mündet von links kommend mit waagrechter Tangente in $(0|0)$. Von rechts kommend hat G_f die y-Achse als Asymptote, mündet also nirgends.

Flachpunkte

$$f''(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{x-(x-2)}{x^2} e^{2/x} + \frac{x-2}{x} e^{2/x} \left(-\frac{2}{x^2} \right) \right) = \frac{1}{2x^2} e^{2/x} (2 - 2 \cdot \frac{x-2}{x})$$

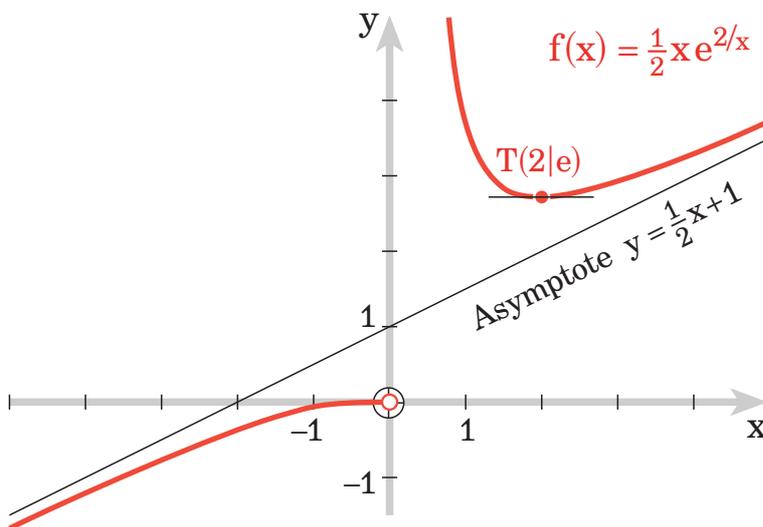
$$f''(x) = \frac{1}{x^3} e^{2/x} (x - (x-2)) = \frac{2}{x^3} e^{2/x}$$

Wegen $f''(x) \neq 0$ hat G_f keinen Flachpunkt.



Aus dem Graphen liest man die Wertemenge ab:

$$W =]-\infty; 0[\cup [e; +\infty[.$$



Diskussion einer Schar

Beispiel: $f_a(x) = \sqrt{e}(a-2x)e^{-x/a}$, $a \neq 0$

Maximale Definitionsmenge $D = \mathbb{R}$

Symmetrie zum Koordinatensystem

$$f_a(-x) = \sqrt{e}(a+2x)e^{x/a} \neq \begin{cases} f_a(x), \text{ also keine Symmetrie zur } y\text{-Achse} \\ -f_a(x), \text{ also keine Symmetrie zum Ursprung} \end{cases}$$

Symmetrie der Scharkurven zueinander

- Kurven G_{f_a} und G_{f_b} sind zueinander symmetrisch bezüglich des Ursprungs, wenn gilt: $f_a(-x) = -f_b(x)$
hier also $\sqrt{e}(a+2x)e^{x/a} = -\sqrt{e}(b-2x)e^{-x/b}$
Wegen der Exponenten müsste sein $b=-a$, und für **alle** x müsste gelten $a+2x = -(-a-2x) \Rightarrow a+2x = a+2x$. Diese Gleichung stimmt für alle x , also sind G_{f_a} und $G_{f_{-a}}$ zueinander symmetrisch bezüglich O.
- Kurven G_{f_a} und G_{f_b} sind zueinander symmetrisch bezüglich der y -Achse, wenn gilt: $f_a(-x) = f_b(x)$
hier also $\sqrt{e}(a+2x)e^{x/a} = \sqrt{e}(b-2x)e^{-x/b}$
Wegen der Exponenten müsste sein $b=-a$, und für **alle** x müsste gelten $a+2x = -a-2x$, aber das ist nur der Fall für $a=-2x$.
Es gibt also keine 2 Kurven, die zueinander symmetrisch sind bezüglich der y -Achse.

Wegen der Punktsymmetrie behandeln wir nur Scharkurven mit $a > 0$.

Verhalten am Rand von D

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_a(x) = \sqrt{e} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a-2x}{e^{x/a}} = 0$$

Die positive x -Achse ist Asymptote für $x \rightarrow +\infty$, falls $a > 0$. Wegen Punktsymmetrie ist die negative x -Achse Asymptote für $x \rightarrow -\infty$, falls $a < 0$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_a(x) = \sqrt{e} \lim_{x \rightarrow -\infty} (a-2x)e^{-x/a} = \gg \infty \cdot \infty \ll = \infty$$

Wegen Punktsymmetrie ist $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_a(x) = -\infty$ für $a < 0$.

Nullstellen

$$\sqrt{e}(a-2x)e^{-x/a} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}a$$

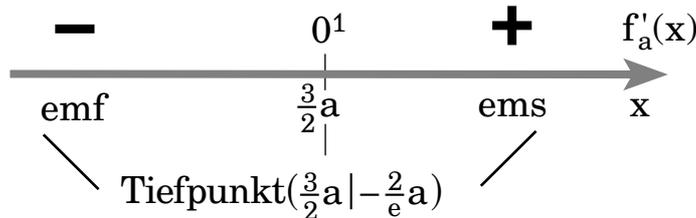
Waagrechtunkte

$$f'_a(x) = \sqrt{e}(-2)e^{-x/a} + \sqrt{e}(a-2x)e^{-x/a}\left(-\frac{1}{a}\right) = \sqrt{e} e^{-x/a}\left((-2) - \frac{1}{a}(a-2x)\right)$$

$$= \sqrt{e} e^{-x/a}\left(\frac{2x}{a} - 3\right) = \sqrt{e} \left(\frac{2x-3a}{a}\right) e^{-x/a}$$

$$f'_a(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}a, y = f_a\left(\frac{3}{2}a\right) = \sqrt{e}(-2a) e^{-3/2} = -\frac{2}{e}a$$

$$\text{Waagrechtunkt } \left(\frac{3}{2}a \mid -\frac{2}{e}a\right)$$



Monotonie

Wegen Punktsymmetrie ist $\left(\frac{3}{2}a \mid -\frac{2}{e}a\right)$ Hochpunkt für $a < 0$.

Ortlinie der Waagrechtunkte: a eliminieren in $\left(\frac{3}{2}a \mid -\frac{2}{e}a\right)$

$$x = \frac{3}{2}a \Rightarrow a = \frac{2}{3}x \text{ eingesetzt in } y = -\frac{2}{e}a \text{ ergibt } y = -\frac{2}{e} \cdot \frac{2}{3}x = -\frac{4}{3e}x.$$

Wegen $a \neq 0$ ist auch $x \neq 0$.

$$\text{Ortlinie } G_{\text{wap}} \text{ mit } \text{wap}(x) = -\frac{4}{3e}x, x \neq 0$$

$$\text{Ortlinie } G_{\text{tip}} \text{ mit } \text{tip}(x) = -\frac{4}{3e}x, x > 0$$

$$\text{Ortlinie } G_{\text{hop}} \text{ mit } \text{hop}(x) = -\frac{4}{3e}x, x < 0$$

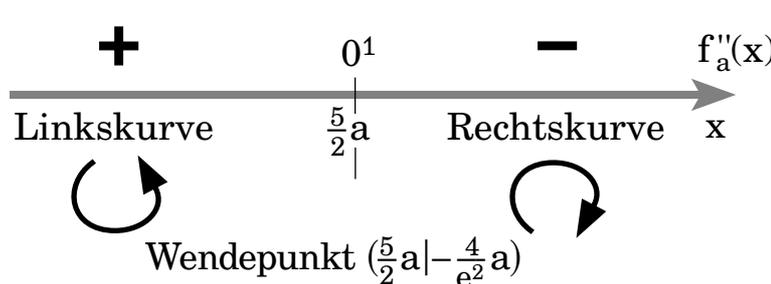
Flachpunkte

$$f''_a(x) = \sqrt{e} \frac{2}{a} e^{-x/a} + \sqrt{e} \frac{2x-3a}{a} e^{-x/a} \left(-\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a} \sqrt{e} e^{-x/a} \left(2 - \frac{2x-3a}{a}\right)$$

$$= \sqrt{e} \frac{5a-2x}{a^2} e^{-x/a}$$

$$f''_a(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2}a, y = f_a\left(\frac{5}{2}a\right) = \sqrt{e}(-4a) e^{-5/2} = -\frac{4}{e^2}a$$

$$\text{Flachpunkt } \left(\frac{5}{2}a \mid -\frac{4}{e^2}a\right)$$



Krümmung

Wegen Punktsymmetrie ändert sich für $a < 0$ die Krümmung nicht.

Ortlinie der Wendepunkte: a eliminieren in $\left(\frac{5}{2}a \mid -\frac{4}{e^2}a\right)$

$$x = \frac{5}{2}a \Rightarrow a = \frac{2}{5}x \text{ eingesetzt in } y = -\frac{4}{e^2}a \text{ ergibt } y = -\frac{4}{e^2} \cdot \frac{2}{5}x = -\frac{8}{5e^2}x.$$

Wegen $a \neq 0$ ist auch $x \neq 0$.

$$\text{Ortlinie } G_{\text{wep}} \text{ mit } \text{wep}(x) = -\frac{8}{5e^2}x, x \neq 0$$

Nachweis von Berührkurven

Die Scharkurven haben 2 gemeinsame Tangenten mit

$$t_1(x) = -4ex \quad \text{und} \quad t_2(x) = -\frac{1}{\sqrt{e}}x.$$

Wie man ihre Gleichungen findet, steht im »Nachdenken«. Wir zeigen hier bloß, dass sie tatsächlich gemeinsame Tangenten sind, das heißt: Im Schnittpunkt müssen die Steigungen von Kurve und Tangente gleich sein.

Für Tangente 1 gilt dann:

$$\text{Schnittpunkt:} \quad t_1(x) = f_a(x), \quad \text{also} \quad -4ex = \sqrt{e}(a-2x)e^{-x/a} \quad \text{I}$$

$$\text{gleiche Steigungen:} \quad t'_1(x) = f'_a(x), \quad \text{also} \quad -4e = \sqrt{e} \left(\frac{2x-3a}{a} \right) e^{-x/a} \quad \text{II}$$

Keine der beiden Gleichungen lässt sich nach x auflösen; schuld daran ist der Faktor $e^{-x/a}$. Wir werden ihn los, indem wir II mit x multiplizieren und die rechten Seiten gleichsetzen:

$$\sqrt{e}(a-2x)e^{-x/a} = x\sqrt{e} \left(\frac{2x-3a}{a} \right) e^{-x/a} \quad || : \sqrt{e} \quad || : e^{-x/a}$$

$$a(a-2x) = 2x^2 - 3ax \Rightarrow 2x^2 - ax - a^2 = 0$$

$$\Rightarrow (2x+a)(x-a) = 0$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{2}a \quad \text{oder} \quad x = a$$

$$\text{Probe: } x = -\frac{1}{2}a \text{ einsetzen in I liefert} \quad -4e\left(-\frac{1}{2}a\right) = \sqrt{e}(a+a) e^{1/2}$$

$$2ea = 2ea, \quad \text{stimmt für alle } a.$$

$$x = -\frac{1}{2}a \text{ einsetzen in II liefert} \quad -4e = \sqrt{e} \left(\frac{-4a}{a} \right) e^{1/2}$$

$$-4e = -4e, \quad \text{stimmt für alle } a.$$

G_{t_1} berührt jede Scharkurve G_{f_a} in $(-\frac{1}{2}a | 2ea)$.

$$\text{Probe: } x = a \text{ einsetzen in I liefert} \quad -4ea = \sqrt{e}(a-2a)e^{-1}$$

$$-4ea = -ae^{-1/2}, \quad \text{stimmt nur für } a=0.$$

$x = a$ ist nicht brauchbar, denn $t_1(a) = f_a(a)$ stimmt nur für $a=0$,

und für diesen Wert ist die Schar obendrein nicht definiert.

Für Tangente 2 gilt:

$$\text{Schnittpunkt:} \quad t_2(x) = f_a(x), \quad \text{also} \quad -\frac{1}{\sqrt{e}}x = \sqrt{e}(a-2x)e^{-x/a} \quad \text{III}$$

$$\text{gleiche Steigungen:} \quad t'_2(x) = f'_a(x), \quad \text{also} \quad -\frac{1}{\sqrt{e}} = \sqrt{e} \left(\frac{2x-3a}{a} \right) e^{-x/a} \quad \text{IV}$$

IV mit x multiplizieren und die rechten Seiten gleichsetzen ergibt wie oben $x = -\frac{1}{2}a$ oder $x = a$

Probe: $x = -\frac{1}{2}a$ einsetzen in III $-\frac{1}{\sqrt{e}}(-\frac{1}{2}a) = \sqrt{e}(a+a)e^{1/2}$

$\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{e}} a = 2ea$, stimmt für $a=0$, also nie.

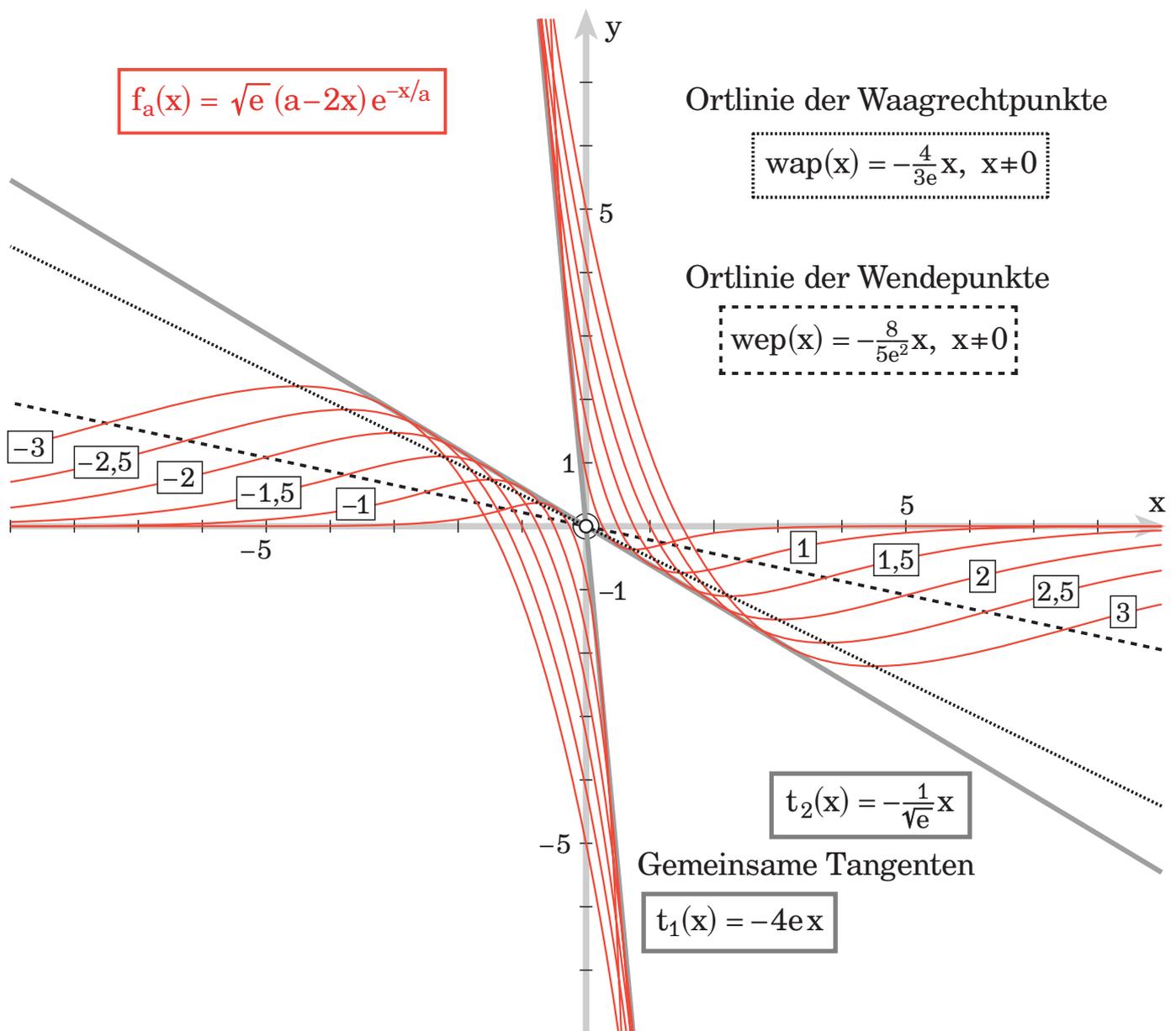
$x = -\frac{1}{2}a$ ist nicht brauchbar.

$x = a$ einsetzen in III $-\frac{1}{\sqrt{e}}a = \sqrt{e}(a-2a)e^{-a/a}$

$-\frac{1}{\sqrt{e}}a = \sqrt{e}(-a)e^{-1}$, stimmt für **alle** a .

$x = a$ einsetzen in IV $-\frac{1}{\sqrt{e}} = \sqrt{e}(\frac{-a}{a})e^{-1}$, stimmt für **alle** a .

G_{t_2} berührt jede Scharkurve G_{f_a} in $(a | -\frac{1}{\sqrt{e}}a)$.



Zum Nachdenken

① Hüllkurve

Aus dem 1. Band ist uns ein Verfahren bekannt, wie man die Hüllkurve einer Schar findet. Man eliminiert den Parameter aus:

$$\text{I } y = f_a(x)$$

$$\text{II } \frac{d}{da} f_a(x) = 0$$

Im vorigen Beispiel gilt dann:

$$\text{I } y = \sqrt{e}(a-2x)e^{-x/a}$$

$$\text{II } \frac{d}{da} f_a(x) = \frac{\sqrt{e}}{a^2} e^{-x/a} (a-x)(a+2x) = 0 \Rightarrow a = x \text{ oder } a = -2x$$

$$a=x \text{ eingesetzt in I ergibt: } y = \sqrt{e}(x-2x)e^{-x/x} = -\frac{1}{\sqrt{e}}x, \quad x \neq 0$$

$$a=-2x \text{ eingesetzt in I ergibt: } y = \sqrt{e}(-2x-2x)e^{-x/-2x} = -4ex, \quad x \neq 0$$

Im Beispiel haben wir gezeigt, dass diese beiden Hüllkurven sogar gemeinsame Tangenten aller Scharkurven sind. Wegen $x \neq 0$ ist der Ursprung kein Berührungspunkt.

② Hyperbolische Funktionen

Für die e-Funktion $y=e^x$ gilt $y'=y$. Eine Gleichung wie $y'=y$ heißt **Differenzialgleichung**; das ist eine Gleichung für eine gesuchte Funktion y und ihre Ableitungen y', y'', \dots . Die Differenzialgleichung $y'=y$ hat die Lösung $y=a \cdot e^x$. (Im nächsten Kapitel zeigen wir, dass jede Lösung diese Form hat.) Die Differenzialgleichung $y'=y$ ist also kennzeichnend für die e-Funktion.

Für Sinus und Kosinus gibt es auch eine kennzeichnende Differenzialgleichung $y''=-y$, denn

$$(\sin x)' = \cos x \quad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\sin x)'' = -\sin x \quad (\cos x)'' = -\cos x$$

Die allgemeine Lösung von $y''=-y$ heißt $y = a \cdot \sin x + b \cdot \cos x$.

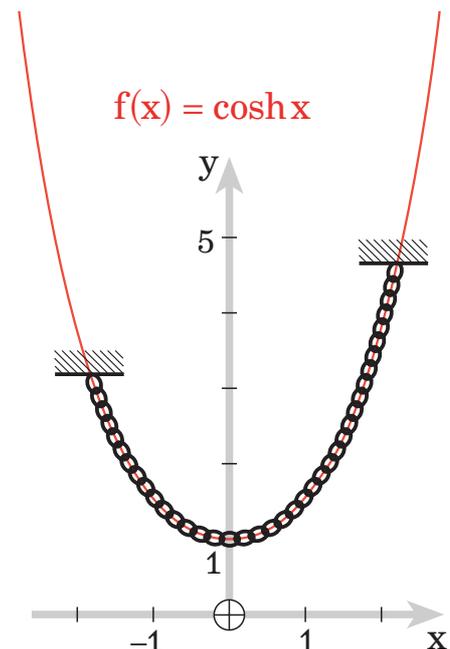
Welche Funktionen haben $y''=y$ als kennzeichnende Differenzialgleichung? Eine Lösung ist wieder $y=a \cdot e^x$. Jetzt gibt es aber auch die Lösung $y=b \cdot e^{-x}$ und damit die allgemeine Lösung $y = a \cdot e^x + b \cdot e^{-x}$.

Für $a=b=\frac{1}{2}$ ergibt sich ein wichtiger Sonderfall: der **hyperbolische Kosinus** $y = \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.

Sein Graph ist die **Kettenlinie**, das ist die Form einer Kette, die an ihren Enden aufgehängt ist.

\cosh stimmt überein mit \cos

- in der Symmetrie zur y-Achse,
- bis aufs Vorzeichen in der kennzeichnenden Differenzialgleichung $y''=y$.



Für den trigonometrischen Kosinus gilt $(\cos x)' = -\sin x$,
für den hyperbolischen Kosinus gilt $(\cosh x)' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

In Anlehnung an die Trigonometrie definiert man den

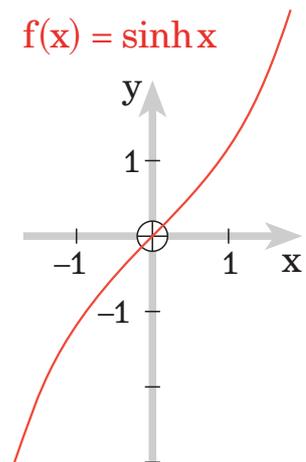
hyperbolischen Sinus $y = \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

Es gilt $(\cosh x)' = \sinh x$ und $(\sinh x)' = \cosh x$.

\sinh stimmt überein mit \sin

- in der Symmetrie zum Ursprung,
- bis aufs Vorzeichen in der kennzeichnenden

Differenzialgleichung $y'' = y$.



Die Ähnlichkeiten der trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen zeigen sich auch in deren Reihenentwicklung: Aus $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots$ ergibt sich:

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots$$

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots$$

Andrerseits lässt sich zeigen:

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \dots + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots + \dots$$

Wegen dieser Beziehungen verwendet man die Bezeichnungen \sin und \cos auch bei hyperbolischen Funktionen.

Der Zusatz hyperbolisch ist erklärt in der Aufgabe 22 im nächsten Kapitel.

Aufgaben

- 1 Bestimme: maximale Definitionsmenge D ,
Symmetrie zum Koordinatensystem,
Verhalten am Rand von D ,
Achsen-, Extrem- und Wendepunkte,
Graph und Wertemenge.

◇ a) $x + e^{-x}$

b) e^{-x^2}

◇ c) $x^2 e^{-x}$

◇ d) $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

e) $\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

• f) $e^{1/x}$

2 $f(x) = e^{\sqrt{x}}$, $g(x) = \frac{1}{f(x)}$

Diskutiere f und g und zeichne die Schaubilder. Wie ändern sich Extrem- und Wendepunkt, wenn man von $f(x)$ übergeht zu $\frac{1}{f(x)}$?

•3 $f(x) = x e^x$, $g(x) = x e^{-x}$

a) Diskutiere f und zeichne G_f .

b) Zeige: $f(x) + g(-x) = 0$. Was bedeutet das für G_f und G_g ? Zeichne G_g .

- c) Vergleiche $f'(x)$, $f''(x)$ und $f'''(x)$ und gib $f^{(100)}(x)$ an.
Bestimme analog $g^{(100)}(x)$ und $g^{(101)}(x)$.
- d) Wie sieht aufgrund von c) vermutlich eine Stammfunktion F von f und G von g aus? Überprüfe die Vermutungen durch Rechnung.
- 4 $f(x) = e^{-x}$
- a) $B(b|f(b))$ im 1. Quadranten und der Ursprung sind die gegenüber liegenden Ecken eines Rechtecks, von dem 2 Seiten in den Koordinatenachsen liegen.
Bestimme b so, dass das Rechteck möglichst großen Inhalt hat.
Wie groß ist dann der Inhalt der Fläche zwischen G_f und der oberen Rechteckseite?
- b) Die Tangente t in einem Kurvenpunkt C im 1. Quadranten und die Koordinatenachsen begrenzen ein Dreieck.
Bestimme C so, dass der Inhalt dieses Dreiecks ein Extremum hat.
- 5 Ein Punkt A der e -Kurve und der Ursprung O legen die Gerade OA fest.
Bestimme A so, dass der Winkel zwischen OA und der positiven x -Achse möglichst klein ist. Wie groß ist dieser Winkel?
- 6 $f(x) = e^{-x^2}$
- a) Ein Kurvenpunkt S von G_f ist die Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks; von den restlichen Eckpunkten liegt der eine im Ursprung, der andere auf der x -Achse.
Bestimme S so, dass das Dreieck möglichst großen Inhalt hat.
- b) Bestimme den Punkt T auf G_f im 1. Quadranten, der dem Ursprung am nächsten liegt.
- c) Bestimme den Radius eines Kreises um den Ursprung, der G_f berührt.
- 7 $f_a(x) = \frac{1}{2}a(e^{x/a} + e^{-x/a})$, $a > 0$
- a) Bestimme den Tiefpunkt T und skizziere G_{f_1} .
- b) $P(p|f_a(p))$ liegt auf einer Scharkeurve.
Der Kreis um T mit Radius $f_a(p)$ schneide die x -Achse in S .
Berechne die Länge von $[OS]$.
- c) Zeige: Die Senkrechte zur Gerade TS durch P ist die Tangente in P .
- d) Zeige: Das Flächenstück, das begrenzt ist von G_f , der Gerade $x=p$ und den Koordinatenachsen, hat den selben Inhalt wie das Rechteck mit den Seiten $[OT]$ und $[OS]$.

Bestimme für die Scharen in den folgenden Aufgaben:

maximale Definitionsmenge D_a ,
 Symmetrie zum Koordinatensystem,
 Verhalten am Rand von D_a ,
 Achsen- und Extrempunkte (Art), Wendepunkte,
 Ortlinien von Waagrecht- und Flachpunkten,
 Graphen und Wertemenge.

•8 $f_a(x) = (a + 2x)e^{-x/a}$

Je 2 Scharkurven sind zueinander symmetrisch bezüglich des Koordinatensystems. Welche Beziehung erfüllen die zugehörigen Parameter?
 Berechne den Inhalt des endlichen Flächenstücks, das begrenzt ist von G_{f_1} und den Koordinatenachsen.

•9 $f_a(x) = \frac{1}{a} e^{-0,5x^2 + ax}$

Je 2 Scharkurven sind zueinander symmetrisch bezüglich des Koordinatensystems. Welche Beziehung erfüllen die zugehörigen Parameter?
 Bestimme die Hüllkurve.

•10 $f_a(x) = (e^x - a)^2$

Berechne den Schnittpunkt von Scharkurve und zugehöriger Asymptote.

Zeige, dass sich je 2 Scharkurven in genau einem Punkt schneiden;
 wann liegt dieser auf der y-Achse?

Eine Scharkurve mit $a > 0$, ihre Asymptote und die Gerade $x = u$ ($u < 0$) begrenzen eine Fläche. Berechne ihren Inhalt. Was ergibt sich für $u \rightarrow -\infty$?

•11 $f_a(x) = \frac{a}{1 + a e^x}$

•12 $f_a(x) = \frac{4e^x}{a + e^{2x}}$

Für welche Parameterwerte liegen Waagrecht- oder Flachpunkte auf der y-Achse?

•13 $g_a(x) = x^a \cdot e^{-x}$, $a > 0$, $x \geq 0$

Alle Scharkurven treffen sich in 2 Punkten, bestimme diese.

•14 $f_a(x) = x^{-a} \cdot e^x$, $a > 0$, $x > 0$ (Vergleiche vorige Aufgabe.)

Alle Scharkurven treffen sich in einem Punkt, bestimme diesen.

$$\bullet 15 \quad f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Untersuche f auf Differenzierbarkeit in $x=0$. Diskutiere f und zeichne G_f .

$$\bullet 16 \quad f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Zeige: f ist in $x=0$ beliebig oft differenzierbar,
und jede Ableitung hat dort den Wert 0. (Super-Flachpunkt!)

Diskutiere f und zeichne G_f .

$$17 \quad f(x) = \begin{cases} xe^x & \text{für } x \leq 0 \\ x^3 - 3x & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

Untersuche, ob f an der Nahtstelle differenzierbar ist.

$$\bullet 18 \quad f(x) = \begin{cases} x^2 e^x & \text{für } x \leq k \\ 3e^x + a & \text{für } x > k \end{cases}$$

Bestimme a und k so, dass f an der Nahtstelle differenzierbar ist.
Zeichne die Graphen.

$$\bullet 19 \quad f_a(x) = a|x| - e^{-x}$$

a) Untersuche f auf Differenzierbarkeit.

b) Bestimme den Tangens des Knickwinkels.

c) Welche Kurven haben einen Knickwinkel von 90° ?
Zeichne eine der Kurven.

$$\bullet 20 \quad \text{a) } f_a(x) = x^2 e^{-(x-a)}$$

$$\text{b) } g_a(x) = x^2 e^{-|x-a|}, \quad a \geq 0$$

In welchen Stellen ist g_a nicht differenzierbar?

Bestimme die Ortslinie der Knickpunkte und die der Hochpunkte.

$$\text{c) } h_a(x) = x^2 e^{-|x-a|}, \quad a \in \mathbb{R}$$

Welcher Zusammenhang besteht zwischen den neuen Scharkurven
und denen aus **b)**?

7. Anwendungen

Wie keine andere Funktion beschreibt die Exponentialfunktion viele Vorgänge in der Natur — Vorgänge, bei denen eine Größe immer mehr zunimmt, man spricht dann von »exponentiellem Wachstum«, oder immer mehr abnimmt.

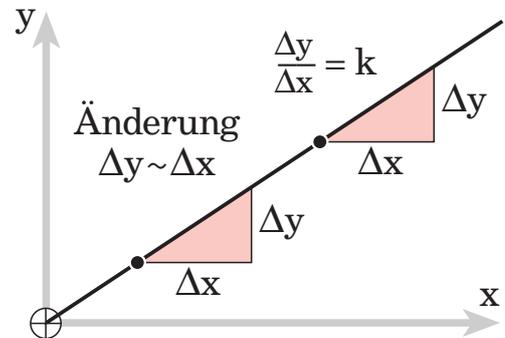
Physikalische Größen können auf mehrere Arten zunehmen:

– Lineare Zunahme

$$f(x) = k \cdot x, \quad k \text{ ist konstant, } k > 0$$

$$f'(x) = k$$

Die Änderungsrate $f'(x)$ ist konstant, der Graph ist eine Gerade durch den Ursprung.



Beispiele: Kraft – Dehnung

$$F = D \cdot s$$

F Kraft $\hat{=}$ y
 D Federhärte $\hat{=}$ k
 s Federdehnung $\hat{=}$ x

Kraft – Beschleunigung

$$F = m \cdot a$$

F Kraft $\hat{=}$ y
 m Masse $\hat{=}$ k
 a Beschleunigung $\hat{=}$ x

Kraft – Masse

$$F = a \cdot m$$

F Kraft $\hat{=}$ y
 a Beschleunigung $\hat{=}$ k
 m Masse $\hat{=}$ x

Spannung – Strom

$$U = R \cdot I$$

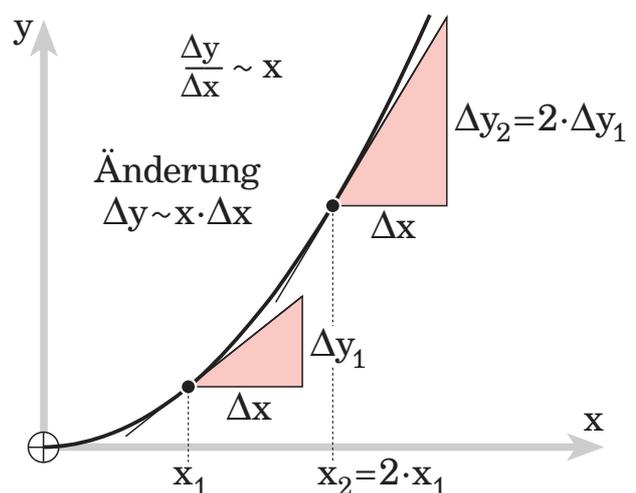
U Spannung $\hat{=}$ y
 R Widerstand $\hat{=}$ k
 I Stromstärke $\hat{=}$ x

– Quadratische Zunahme

$$f(x) = k \cdot x^2, \quad k \text{ ist konstant, } k > 0$$

$$f'(x) = 2k \cdot x$$

Die Änderungsrate $f'(x)$ ist proportional zur unabhängigen Variable x.



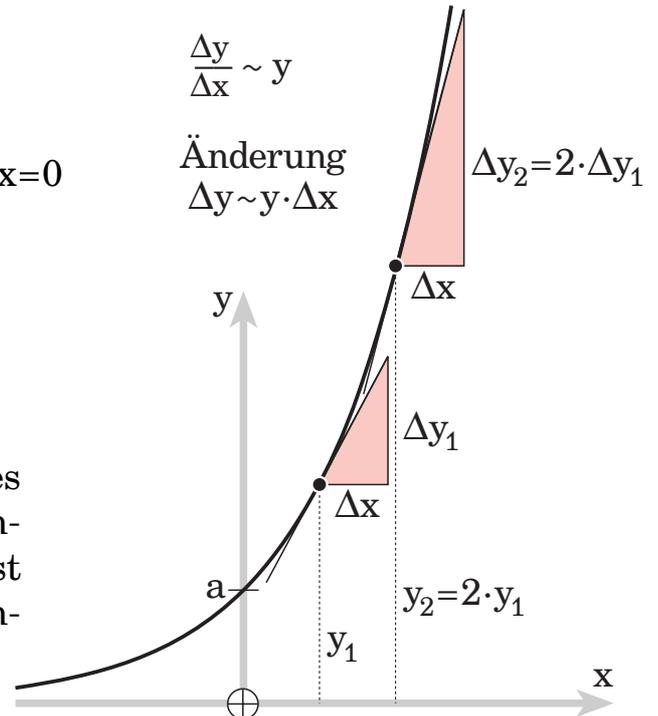
| | | | |
|------------------------------|-------------------------------|--------------------------------|--|
| Beispiele: Energie – Dehnung | $E = \frac{1}{2} D \cdot s^2$ | E Spannenergie $\hat{=} y$ | |
| | | D Federhärte $\hat{=} 2k$ | |
| | | s Federdehnung $\hat{=} x$ | |
| Energie – Geschwindigkeit | $E = \frac{1}{2} m \cdot v^2$ | E Bewegungsenergie $\hat{=} y$ | |
| | | m Masse $\hat{=} 2k$ | |
| | | v Geschwindigkeit $\hat{=} x$ | |
| Weg – Zeit | $s = \frac{1}{2} a \cdot t^2$ | s Weg $\hat{=} y$ | |
| | | a Beschleunigung $\hat{=} 2k$ | |
| | | t Zeit $\hat{=} x$ | |

– **Exponentielles Wachstum**

$f(x) = a \cdot e^{k \cdot x}$, a ist der Anfangsbestand,
 das heißt, der Bestand für $x=0$
 k ist konstant, $k > 0$.

$f'(x) = k \cdot a e^{k \cdot x} = k \cdot f(x)$,
die Änderungsrate $f'(x)$ ist
proportional zum Bestand $f(x)$.

In der Wirklichkeit liegt exponentielles Wachstum immer dann vor, wenn die Änderung Δy einer Größe y proportional ist zur Größe y und zum Zuwachs Δx der unabhängigen Größe x (meistens die Zeit):



$\Delta y \sim y \cdot \Delta x$
 $\Delta y = \pm k \cdot y \cdot \Delta x$ k ist eine positive Proportionalitätskonstante,
 das Vorzeichen entscheidet darüber,
 ob die Größe y zunimmt (+k) oder abnimmt (-k).

Die Gleichung $\frac{\Delta y}{\Delta x} = ky$ geht für $\Delta x \rightarrow 0$ über in die »Differenzialgleichung«
 $\frac{dy}{dx} = ky$ beziehungsweise $y' = ky$. Unter einer Differenzialgleichung versteht man eine Gleichung für eine gesuchte Funktion (y) und Ableitungen (y', y'', \dots) dieser Funktion.

Die Differenzialgleichung $y' = ky$ wird erfüllt von der Exponentialfunktion mit $y = a \cdot e^{kx}$. Sie ist auch die einzige Lösung dieser Differenzialgleichung:

Annahme, es gäbe eine andere Funktion mit $y = f(x)$ als Lösung. Der Quotient

$$q(x) = \frac{f(x)}{e^{kx}} \text{ hat die Ableitung } q'(x) = \frac{e^{kx} f'(x) - f(x) k e^{kx}}{e^{2kx}},$$

$$f'(x) = k \cdot f(x) \text{ eingesetzt: } q'(x) = \frac{e^{kx} k f(x) - f(x) k e^{kx}}{e^{2kx}} = 0 \text{ für alle } x$$

Also ist $q(x) = \frac{f(x)}{e^{kx}} = a$, a ist konstant, also ist $f(x) = a \cdot e^{kx}$.

Die Exponentialfunktion hat noch eine besondere Eigenschaft:

Wenn die Variable x um gleiche Beträge Δx zunimmt, dann ändert sich der Bestand immer mit dem selben Faktor – unabhängig vom jeweiligen Bestand.

Beim Wachstum ist zum Beispiel die **Verdopplungszeit** T_2 charakteristisch, das ist die Zeitspanne, in der sich der Bestand verdoppelt:

Bestand zum Zeitpunkt t : $a \cdot e^{kt}$,
 Bestand um T_2 später,
 also zum Zeitpunkt $t+T_2$:

$$a \cdot e^{k(t+T_2)} = 2a \cdot e^{kt}$$

$$e^{kT_2} = 2 \Rightarrow kT_2 = \ln 2 \Rightarrow T_2 = \frac{\ln 2}{k}, k > 0$$

Der Verdopplungszeit bei Wachstum entspricht beim Zerfall die **Halbwertszeit** $T_{1/2}$. Das ist die Zeitspanne, in der sich der Bestand halbiert:

Bestand zum Zeitpunkt $t+T_{1/2}$ =
 $= \frac{1}{2} \cdot$ Bestand zum Zeitpunkt t :

$$a \cdot e^{-k(t+T_{1/2})} = \frac{1}{2} a \cdot e^{-kt}$$

$$e^{-kT_{1/2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow -kT_{1/2} = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$$

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{k}, k > 0$$

Ein klassisches Beispiel für einen Zerfall ist der »radioaktive Zerfall«. Neben der Halbwertszeit dient zu seiner Beschreibung die **mittlere Lebensdauer** T_m eines Atoms. T_m ist das arithmetische Mittel der Lebensdauern der Atome, die zur Zeit $t=0$ vorhanden sind. τ

Sie ist so definiert: $aT_m = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\tau} a e^{-kt} dt$

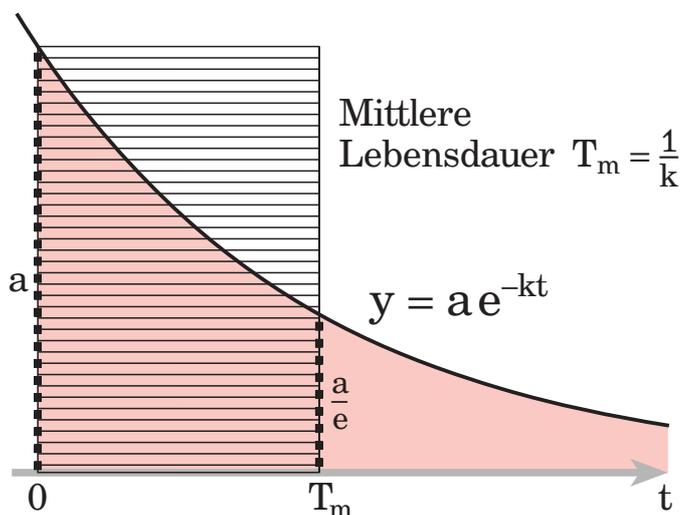
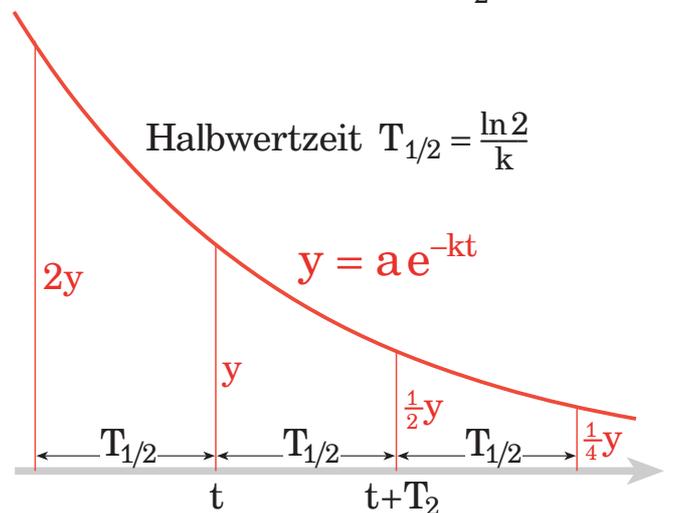
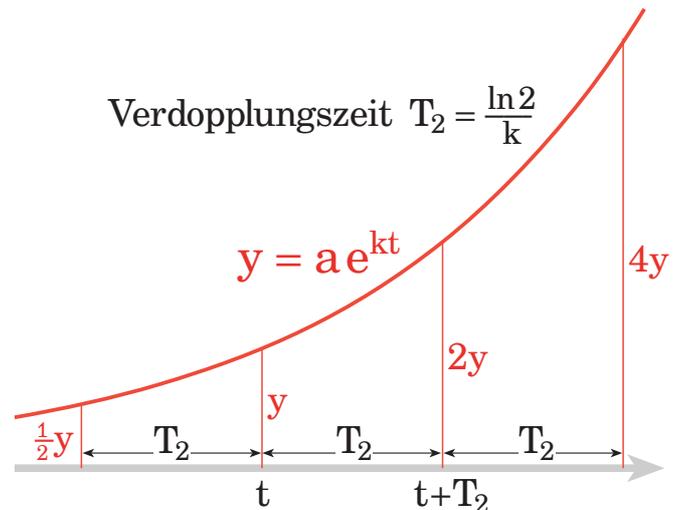
$$\int_0^{\tau} a e^{-kt} dt = -\frac{a}{k} [e^{-kt}]_0^{\tau} = -\frac{a}{k} (e^{-k\tau} - 1)$$

$$aT_m = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^{\tau} a e^{-kt} dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left[-\frac{a}{k} (e^{-k\tau} - 1) \right]$$

$$= -\frac{a}{k} \lim_{\tau \rightarrow \infty} (e^{-k\tau} - 1) = \frac{a}{k}$$

$$T_m = \frac{1}{k}, k > 0$$

In der Zeitspanne T_m sinkt der Bestand auf den e -ten Teil $\approx 36,8\%$.



Beispiele für exponentielle Zunahme

Stetige Verzinsung

Ein Kapital K_0 werde pro Jahr verzinst mit dem Zinsfuß p ,
zum Beispiel mit $p=5\%=0,05$.

Nach 1 Jahr ist es angewachsen auf K_0 plus Zinsen $K_0 \cdot p$: $K_0 + K_0 \cdot p = K_0(1+p)$,
das heißt, das Kapital K_0 wird multipliziert mit $(1+p)$.

Nach 2 Jahren ist es also angewachsen auf $[K_0(1+p)](1+p) = K_0(1+p)^2$

Nach t Jahren ist es schließlich angewachsen auf $K_0(1+p)^t$.

Diese Art der Kapitalvermehrung heißt auch Zinseszins.

Statt jedes Jahr aufs Kapital den Jahreszins zu geben, könnten die Banken auch
in kürzeren Zeitspannen nach diesem Verfahren verzinsen,

zum Beispiel: Zeitspanne = 1 Monat = $\frac{1}{12}$ Jahr Zinsfuß = $\frac{1}{12} p$
Kapital nach t Jahren: $K_0(1 + \frac{1}{12} p)^{12t}$

allgemein: Zeitspanne $\frac{1}{n}$ Jahr Zinsfuß = $\frac{1}{n} p$
Kapital nach t Jahren: $K_0(1 + \frac{1}{n} p)^{nt}$

Macht man die Verzinsung beliebig fein, also n beliebig groß, dann wächst das Kapital in t Jahren auf $K(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} K_0(1 + \frac{1}{n} p)^{nt} = K_0 \lim_{n \rightarrow \infty} [(1 + \frac{1}{n} p)^n]^t$. Der Grenzwert der Eckklammer lässt sich durch eine Substitution bestimmen $m := \frac{n}{p}$; dann ist mit $n \rightarrow \infty$ auch $m \rightarrow \infty$, also ist $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n} p)^n = \lim_{m \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{m})^{mp} = \lim_{m \rightarrow \infty} [(1 + \frac{1}{m})^m]^p = e^p$.

Damit gilt $K(t) = K_0 e^{pt}$. Die Banken bieten eine solche Art der Verzinseszinsung nicht an. Diese mathematische Idealisierung heißt auch **stetige Verzinsung**.

Sie entspricht genau der Vorstellung, die wir von ungestörtem Wachstum haben: Das soeben Entstandene erzeugt sofort wieder Neues im selben Maß.

Legt man $K_0=10000\text{€}$ zu $p=5\%$ an, so hat man nach $t=10$ Jahren:

– bei jährlicher Verzinsung

$$K_0(1+p)^t = 10000 \cdot 1,05^{10} \text{€} = 16288,95 \text{€}$$

– bei monatlicher Verzinsung

$$K_0(1 + \frac{1}{12} p)^{12t} = 10000 \cdot (1 + \frac{5}{1200})^{120} \text{€} = 16470,10 \text{€}$$

– bei täglicher Verzinsung (360 Banktage pro Jahr)

$$K_0(1 + \frac{1}{360} p)^{360t} = 10000 \cdot (1 + \frac{5}{36000})^{3600} \text{€} = 16486,62 \text{€}$$

– bei stetiger Verzinsung

$$K_0 e^{pt} = 10000 e^{0,05 \cdot 10} \text{€} = 16487,21 \text{€}$$

Ungestörte Vermehrung einer Population

Eine Population ist eine Menge gleichartiger Lebewesen, deren Anzahl zu einem Zeitpunkt t_0 bekannt ist. Wenn sie sich unbeeinflusst von außen vermehrt, dann geschieht das nach einer Exponentialfunktion. Weil der Zuwachs Δy proportional ist zum jeweiligen Bestand y und zur Zeitspanne Δt , gilt

$$y = a \cdot e^{kt}, \quad a \text{ ist der Bestand zur Zeit } t=t_0 \\ k \text{ heißt Wachstumskonstante.}$$

Diese Idealisierung ist am besten verwirklicht in Bakterienstämmen. So hat das Bakterium *Bazillus Pseudomonas* (Wundinfektion) eine Verdopplungszeit von $T_2=9,8$ min. Wie lang dauert die Vermehrung von 100 auf 1 Million Bazillen?

$$T_2 = \frac{\ln 2}{k} \Rightarrow k = \frac{\ln 2}{T_2} = 0,071 \quad (T_2 \text{ und } t \text{ sind gemessen in Minuten)}$$

Mit $a=100$ und $y=10^6$ ergibt sich

$$10^6 = 100 \cdot e^{0,071t} \Rightarrow 10^4 = e^{0,071t} \Rightarrow \ln 10^4 = 0,071t \Rightarrow t = \frac{\ln 10^4}{0,071} = 129,7$$

Nach gut 2 Stunden haben sich die Bazillen vermehrt auf etwa das 10000-fache.

Beispiele für exponentielle Abnahme

Radioaktiver Zerfall

Die Gleichung $y = a \cdot e^{-kt}$, $k > 0$, beschreibt einen Zerfallsvorgang. Am klarsten beobachtet man ihn beim radioaktiven Zerfall: Atomkerne eines Elements verwandeln sich in die eines andern und senden dabei Strahlung aus:

Heliumkerne (α -Strahlung), Elektronen (β -Strahlung) oder Photonen (γ -Strahlung). So zerfällt Kobalt-60 in Nickel-60, dabei wird β - und γ -Strahlung frei; die Halbwertszeit ist 5,3 Jahre. Wie lang dauert es, bis nur noch 1% einer Anfangsmenge Kobalt-60 vorhanden ist?

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{k} \Rightarrow k = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = 0,131 \quad (T_{1/2} \text{ und } t \text{ sind gemessen in Jahren})$$

$$y = 0,01 a$$

$$0,01 a = a \cdot e^{-0,131t} \Rightarrow 0,01 = e^{-0,131t} \Rightarrow \ln 0,01 = -0,131t \Rightarrow t = \frac{\ln 0,01}{-0,131} = 35,2$$

Nach gut 35 Jahren ist die Strahlung eines Co-60-Präparats abgeklungen auf 1%. Die mittlere Lebensdauer eines Co-60-Atoms ist $T_m = \frac{1}{k} = 7,6$.

Also »lebt« ein Co-60-Atom im Mittel etwa siebeneinhalb Jahre.

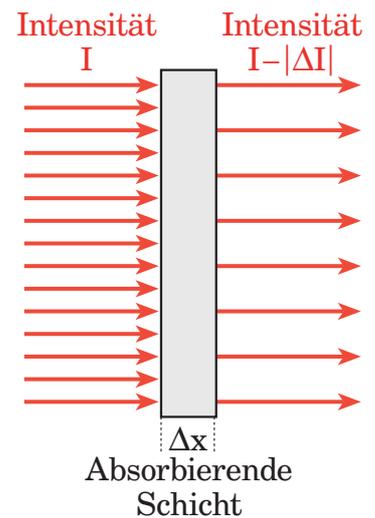
Absorption von Licht und Schall

Dringt Licht in durchsichtiges Material, so wird ein gewisser Teil von ihm absorbiert: Die Intensität des Lichts wird kleiner. Der Verlust ΔI an Intensität ist proportional zur Intensität I (Bestand) vor der Schicht und zur Dicke Δx der Schicht: $\Delta I = -k \cdot I \cdot \Delta x, k > 0$

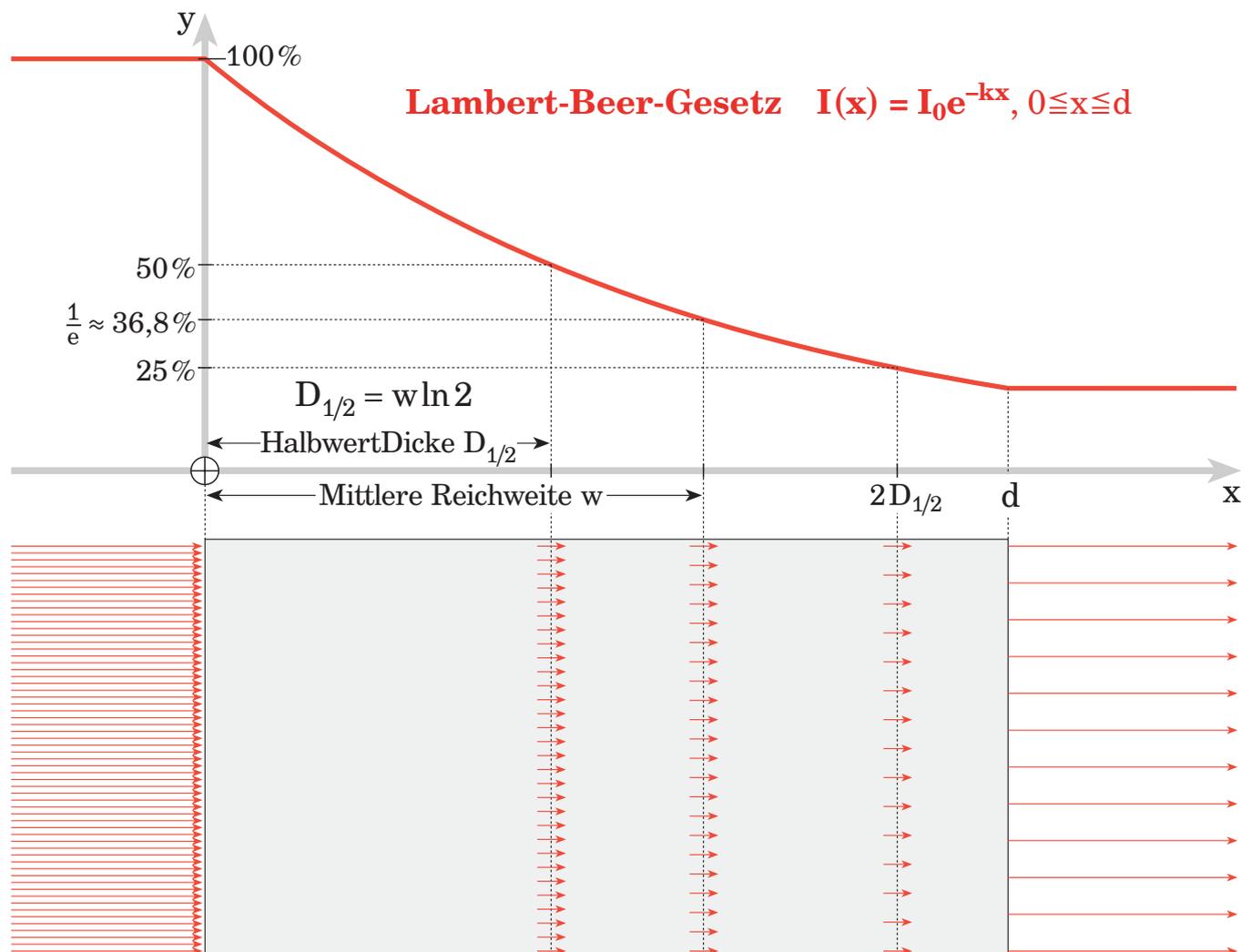
Mathematisch idealisiert ergibt sich so das

LAMBERT-BEER-GESETZ: $I = I_0 \cdot e^{-kx}$

Für klares Wasser ist $k \approx 1,4$, wenn man x in Meter angibt. In 5m Tiefe ist dann die Lichtintensität gesunken auf $I = I_0 \cdot e^{-1,4 \cdot 5} = I_0 \cdot e^{-7} \approx 1$ Promille von I_0 .



Was beim Zerfall die mittlere Lebensdauer ist, das ist bei der Absorption die **mittlere Reichweite w** ; w ist die Dicke der Schicht, in der die Intensität auf den e -ten Teil abnimmt. In klarem Wasser ist $w = \frac{1}{k} \approx 0,7$, also etwa 70cm. Was beim Zerfall die Halbwertzeit $T_{1/2}$ ist, das ist bei der Absorption die **Halbwertdicke $D_{1/2}$** . In klarem Wasser ist $D_{1/2} = \frac{\ln 2}{k} \approx 0,5$; also nach jeweils einem halben Meter ist die Intensität nur noch halb so groß.



Ähnliches beobachten wir beim Nachhall in geschlossenen Räumen. Trifft Schall auf eine Wand, so wird ein Teil der Schallenergie im Material der Wand absorbiert und der Rest wird reflektiert. Der absorbierte Anteil ist proportional zur Intensität des erzeugten Schalls und zur Anzahl der Reflexionen, also zur Zeit: $\Delta I = -k \cdot I \cdot \Delta t$, $k > 0$. Mathematisch idealisiert ergibt sich: $I = I_0 \cdot e^{-kt}$.

Entscheidend für die »Hörsamkeit« eines Raums ist (neben anderen Parametern) die **Nachhallzeit** T_H — das ist die Zeitspanne, in der die Schallenergie auf ein Millionstel zurückgeht. Die Nachhallzeit hängt auch ab von der Frequenz, tieffrequenter Schall (500Hz) hallt länger als hochfrequenter (1000Hz) – was dem Hall eine Klangfärbung gibt. Durchschnittswerte von Nachhallzeiten in Sekunden:

| | |
|----------------------|-------------|
| Schalltoter Raum | 0 |
| Wohnraum | 0,5 |
| Konzertsaal | 1,5 bis 2,5 |
| Basilika Ottobeuren | 7 |
| Baptisterium in Pisa | 20 |

Angleichung der Temperatur

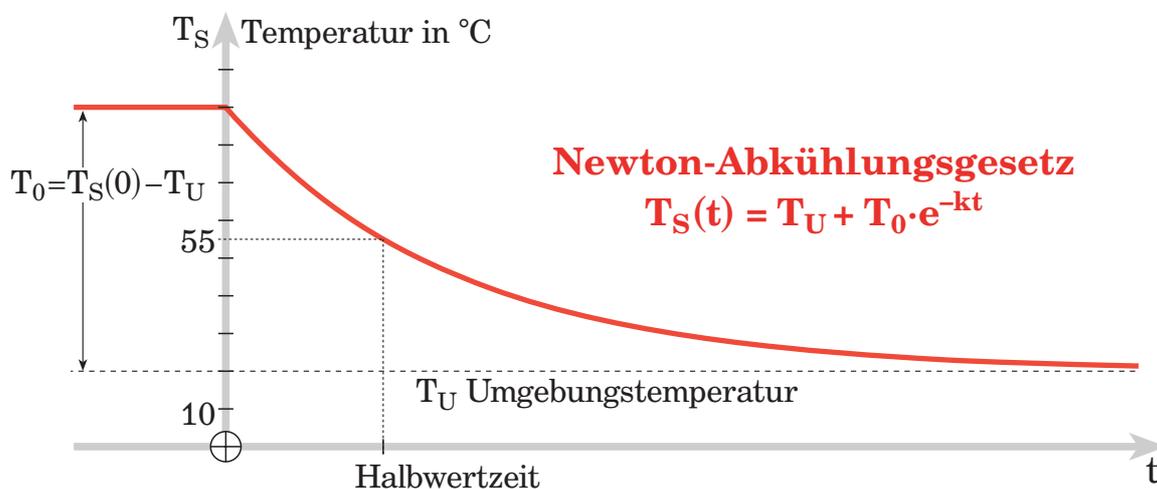
Ist ein Stoff wärmer oder kälter als seine Umgebung, so gleicht sich seine Temperatur der seiner Umgebung an: Heißer Kaffee kühlt sich ab, und kaltes Bier erwärmt sich. Vereinfachend nehmen wir an, dass sich die Temperatur der Umgebung dabei nicht ändert.

T bezeichne den Unterschied der Temperatur T_S des Stoffs und der Temperatur T_U der Umgebung. Die Verringerung ΔT dieses Unterschieds ist proportional zum vorhandenen Unterschied T und zur Zeitspanne Δt : $\Delta T = -k \cdot T \cdot \Delta t$, $k > 0$

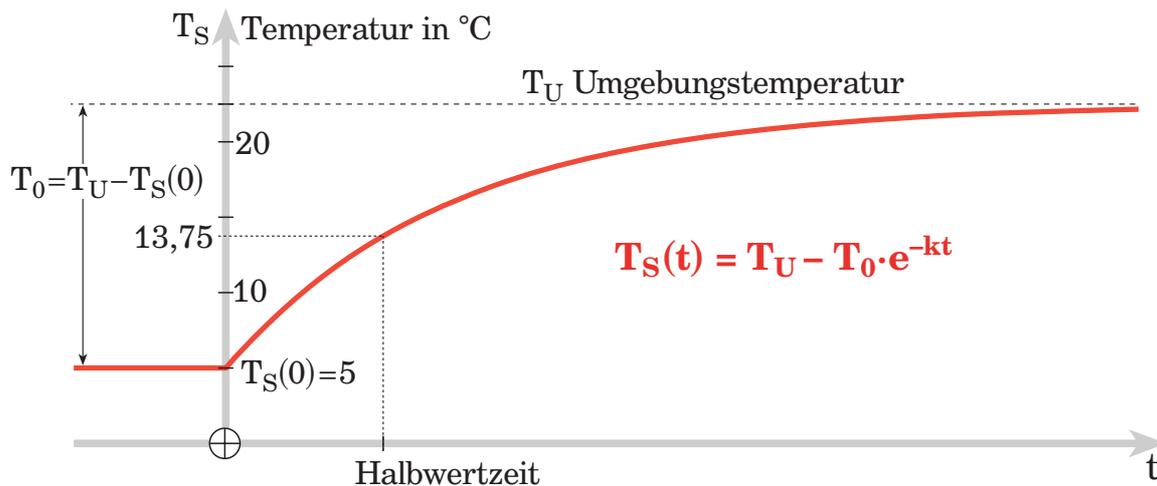
Mathematisch idealisiert ergibt sich: $T = T_0 e^{-kt}$

Beim Abkühlen ist: $T = T_S - T_U \Rightarrow T_S = T_U + T$ und damit gilt das

Newton-Abkühlungsgesetz $T_S = T_U + T_0 e^{-kt}$.



Beim Erwärmen ist: $T = T_U - T_S \Rightarrow T_S = T_U - T \Rightarrow T_S = T_U - T_0 e^{-kt}$



Im Gegensatz zur Wirklichkeit dauert es im mathematischen Modell unendlich lang, bis heißer Kaffee oder kaltes Bier die Umgebungstemperatur erreicht haben.

Änderung des Luftdrucks mit der Höhe

In Meereshöhe hat der Luftdruck im Mittel $p_0 = 1\text{bar}$. Er entsteht durchs Gewicht der darüber lastenden Luftmenge. Nach oben hin nimmt er ab, weil auch das Gewicht der Luft darüber abnimmt. Denn: Je höher man steigt, desto kleiner werden Dicke und Dichte der darüber liegenden Luftmenge. Die Druckabnahme Δp ist proportional zum vorhandenen Druck p und zur Zunahme Δh der Höhe h : $\Delta p = -k \cdot p \cdot \Delta h$. Mathematisch idealisiert ergibt sich: $p = p_0 e^{-kh}$.

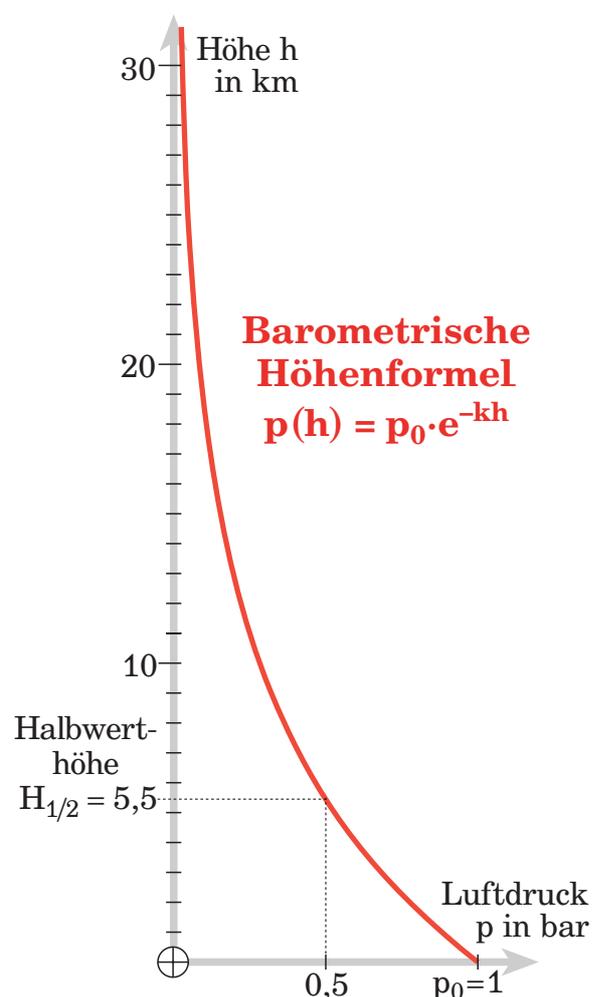
Misst man h in Kilometer, so ist $k = 0,127$.

Der mittlere Luftdruck in München (500m) ist $p = 1 \cdot e^{-k \cdot 0,5} = 0,938\dots$, das sind 938mbar.

Als Halbwertshöhe ergibt sich

$H_{1/2} = \frac{\ln 2}{k} = 5,457\dots$; man registriert nach jeweils fünfeinhalb Kilometer Höhenunterschied eine Halbierung des Luftdrucks.

Ausnahmsweise ist im Bild rechts die unabhängige Variable h nach oben abgetragen, weil es besser unsrer Vorstellung von Höhe entspricht. Die Exponentialkurve erscheint also gespiegelt an der Achse mit $y=x$.



Aufgaben

- 1 Auf welchen Betrag wachsen 1000€ in 10 Jahren (20 Jahren) an,
 - a) bei jährlicher Verzinsung zu 8%
 - b) bei stetiger Verzinsung zu 8% ?
- 2 Jemand braucht in 10 Jahren 100000€. Welchen Betrag muss er heute zur Bank bringen, wenn diese 6% Zinsen gibt und in den Zeitspannen verzinst:
 - a) jährlich
 - b) monatlich
 - c) täglich
 - d) stetig ?
- 3 In welchem Zeitraum verdoppelt (verzehnfacht) sich ein Kapital bei einem Zinssatz von 5% mit
 - a) jährlicher Verzinsung ?
 - b) stetiger Verzinsung ?
- 4 Auf der Erde haben 1980 etwa 4,4 Milliarden Menschen gelebt. Die Verdopplungszeit liegt bei 35 Jahren.
 - a) Gib den Term der zugehörigen Wachstumfunktion an.
 - b) Wie viel Menschen haben demnach 1975 gelebt? (Tatsächlich $3,967 \cdot 10^9$)
 - c) Welche Werte liefert die (sehr gewagte!) Extrapolation auf die Jahre 0, 2000 und 3000 ?
 - d) Wann haben nach diesem Modell 2 Milliarden, 1 Milliarde oder bloß 2 Menschen (Adam & Eva) gelebt ?
Wann wird die 10-Milliarden-Grenze erreicht sein ?
- 5 Nach Leonhard EULER (1707 bis 1783):
»Introductio in Analysis Infnitorum«, Lausanne 1748
 - a) Wenn sich die Anzahl der Einwohner eines Landes jährlich um den 30. Teil vermehrte und diese anfänglich 100000 betragen hätte, wie groß wäre dann die Bevölkerung nach 100 Jahren ?
 - b) Wenn sich die Menschheit nach der Sintflut ausgehend von 6 Personen fortgepflanzt hätte und man annimmt, dass nach 200 Jahren ihre Anzahl auf 1 Million angewachsen wäre, um den wievielten Teil müsste sich dann die Anzahl der Menschen jährlich vermehrt haben ?
 - c) Die jährliche Vermehrung einer Bevölkerung ist zu finden, wenn sie sich alle 100 Jahre verdoppelt.
- 6 Eine Kultur von Cholera-Bazillen zählt nach 30 Minuten 329 Individuen. Nach weiteren 60 Minuten enthält sie 2684 Bazillen.
 - a) Wie groß ist die Verdopplungszeit ?
 - b) Wie viele Bazillen waren es beim Ansetzen der Kultur ?
 - c) Wie viele Bazillen sind es 5 Stunden nach dem Ansetzen der Kultur ?

- 7 Uran hat eine Halbwertszeit von $4,5 \cdot 10^9$ Jahren.
 - a) Wie viel Prozent einer Uranmenge sind noch vorhanden nach 10^3 , 10^6 , 10^9 , 10^{10} Jahren ?
 - b) Wie lang dauert es, bis 90% zerfallen sind ?

- 8 Radium hat eine Halbwertszeit von 1590 Jahren.
 - a) Wie viel von 10g Radium zerfällt innerhalb von 2000 Jahren ?
 - b) Wie lang muss man warten, bis nur noch 0,1g von den 10g übrig sind ?

- 9 a) Ist von einem radioaktiven Stoff mehr zerfallen nach Ablauf von 3 Halbwertszeiten oder nach Ablauf von zweimal der mittleren Lebensdauer ?
 - b) Wie viel Prozent einer radioaktiven Substanz sind nach einer halben Halbwertszeit noch vorhanden ?
 - c) Wie viel Prozent einer radioaktiven Substanz sind zerfallen
 - α) nach dem 1-maligen Ablauf der mittleren Lebensdauer ?
 - β) nach dem 2-maligen Ablauf der mittleren Lebensdauer ?

- 10 Harte β -Strahlen werden zu 80% in einer 1 mm dicken Aluminiumschicht absorbiert.
 - a) In welcher Schichtdicke werden 50% absorbiert ?
 - b) Bei welcher Schichtdicke dringt noch 1% hindurch ?
 - c) Welchen Anteil der Strahlung verschluckt eine 0,5mm dicke Alufolie ?

- 11 Eine Tasse Kaffee habe 90°C , 5 Minuten später nur noch 70°C . Wie lang dauert es noch, bis man Kaffee von 50°C trinken kann, wenn die Raumtemperatur 20°C beträgt ?

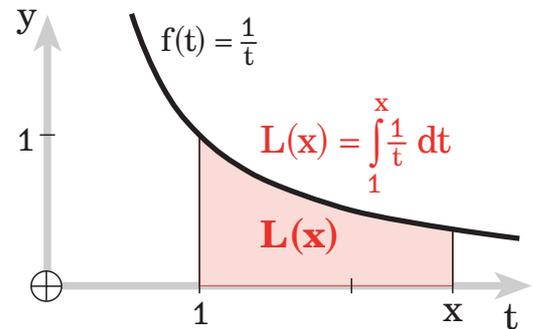
8. Ein anderer Zugang zur Exponentialfunktion

Man kann die Exponentialfunktion und ihre Ableitung auch finden auf einem Umweg, der zuerst zur Ableitung der Logarithmusfunktion führt.

Er beginnt an einer unvermuteten Stelle.

Die Formel $\int x^z dz = \frac{1}{z+1} x^{z+1} + C$ gilt für alle ganzen Zahlen z mit Ausnahme von $z=-1$. Das überrascht, weil der Integrand ein sehr einfacher Term ist. Um die zugehörige Stammfunktion zu finden, betrachten wir die Integralfunktion L mit:

$$L(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt, \quad D_L = \mathbb{R}^+.$$



Nach dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung ist $L'(x) = \frac{1}{x}$.

Um L näher zu untersuchen, betrachten wir die Schachtelfunktion S mit

$$S(x) = L(k \cdot x) = \int_1^{kx} \frac{1}{t} dt, \quad x > 0, k > 0.$$

Nach der Kettenregel ist dann $S'(x) = \frac{d}{dx} L(k \cdot x) = \frac{1}{kx} \cdot k = \frac{1}{x} = L'(x)$.

Weil S und L die selbe Ableitung haben, unterscheiden sie sich nur in einer Konstante C : $L(k \cdot x) = L(x) + C$.

Wegen $L(1) = \int_1^1 \frac{1}{t} dt = 0$ ergibt sich für $x=1$: $L(k) = L(1) + C = C$

und damit $L(k \cdot x) = L(x) + L(k)$.

Eine solche Eigenschaft kennen wir vom Logarithmus. Tatsächlich kann man beweisen, dass L eine Logarithmusfunktion sein muss.

Wir machen uns das schrittweise klar, indem wir zeigen, dass L die für den Logarithmus charakteristische Eigenschaft hat: $L(a^r) = r \cdot L(a)$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ und $r \in \mathbb{R}$:

– Exponent ist natürlich $L(a^n) = n \cdot L(a)$ mit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \text{Beweis: } L(a^n) &= L(a \cdot a^{n-1}) = L(a) + L(a^{n-1}) \\ &= L(a) + L(a) + L(a^{n-2}) \\ &= \dots \\ &= L(a) + L(a) + L(a) + \dots + L(a) \\ &= n \cdot L(a) \end{aligned}$$

– Exponent ist ganzzahlig: $L(a^{-n}) = -n \cdot L(a)$ mit $n \in \mathbb{N}$

$$\text{Beweis: } 0 = L(1) = L(a^n \cdot a^{-n}) = L(a^n) + L(a^{-n}) = n \cdot L(a) + L(a^{-n})$$

– Exponent ist Stammbruch: $L(a^{1/n}) = \frac{1}{n} \cdot L(a)$ mit $n \in \mathbb{N}$

$$\text{Beweis: } L(a) = L((a^{1/n})^n) = n \cdot L(a^{1/n})$$

– Exponent ist rational: $L(a^{m/n}) = \frac{m}{n} \cdot L(a)$ mit $m, n \in \mathbb{N}$

Beweis: $L(a^{m/n}) = L((a^{1/n})^m) = m \cdot L(a^{1/n}) = m \cdot \frac{1}{n} \cdot L(a)$

– Exponent ist reell: $L(a^r) = r \cdot L(a)$ mit $r \in \mathbb{R}$

Beweis: Jede reelle Zahl r ist darstellbar als Grenzwert einer Folge rationaler Zahlen r_i : $r = \lim_{i \rightarrow \infty} r_i$.

Für die r_i gilt: $L(a^{r_i}) = r_i \cdot L(a)$

Grenzwert auf beiden Seiten (wie vorhin gezeigt):

$$\lim_{i \rightarrow \infty} L(a^{r_i}) = \lim_{i \rightarrow \infty} r_i \cdot L(a) = r \cdot L(a).$$

L ist differenzierbar, also auch stetig: $L(\lim_{i \rightarrow \infty} a^{r_i}) = r \cdot L(a)$.

Unter der Annahme, dass auch die Exponentialfunktion stetig ist, gilt schließlich $L(a^r) = r \cdot L(a)$.

Aus dieser charakteristischen Eigenschaft folgt direkt, dass L eine Logarithmusfunktion ist:

Für $x > 0$ gilt die Identität $x = b^{\log_b x}$ und damit

$$L(x) = L(b^{\log_b x}) = \log_b x \cdot L(b).$$

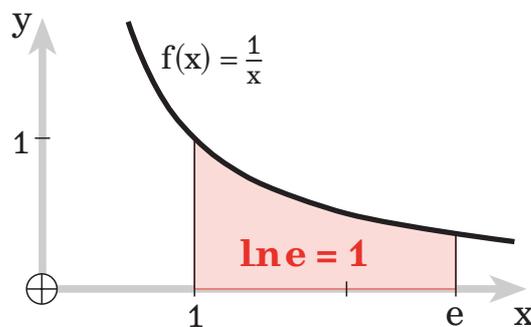
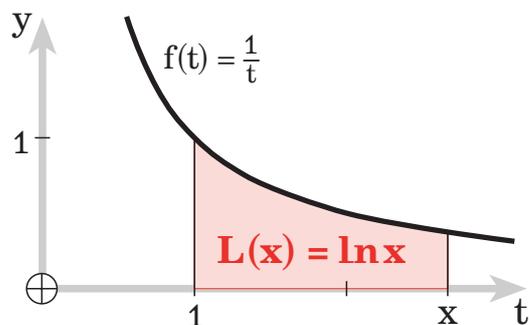
Besonders einfach wird die Darstellung, wenn man die Basis b so wählt, dass $L(b) = 1$ ist. Diese Basis heißt e , der zugehörige Logarithmus heißt natürlicher Logarithmus \ln : $\log_e = \ln$.

Damit gilt: $L(x) = \ln x$.

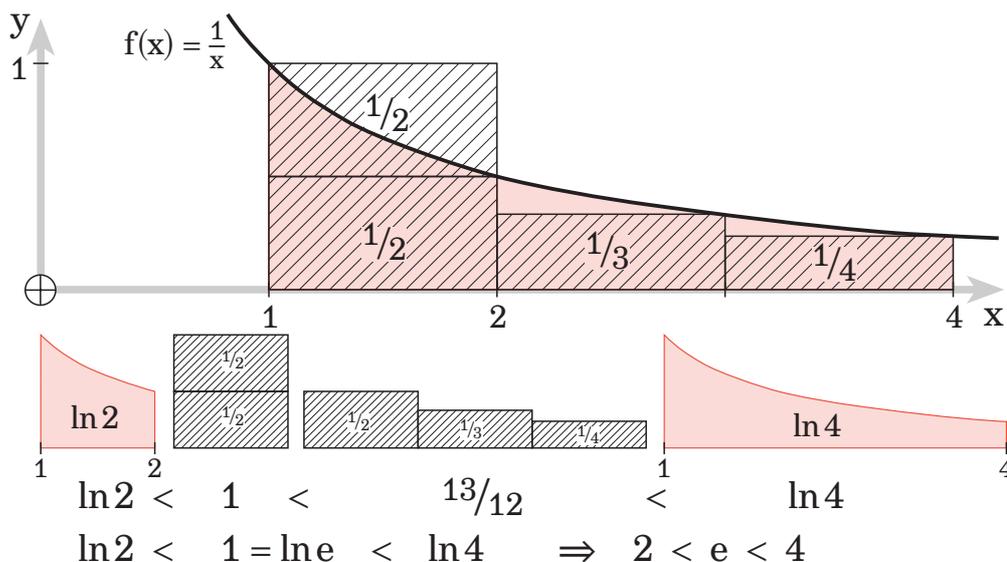
Für die Basis e gilt nach Definition:

$$L(e) = \ln e = 1$$

das heißt, e ist diejenige obere Grenze, bei der der Inhalt der Fläche gleich 1 ist, die begrenzt ist von der Kurve mit $y = \frac{1}{x}$, der x -Achse und den Ordinaten $x=1$ und $x=e$.



Eine grobe Abschätzung zeigt, dass e zwischen 2 und 4 liegt:



Bessere Näherungswerte für e ergeben sich (VI.2): $e = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{r}\right)^r$ oder (VI.4):

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

Wegen $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$ lassen sich Werte des natürlichen Logarithmus mit der Streifenmethode berechnen.

Die e -Funktion lässt sich jetzt definieren als Umkehrfunktion der \ln -Funktion:

$$e^x = \ln^{-1} x$$

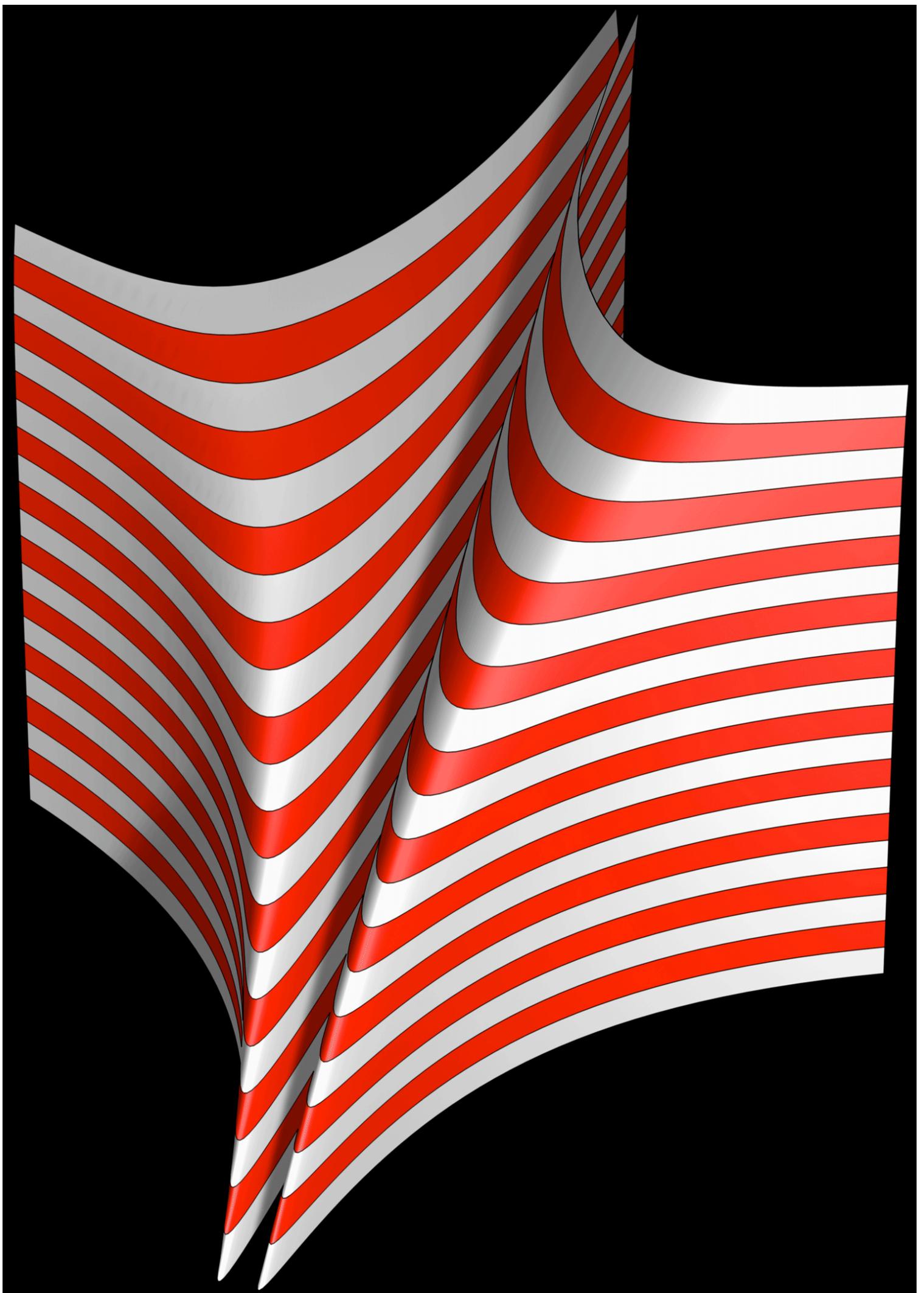
Die Ableitung der \ln -Funktion ergibt sich nach dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung:

$$(\ln x)' = \left(\int_1^x \frac{1}{t} dt \right)' = \frac{1}{x}$$

Die Ableitung der e -Funktion findet man bequem mit der Identität $\ln(e^x) = x$

$$(\ln(e^x))' = (x)'$$

$$\frac{1}{e^x} \cdot (e^x)' = 1 \Rightarrow (e^x)' = e^x$$



VII. Logarithmusfunktion

1. Eigenschaften

Die Logarithmusfunktion ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion. Ist e die Basis der Exponentialfunktion, dann heißt diese Umkehrfunktion Funktion des natürlichen Logarithmus, kurz \ln -Funktion:

e-Funktion: $f(x) = e^x = \exp x$, $D_f = \mathbb{R}$, $W_f = \mathbb{R}^+$

\ln -Funktion: $f^{-1}(x) = \ln x$, $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}^+$, $W_{f^{-1}} = \mathbb{R}$

Die Eigenschaften der \ln -Funktion lassen sich ableiten aus denen der e-Funktion:

Definitionsmenge \mathbb{R}^+

Wertemenge \mathbb{R}

Nullstelle $x = 1$ (1fach)

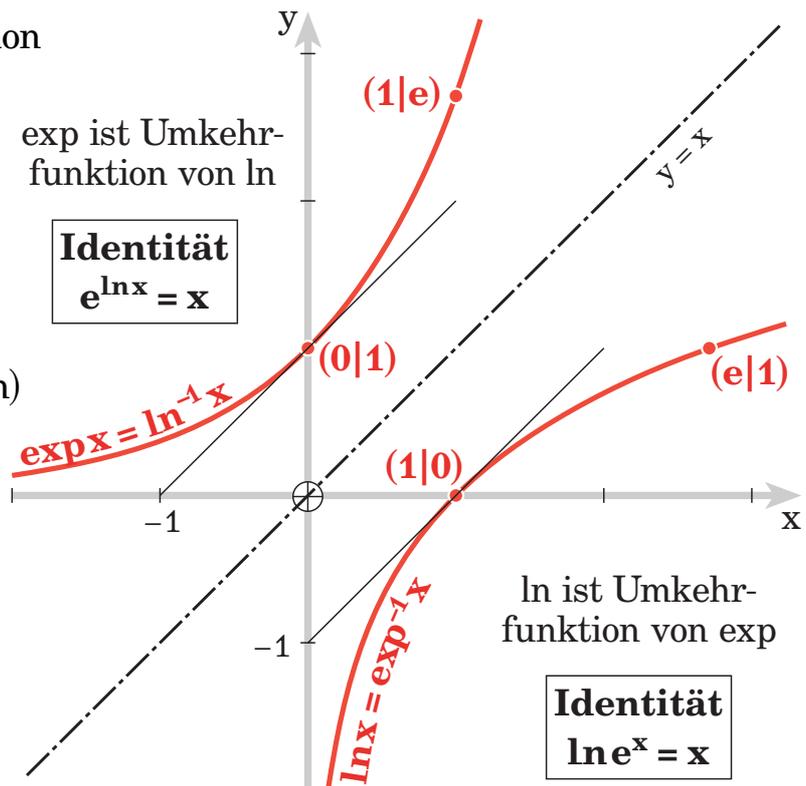
Senkrechte Asymptote

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$$

ist die negative y-Achse.

Verhalten im Unendlichen

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$$



Differenzierbarkeit, Stetigkeit

\exp ist differenzierbar. Also ist \ln als Umkehrfunktion von \exp ebenfalls differenzierbar und damit auch stetig.

Ableitung

Wir differenzieren die Identität $e^{\ln x} = x$

$$(e^{\ln x})' = (x)' \Rightarrow e^{\ln x} \cdot (\ln x)' = 1 \Rightarrow x \cdot (\ln x)' = 1 \Rightarrow$$

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}}$$

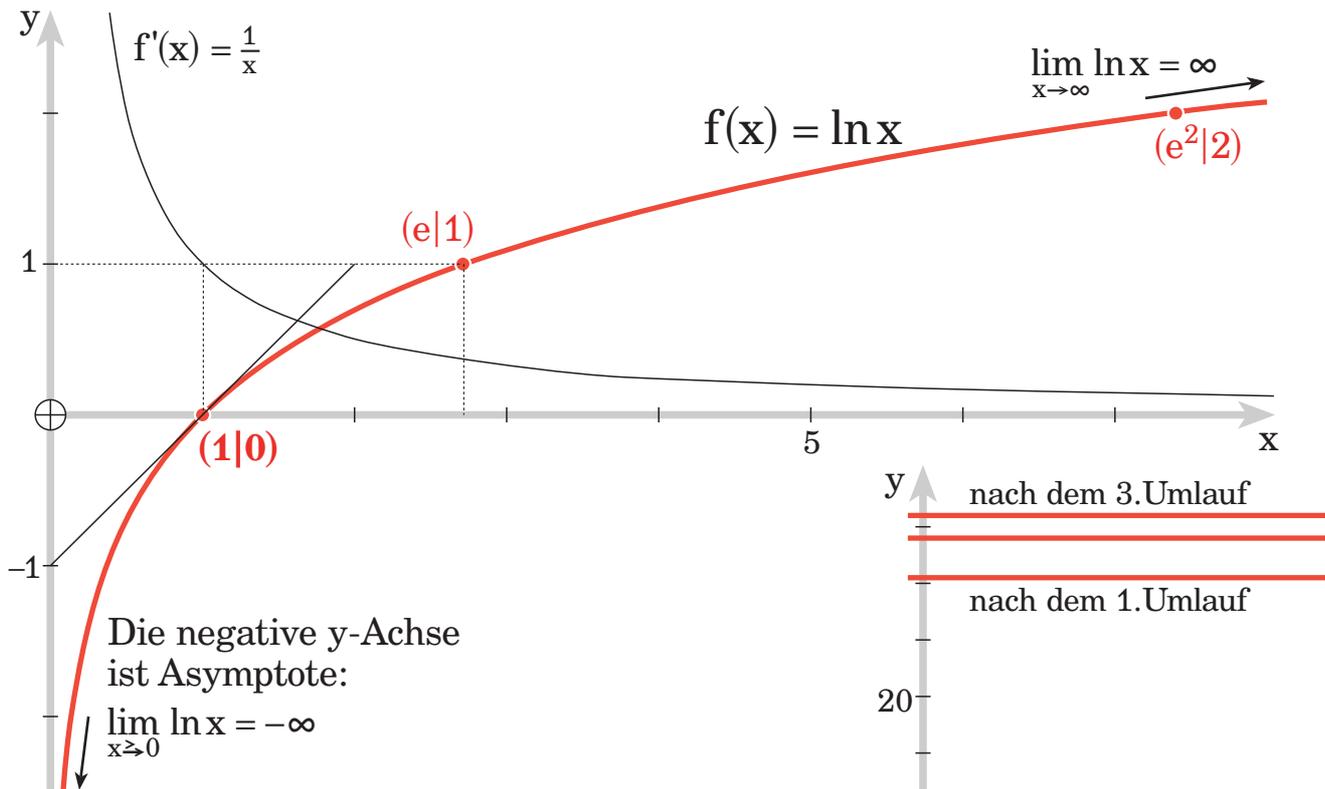
außerdem gilt für $x < 0$: $(\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$,

also $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$

Monotonie Wegen $\frac{1}{x} > 0$ für $x > 0$ steigt G_{\ln} echt monoton.

Krümmung Wegen $(\ln x)'' = -\frac{1}{x^2} < 0$ für $x > 0$ ist G_{\ln} rechtsgekrümmt.

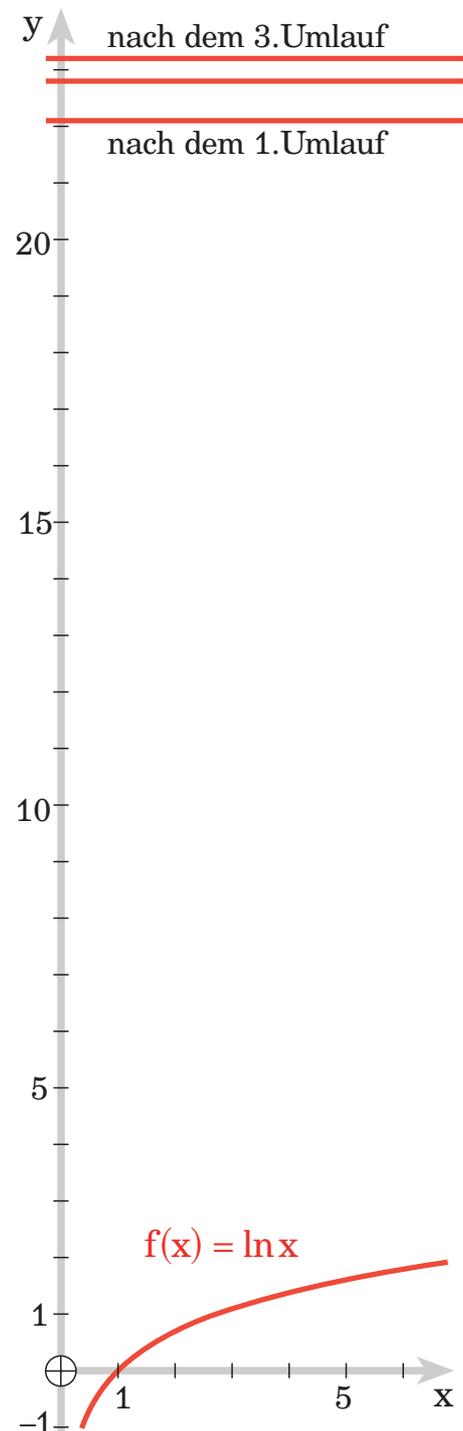
Grafische Zusammenfassung

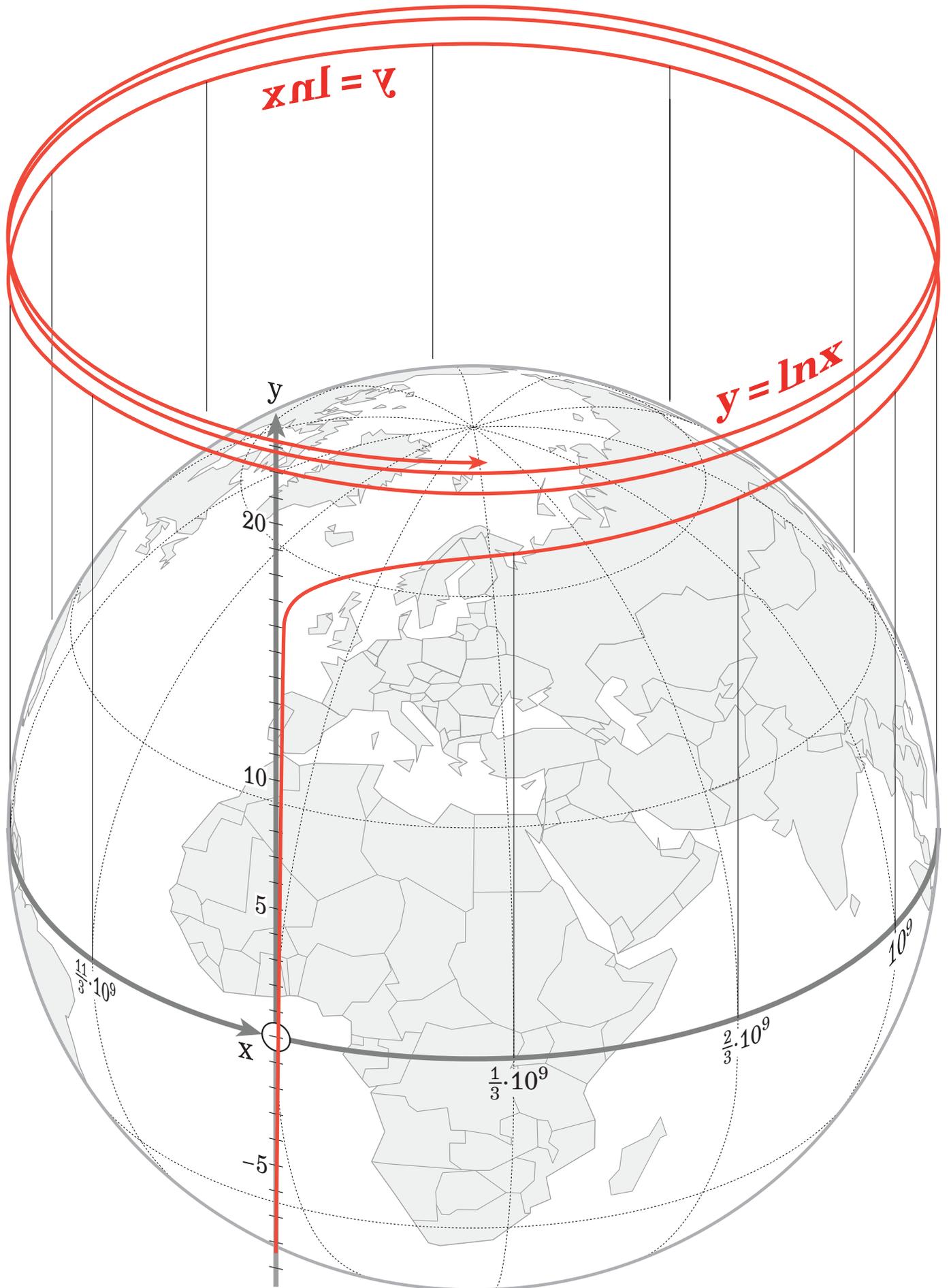


Die ln-Kurve für große x-Werte

Wegen $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ geht die Steigung der ln-Kurve für $x \rightarrow \infty$ gegen 0, gleicht ihr Verlauf immer mehr dem einer waagrechten Gerade. Wegen $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$ hat sie aber keine waagrechte Asymptote. Sie wächst allerdings unwahrscheinlich langsam. Wie langsam sie in unerschwingliche Höhen kriecht, soll ein Beispiel illustrieren:

Auf einem DIN-A4-Blatt im Hochformat ist ein Koordinatensystem ($1 \cong 1\text{cm}$) und eine ln-Kurve gezeichnet. Am rechten Blattrand ($x=20$) liegt die Kurve $3 (\approx \ln 20)$ cm über der x-Achse. Denkt man sich die x-Achse am Äquator um die Erde herumgewickelt, so überdeckt sie nach jeweils 40000km wieder den Ursprung. Auch die Kurve verfolgen wir in Gedanken weiter: Sie trifft zum 1. Mal auf die y-Achse in der Höhe von $\ln(40000 \cdot 1000 \cdot 100) = 22,1\dots$, also etwa 22cm über der x-Achse – unser Auge sieht auf dem Blatt keine »Kurve«, sondern eine Waagrechte. Nach der 2. Umrundung schneidet die ln-Kurve die y-Achse in $(0|22,8)$, nach der 18. Umrundung erreicht sie die Höhe 25, und den oberen Blattrand (Höhe 29) nach 983 Umläufen.





In-Funktion als Stammfunktion

$$\left. \begin{array}{l} \text{Wegen } (\ln|x|)' = \frac{1}{x} \text{ gilt auch } \int \frac{1}{x} dx = \ln x + C, \quad x > 0 \\ \text{und } \int \frac{1}{x} dx = \ln(-x) + D, \quad x < 0 \end{array} \right\} = \ln|x| + C, \text{ falls } C=D$$

Besteht die Definitionsmenge aus getrennten Intervallen, so beachte man Punkt ❶ im Nachdenken.

Berechnung von ln-Werten

Mit der Streifenmethode und der Beziehung $\int_1^x \frac{1}{t} dt = \ln x$ lassen sich ln-Werte beliebig genau berechnen.

Eine wichtige Integralformel

Brüche lassen sich schwer integrieren. In Sonderfällen kann man eine Stammfunktion aber sofort angeben, zum Beispiel: $\int \frac{1}{x^7} dx = -7 \cdot \frac{1}{x^8} + C$. Oft trifft man auf Integranden, deren Zähler gleich ist der Ableitung des Nenners: $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = ?$ Dafür gibt es eine einfache Formel; sie folgt aus der Ableitung der ln-Funktion.

Ist die Funktion f auf einem Intervall definiert, dort differenzierbar und ohne Nullstellen, so ist auch die Schachtelfunktion g mit $g(x) = \ln|f(x)|$ dort definiert und differenzierbar.

$$\begin{aligned} \text{Die Kettenregel liefert für } f(x) > 0: \quad g'(x) &= [\ln(f(x))]' = \frac{f'(x)}{f(x)} \\ \text{für } f(x) < 0: \quad g'(x) &= [\ln(-f(x))]' = \frac{-f'(x)}{-f(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} \end{aligned}$$

also gilt $\frac{d}{dx} \ln|f(x)| = \frac{f'(x)}{f(x)}$. Die gesuchte Stammfunktion hat den Term $\ln|f(x)|$.

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C}$$

Besteht D_f aus getrennten Intervallen, so beachte man ❶ aus Nachdenken.

$$\text{Beispiele: } \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{2x}{x^2-4} dx = \ln|x^2-4| + C$$

Oft lässt sich der Bruch so umformen, dass der Zähler zur Ableitung des Nenners wird:

$$\int \frac{1}{x \cdot \ln x} dx = \int \frac{1/x}{\ln x} dx = \ln|\ln x| + C$$

$$\int \frac{e^{2x}}{ae^{2x}+1} dx = \frac{1}{2a} \int \frac{2ae^{2x}}{ae^{2x}+1} dx = \frac{1}{2a} \ln|ae^{2x}+1| + C$$

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + C$$

Zum Nachdenken

1 $\int \frac{1}{x} dx$ genauer besehen

Die Formel $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ ist genau genommen falsch! Denn die zugehörige Schar sieht so aus wie im Bild rechts: Sie enthält nicht die Kurven, deren Äste gegeneinander in y-Richtung verschoben sind. Zum Beispiel kommt nicht die Kurve vor mit

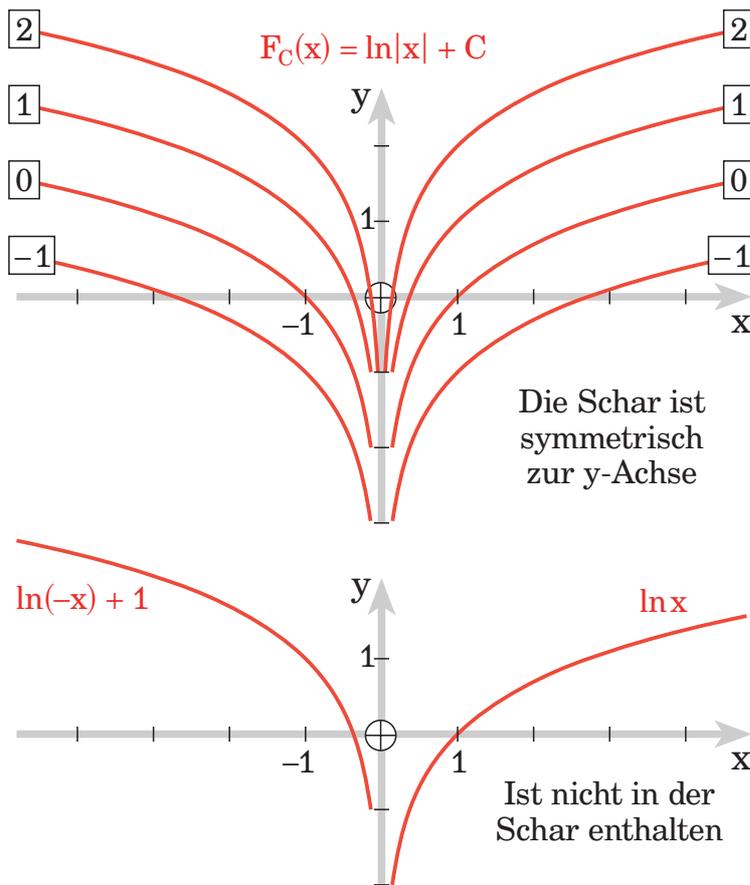
$$F(x) = \begin{cases} \ln x & \text{für } x > 0 \\ \ln(-x) + 1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Aber auch F ist eine Stammfunktion, denn

$$F'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für } x > 0 \\ \frac{1}{x} & \text{für } x < 0 \end{cases} = \frac{1}{x}, x \neq 0$$

Die korrekte Formel heißt:

$$\int \frac{1}{x} dx = \begin{cases} \ln x + C_1 & \text{für } x > 0 \\ \ln(-x) + C_2 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

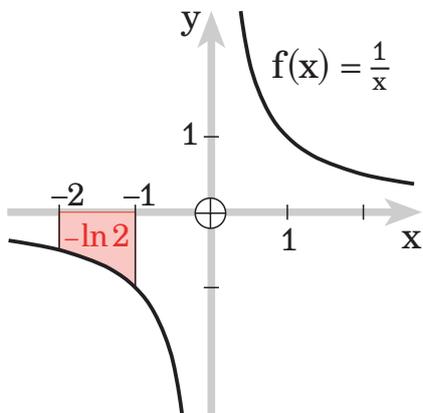


In der Praxis braucht man diese schwerfällige Formel nicht, wenn das Integrationsintervall keine Lücke enthält, man also nur mit einem Kurvenast arbeitet.

sinnvoll

$$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x} dx = [\ln|x|]_{-2}^{-1} = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2$$

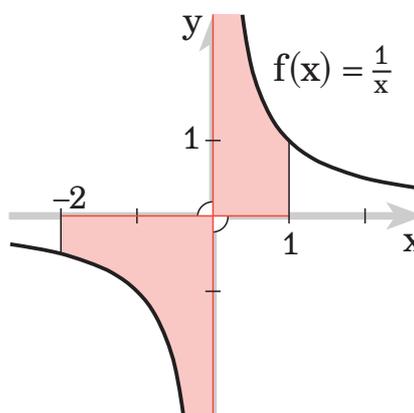
Das Integral gibt die Flächenbilanz wieder für ein Flächenstück unter der x-Achse.



sinnlos

$$\int_{-2}^1 \frac{1}{x} dx = [\ln|x|]_{-2}^1 = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2$$

Das Integral hat als Flächenbilanz keinen Sinn, weil sich beide Teilflächen ins Unendliche erstrecken.



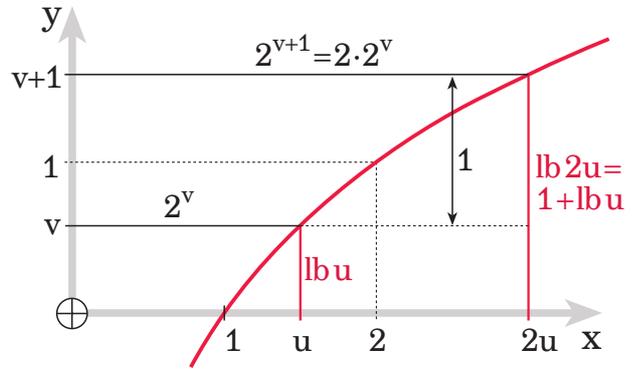
Das Problem »Unendlichkeitsstelle im Integrationsintervall« wird uns später noch beschäftigen bei den »uneigentlichen Integralen«.

2 Andere Basis

Manchmal lassen Exponential- und Logarithmusfunktionen mit andern Basen als e Zusammenhänge besser erkennen – Beispiele:

Basis 2 Ist t die unabhängige Variable, dann gibt T direkt an die

| Halbwertzeit | Verdopplungszeit |
|---------------------------|--------------------------|
| $f(t) = a \cdot 2^{-t/T}$ | $f(t) = a \cdot 2^{t/T}$ |
| $f(0) = a$ | $f(0) = a$ |
| $f(T) = a/2$ | $f(T) = 2a$ |
| $f(2T) = a/4$ | $f(2T) = 4a$ |
| ... | ... |



Für $\log_2 x$ schreibt man kürzer $\text{lb } x$ »binärer Logarithmus« oder $\text{ld } x$ »dualer Logarithmus«.

Beim 2er-Logarithmus gilt:

Mit der Verdopplung des Arguments wächst der Funktionswert um 1: $\text{lb}(2x) = \text{lb}2 + \text{lb}x = 1 + \text{lb}x$.

Basis 10 Weil 10 auch Basis unsres Zahlensystems ist, waren früher Logarithmen zur Basis 10 ein wichtiges Rechenhilfsmittel (Logarithmentafel, Rechenstab).

Für $\log_{10} x$ schreibt man kürzer $\text{lg } x$ »dekadischer Logarithmus«.

Besonders einfach ist der 10er-Logarithmus von 10er-Potenzen:

$\text{lg}10 = 1 \quad \text{lg}100 = 2 \quad \text{lg}10^k = k$

Andere Zahlen

$\text{lg}500 = \text{lg}(5 \cdot 100) = \text{lg}5 + \text{lg}100 = 0,6989... + 2 = 2,6989...$

alte Bezeichnungen: Numerus

Kennzahl, Mantisse

Die um 1 vergrößerte Kennzahl ist gleich der Stellenzahl des Numerus im 10er-System: 2^{10000} hat 3011 Stellen, denn $\text{lg}2^{10000} = 10000 \text{lg}2 = 3010,2...$

Basiswechsel

Eine Potenz mit Basis b ($b > 0; b \neq 1$) lässt sich umschreiben auf eine mit Basis e:

$b^x = e^{x \cdot \ln b} \Rightarrow (b^x)' = e^{x \cdot \ln b} \cdot \ln b = b^x \cdot \ln b$

Ebenso lässt sich ein Logarithmus mit Basis b umschreiben auf einen mit Basis e:

$\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}$ (•) Sonderfall $\text{lg } x = \frac{\ln x}{\ln 10}$

$(\log_b x)' = \frac{1}{\ln b} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{\ln b} \cdot (\ln x)'$ $(\text{lg } x)' = \frac{1}{\ln 10} \cdot \frac{1}{x}$

Die Umrechnung (•) beruht auf der Formel

$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$

Beweis: für $a, b > 0$ und $a, b \neq 1$ gilt

$\log_b x = y \Leftrightarrow b^y = x \quad || \log_a$

$\log_a (b^y) = \log_a x$

$y \cdot \log_a b = \log_a x \Leftrightarrow y = \frac{\log_a x}{\log_a b}$

Eng verwandt damit ist eine seltsame Beziehung; sie entsteht beim Vertauschen von

Argument und Basis: $\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b} = \frac{1}{\ln b} = \frac{1}{\log_x b}$ Also: $\ln x = \frac{1}{\log_x e}, x > 0$ und $x \neq 1$

③ Berechnung von Logarithmen

Um Werte transzendenter Funktionen zu berechnen, versucht man, die Funktions-
terme durch Polynome anzunähern. Bei der Exponentialfunktion haben wir das schon
kennen gelernt. Und wie es bei der Logarithmusfunktion geht, erfahren wir jetzt.

Näherungswerte für $\ln x$ liefert die Streifenmethode, angewandt aufs Integral $\int_0^x \frac{1}{t} dt$.
Ein anderer Zugang beruht auf der Formel für die geometrische Reihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \frac{1}{1-q} \quad \text{mit } |q| < 1. \quad \text{Man ersetzt } q \text{ durch } (-t) \text{ und integriert:}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-t)^k = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots = \frac{1}{1+t} \quad \parallel \int_0^x \dots dt$$

Obwohl man über unendlich viele Summanden integriert, lässt sich zeigen, dass gilt

$$x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots = \ln(1+x) \quad \text{mit } |x| < 1$$

Diese Formel stammt von NICOLAUS MERCATOR (latinisierte Form von Niklaus Kauff-
man, Eutin 1619 bis 1687 Paris). Er hat sie 1668 veröffentlicht in seiner »Logarithmo-
technica«, in der er Logarithmen der ersten Primzahlen berechnete.

Man verwechsle NICOLAUS MERCATOR nicht mit GERARDUS MERCATOR (latinisierte
Form von Gerhard Kremer, Rupelmonde 1512 bis 1594 Duisburg), der 1569 seine
»Mercator-Weltkarte« schuf.

Man kann beweisen, dass in der Formel die beiden Seiten übereinstimmen, falls $|x| < 1$;
sogar für $x=1$ stimmt die Gleichung noch. Sie liefert dann die schöne Beziehung:

$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$. Einigermaßen genaue Werte für $\ln 2$ sind allerdings nur mit riesi-
gem Aufwand erreichbar: Um die 2. Dezimale sicher zu haben, sind mindestens 1000
Summanden nötig. Der Mathematiker spricht von schlechter Konvergenz.

Mit einem Trick verbessert man die Konvergenz der Logarithmusreihe und ermöglicht
zugleich die Berechnung von Logarithmen für Numeri größer als 2:

$$\text{MERCATOR} \quad \ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots \quad \text{mit } -1 < x \leq 1$$

$$x \text{ ersetzen durch } (-x) \quad \ln(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \dots \quad \text{mit } -1 \leq x < 1$$

$$\text{Differenz} \quad \ln(1+x) - \ln(1-x) = 2x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5 + \dots \quad \text{mit } -1 < x < 1$$

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \dots\right)$$

Mit $\frac{1+x}{1-x}$, $|x| < 1$ lässt sich jede positive Zahl darstellen.

– Zur Berechnung von $\ln 2$ muss man x so wählen, dass $\frac{1+x}{1-x} = 2$ ist, also $x = \frac{1}{3}$:

$$\ln 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5 + \dots\right). \quad \text{Die gute Konvergenz zeigt sich darin,}$$

dass schon mit 2 Summanden die 2. Dezimale gesichert ist.

– Numeri deutlich größer als 2 verschlechtern die Konvergenz,

weil x dann nah bei 1 liegt:

$$\frac{1+x}{1-x} = 10 \Rightarrow x = \frac{9}{11} \quad \ln 10 = 2\left(\frac{9}{11} + \frac{1}{3}\left(\frac{9}{11}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{9}{11}\right)^5 + \dots\right).$$

Vom 11. Summanden an ist die 2. Dezimale sicher.

Aufgaben

1 Bestimme mit dem Taschenrechner.

a) $\ln 0,1$ **b)** $\ln 10$ **c)** $\ln 10^{10}$ **d)** $\ln \sqrt[5]{5}$ **e)** $\sqrt[5]{\ln 5}$
f) $\ln \pi^e$ **g)** $\ln 3$ **h)** $\ln(\ln 3) = \ln^2 3$ **i)** $\ln 3^2$ **j)** $(\ln 3)^2$

◇2 Gib die Werte an (ohne Taschenrechner!).

a) $\ln e$ **b)** $\ln \sqrt{e}$ **c)** $\sqrt{\ln e}$ **d)** $\ln e^2$ **e)** $\ln e^e$
f) $\ln \frac{1}{e}$ **g)** $\ln e^\pi$ **h)** $\sqrt{\ln e^2}$ **i)** $\sqrt{(\ln e)^2}$ **j)** $\ln(\ln e)$

◇3 Löse nach x auf, gib den exakten x-Wert an und bestimme mit dem Taschenrechner den auf 0,01 gerundeten Näherungswert.

a) $\ln x = 2$ **b)** $\ln 2x = -2$ **c)** $\ln \frac{1}{x} = 2$
d) $\frac{1}{\ln x} = 2$ **e)** $\ln(x^2) = -1$ **f)** $\ln(\ln x) = \ln^2 x = -1$
g) $\ln \sqrt{x} = -1$ **h)** $\ln[x(3e-2x)] = 2$ **i)** $\sqrt{\ln x} = \ln x$
j) $(\ln x - 1)\ln x = 2$ **k)** $\sqrt{\ln x} = \ln \sqrt{x}$

4 Für welche x-Werte gilt (Taschenrechner) ?

a) $1 < \ln x < 2$ **b)** $1 < \ln(-x) < 2$ **•c)** $1 < \ln|x| < 2$
•d) $1 < |\ln x| < 2$ **•e)** $\ln x^2 > e$ **f)** $\ln^2 x > e$
g) $\ln(ex) \leq \ln x$ **•h)** $(\ln x)^2 > \ln x$

◇5 Leite ab:

a) $f(x) = x + \ln x$ **b)** $f(x) = x \cdot \ln x$ **c)** $f(x) = \ln(-x)$
d) $f(x) = -\ln(2x)$ **e)** $f(x) = \ln(x^2)$ **f)** $f(x) = (\ln x)^2$
g) $f(x) = \ln \sqrt{x}$ **h)** $f(x) = \sqrt{\ln x}$ **i)** $f(x) = \ln(\cos x)$
j) $f(x) = \cos(\ln x)$ **k)** $f(x) = \ln(x^e)$ **l)** $f(x) = \ln(e^x)$

◇6 Beweise durch Ableiten.

a) $\int \ln x \, dx = x \cdot \ln x - x + C$
b) $\int (\ln x)^2 \, dx = x(\ln x)^2 - 2x \cdot \ln x + 2x + C$
c) $\int x \cdot \ln x \, dx = \int \ln x^x \, dx = \frac{1}{2} x^2 (\ln x - \frac{1}{2}) + C$
d) $\int \frac{(\ln x)^2}{x} \, dx = \frac{1}{3} (\ln x)^3 + C$
e) $\int \frac{1}{x \cdot \ln x} \, dx = \ln(\ln x) + C$
f) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \, dx = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C$
g) $\int \frac{2}{1-e^x} \, dx = 2x - \ln(2 - 2e^x)^2 + C$

- ◇10** Zeichne den Graphen und gib an:
die Achsenpunkte, die Gleichung der Asymptote und die Definitionsmenge.
- a)** $f(x) = 1 - \ln x$ **b)** $f(x) = \ln(1-x)$ **c)** $f(x) = \ln|1-x|$
d) $f(x) = \ln|x|$ **e)** $f(x) = |\ln x|$ **f)** $f(x) = |\ln|x||$
- 11** Zeichne den Graphen und gib an: die Definitionsmenge und gegebenenfalls die Achsenpunkte und die Asymptote.
- a)** $f(x) = \ln(x^2)$ **b)** $f(x) = (\ln x)^2$ **c)** $f(x) = \ln^2 x$
d) $f(x) = \ln\sqrt{x}$ **e)** $f(x) = \sqrt{\ln x}$ **f)** $f(x) = x^{\frac{1}{\ln x}}$ (!)
- ◇12** In welchem Punkt ist α) die Tangente, β) die Normale von G_f parallel zu G_g ?
- a)** $f(x) = \ln x$ $g(x) = 3x + 1789$
b) $f(x) = 2\ln(1-x^2)$ $g(x) = \frac{3}{2}x + 1989$
c) $f(x) = \ln|x^2-4|$ $g(x) = -\frac{2}{3}x + 1517$
- 13** Berechne den Schnittwinkel von G_f und G_g .
- a)** $f(x) = \ln x$ $g(x) = \ln(1-x)$
b) $f(x) = \ln(1+x)$ $g(x) = \ln(1-x)$
c) $f(x) = -x + \ln x$ $g(x) = 1 - x$
- 14** Für welche Zahl ist der Unterschied zwischen ihrem Quadrat und ihrem natürlichen Logarithmus am kleinsten?
- 15** Auf der \ln -Kurve liege Punkt $P(a|b)$. P und der Ursprung sind Gegenecken eines Rechtecks, von dem 2 Seiten in den Koordinatenachsen liegen.
- a)** Bei welchem Wert von a ($0 < a < 1$) hat der Inhalt des Rechtecks ein Extremum? Wie groß und von welcher Art ist das Extremum?
- b)** a_0 sei die Rechteckbreite für den Fall, dass die \ln -Kurve das Rechteck halbiert. Stelle eine Gleichung für a_0 auf und zeige, dass sie eine Lösung hat zwischen 4,9 und 5. (Aufgabe 6 beachten!)
- 16 a)** Für welche Zahlen ist die Wurzel aus ihrem natürlichen Logarithmus gleich dem natürlichen Logarithmus ihrer Wurzel?
- b)** Für welche Zahl zwischen 1 und e^4 ist der Unterschied zwischen der Wurzel aus ihrem natürlichen Logarithmus und dem natürlichen Logarithmus ihrer Wurzel am größten?
- c)** Berechne den Inhalt der Fläche, die begrenzt ist von der x -Achse und der Kurve mit $y = \ln x - (\ln\sqrt{x})^2$. (Aufgabe 6 beachten!)

•**17** $f(x) = \frac{4}{x}$, $w(x) = x$, $g(x) = x + 3$

Berechne den Inhalt des Flächenstücks, das begrenzt ist von:

a) G_f , G_w , der y -Achse und der Gerade $x=5$. **b)** G_f , G_w und G_g .

◊**18** Berechne und deute geometrisch.

a) $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ **b)** $\int_2^1 \frac{1}{x} dx$ **c)** $\int_2^3 \frac{1}{x} dx$ **d)** $\int_\pi^{\pi^2} \frac{1}{x} dx$ **e)** $\int_{-3}^{-2} \frac{1}{x} dx$ **f)** $\int_e^{ke} \frac{1}{x} dx$

19 Satz von GREGORIUS A ST. VINCENTO (Brügge 1584 bis 1667 Gent)

Die Fläche zwischen der Hyperbel mit $y = \frac{1}{x}$ und der x -Achse von $x=a$ bis $x=b$ ist genau so groß wie die von $x=ka$ bis $x=kb$ ($a > 0$, $b > 0$, $k > 0$).

a) Beweise diesen Satz mit der Integralrechnung.

•**b)** Beweise diesen Satz ohne Integralrechnung mit Flächenstreckungen.

•**c)** Beweise mit diesem Satz die

Funktionalgleichung der Logarithmusfunktion $\int_1^{ab} \frac{1}{x} dx = \int_1^a \frac{1}{x} dx + \int_1^b \frac{1}{x} dx$

◊**20** Berechne **a)** $\int_1^2 \frac{1+x}{x} dx$ **b)** $\int_1^e \frac{x^2+2x+3}{2x} dx$ **c)** $\int_{-4}^{-2} \frac{(x+2)^2}{x^2} dx$ **d)** $\int_{-1}^{-3} \frac{(x-1)^2+3x}{3x} dx$

◊**21** Berechne **a)** $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x-1}$ **b)** $\int_0^{-1} \frac{dx}{1-x}$ **c)** $\int \frac{dx}{x-a}$
d) $\int \frac{dx}{2x+a}$ **e)** $\int \frac{dx}{a-3x}$ **f)** $\int \frac{dx}{ax+b}$

◊**22** Berechne **a)** $\int_{-e}^e \frac{2x}{x^2+1} dx$ **b)** $\int_0^2 \frac{x}{x^2-9} dx$ **c)** $\int_{-1}^1 \frac{4x+2}{x^2+x+1} dx$

◊**23** Berechne **a)** $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x+1} dx$ **b)** $\int_{-1}^1 \frac{e^x}{e^{x+1}+1} dx$ **c)** $\int_0^1 \frac{-e^x-2e^{2x}}{e^x+e^{2x}-e} dx$
d) $\int_1^{\ln 2} \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} dx$ •**e)** $\int_0^e \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} dx$ •**f)** $\int_{-e}^0 \frac{(1-x)e^{-x}}{1-xe^{-x}} dx$

24 Berechne (siehe Aufgabe 6) **a)** $\int_2^3 \frac{1+\ln x}{x \ln x} dx$ **b)** $\int_2^e \frac{1-\ln x}{x \ln x} dx$
•**c)** $\int_1^e \frac{\ln x}{x(\ln x)^2+x} dx$ •**d)** $\int_{e^2}^{e^3} \frac{dx}{x \cdot \ln x \cdot \ln(\ln x)}$

•**25** Berechne **a)** $\int_4^9 \frac{dx}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}$ **b)** $\int_9^4 \frac{dx}{\sqrt{x}-x}$ **c)** $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x dx}{x^2+1+\sqrt{x^2+1}}$

2. Grenzwerte und Kurvendiskussion

Grenzwerte

An den Grenzen der Definitionsmenge der ln-Funktion wächst der Betrag der ln-Werte ins Unendliche: $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$ und $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$.

In der Kurvendiskussion kommen oft vor die Ausdrücke $x^n \cdot \ln x$ und $\frac{\ln x}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Bei jedem dieser Terme braucht man die Grenzwerte $\lim_{x \rightarrow \infty} \dots$ und $\lim_{x \rightarrow 0^+} \dots$.

2 dieser 4 Grenzwerte sind klar: $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n \cdot \ln x = \gg \infty \cdot \infty \ll = \infty$ und $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^n} = \gg \frac{-\infty}{+0} \ll = -\infty$.

Die beiden andern liefern unbestimmte Ausdrücke und müssen eigens untersucht werden.

- ① $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^n} = \gg \frac{\infty}{\infty} \ll$ Eine geschickte Substitution führt den Grenzwert zurück auf einen schon bekannten Grenzwert mit der e-Funktion:
 $u := n \cdot \ln x \Rightarrow x = e^{u/n}$; wenn $x \rightarrow \infty$, dann auch $u \rightarrow \infty$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^n} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u/n}{e^u} = \frac{1}{n} \cdot \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u}{e^u} = 0$$

Das überrascht nicht, wächst doch $\ln x$ unvergleichlich langsamer als jede Potenz x^n .

- ② $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \cdot \ln x = \gg 0 \cdot (-\infty) \ll$ Hier hilft die Substitution
 $u := \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{1}{u}$; wenn $x \rightarrow 0^+$, dann $u \rightarrow \infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \cdot \ln x = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\ln(1/u)}{u^n} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{-\ln u}{u^n} = 0 \text{ wegen } \textcircled{1}.$$

Alles auf einen Blick ($n \in \mathbb{N}$)

| | | |
|---|-------------|---|
| $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ | Sonderfall: | $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ |
| $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \cdot \ln x = 0$ | Sonderfall: | $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x = 0$ |

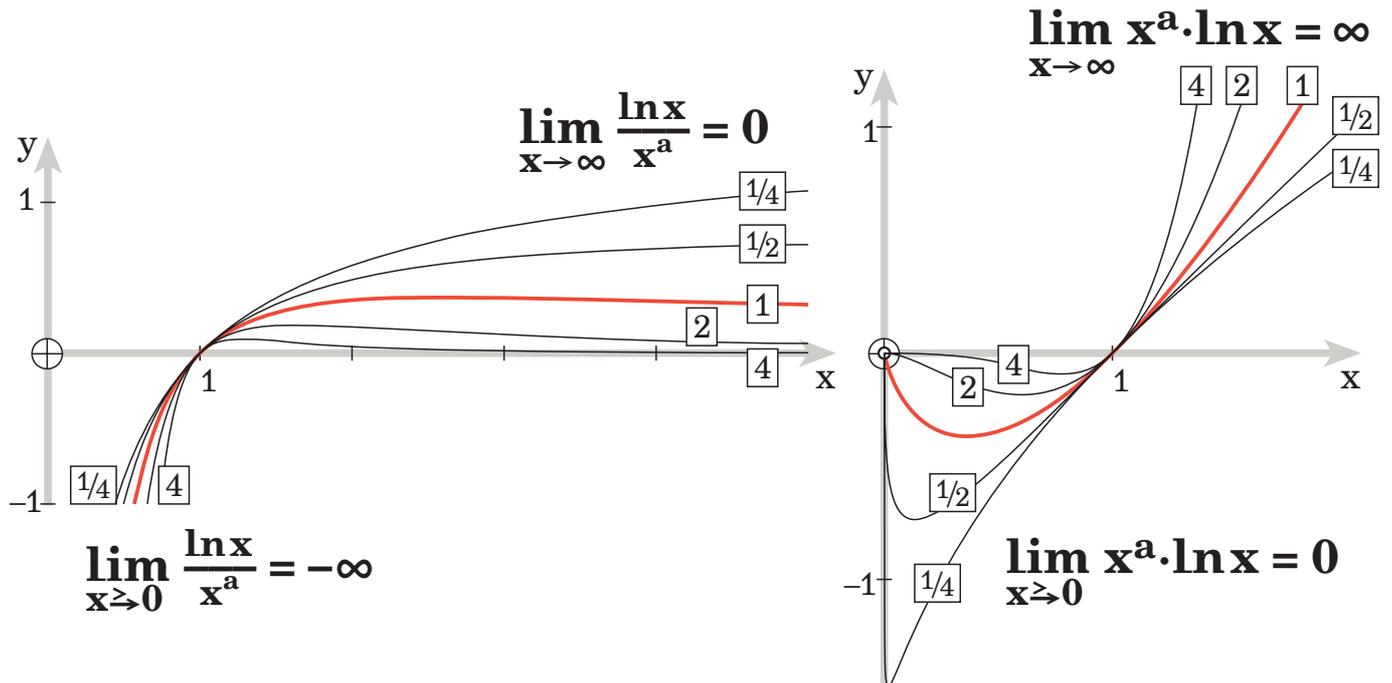
Diese Grenzwerte ändern sich nicht, wenn statt n eine beliebige positive reelle Zahl steht. Die Grenzwerte von $x^a \ln x$ am Rand der Definitionsmenge lassen sich gut einprägen mit den Grenzwerten von x^a und $\ln x$

($\gg x^a$ setzt sich durch, $\ln x$ liefert das Vorzeichen \ll):

| | | |
|---------|--|-----------------------------|
| | $\lim_{x \rightarrow \dots} x^a \ln x$ | |
| | $x \rightarrow 0^+$ | $x \rightarrow +\infty$ |
| $a > 0$ | 0 | $+\infty$ |
| $a < 0$ | $-\infty$ | 0 |

Der Grenzwert von x^a bestimmt den Betrag, der von $\ln x$ das Vorzeichen von $x^a \ln x$

Alles auf einen Blick im Bild



Diskussion einer Kurve

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln x^e}$

Term vereinfachen: $f(x) = \frac{1}{e \cdot x \cdot \ln x} = \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{x \cdot \ln x}$

Ableitungen: $f'(x) = \frac{1}{e} \cdot \frac{0 - (\ln x + x \cdot \frac{1}{x})}{(x \cdot \ln x)^2} = -\frac{1}{e} \cdot \frac{1 + \ln x}{(x \cdot \ln x)^2}$

$$f''(x) = -\frac{1}{e} \cdot \frac{(x \cdot \ln x)^2 \cdot \frac{1}{x} - (1 + \ln x) \cdot 2(x \cdot \ln x)(1 + \ln x)}{(x \cdot \ln x)^4} = \frac{1}{e} \cdot \frac{2(\ln x)^2 + 3 \ln x + 2}{(x \cdot \ln x)^3}$$

Maximale Definitionsmenge Wegen $\ln x$ muss sein $x > 0$,
wegen $x \cdot \ln x \neq 0$ muss auch sein $x \neq 1$,
also $D = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

Verhalten am Rand von D

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \cdot \ln x^e} = \frac{1}{-0} = -\infty$ die y-Achse ist Asymptote

$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x \cdot \ln x^e} = \frac{1}{-0} = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x \cdot \ln x^e} = \frac{1}{+0} = +\infty$ } $x=1$ ist senkrechte Asymptote

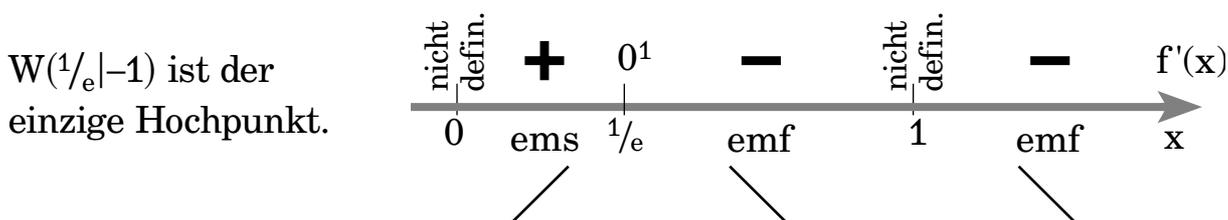
$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x \cdot \ln x^e} = \frac{1}{\infty} = 0$ die x-Achse ist Asymptote

Nullstellen gibt es nicht, weil der Zähler $\neq 0$ ist.

Waagrechtspunkte $f'(x) = 0 \Rightarrow 1 + \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow x = 1/e$
 $W(1/e | f(1/e)) = W(1/e | -1)$

Monotonie

Von $f'(x)$ sind markiert: Nullstelle und Definitionslücken.

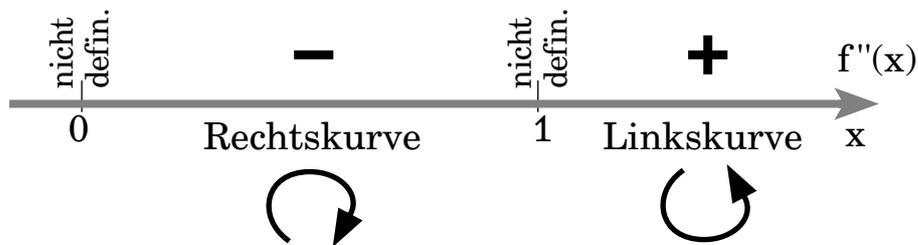


Flachpunkte $f''(x) = 0 \Rightarrow 2(\ln x)^2 + 3\ln x + 2 = 0$

Die Parabel $y = 2z^2 + 3z + 2$ ist oben offen und hat keine Nullstellen, weil die Diskriminante von $2z^2 + 3z + 2 = 0$ negativ ist; die Parabel liegt also über der x-Achse. Also ist $2(\ln x)^2 + 3\ln x + 2 > 0$, Flachpunkte gibt es nicht.

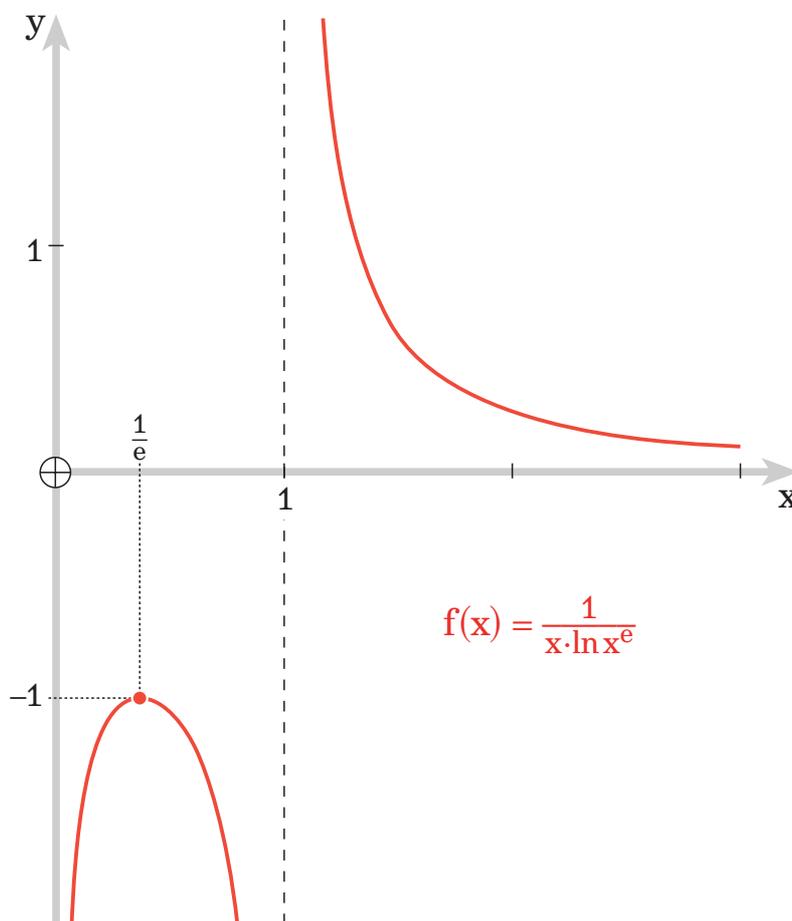
Krümmung

Von $f''(x)$ sind markiert: Definitionslücken.



Wertemenge

$W =]-\infty; -1] \cup]0; +\infty[$



Diskussion einer Schar

Beispiel: $f_a(x) = \frac{1+a\ln x}{x}$, $a \in \mathbb{R}$

$$f'_a(x) = \frac{x \cdot \frac{a}{x} - (1+a\ln x)}{x^2} = \frac{a-1-a\ln x}{x^2}$$

$$f''_a(x) = \frac{x^2 \left(-\frac{a}{x}\right) - (a-1-a\ln x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{2-3a+2a\ln x}{x^3}$$

Maximale Definitionsmenge $D = \mathbb{R}^+$

Verhalten am Rand von D

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+a\ln x}{x} = \begin{cases} -\infty & \text{für } a > 0 \\ +\infty & \text{für } a \leq 0 \end{cases} \quad \text{Die y-Achse ist Asymptote.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+a\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} + a \frac{\ln x}{x} \right) = 0 \quad \text{Die x-Achse ist Asymptote.}$$

Nullstellen $1 + a\ln x = 0 \Rightarrow \ln x = -\frac{1}{a} \Rightarrow x = e^{-1/a}$, $a \neq 0$

Für $a=0$ folgt $1=0$, Widerspruch. G_0 hat keine Nullstelle.

Das überrascht nicht: G_0 ist ein Hyperbelast von $y = \frac{1}{x}$, hat also weder Waagrecht- noch Flachpunkte.

Gemeinsame Scharpunkte Schnitt zweier Scharkurven ($a_1 \neq a_2$)

$$\begin{aligned} f_{a_1}(x) &= f_{a_2}(x) \\ \frac{1+a_1\ln x}{x} &= \frac{1+a_2\ln x}{x} \quad || \cdot x (\neq 0) \end{aligned}$$

$$a_1\ln x = a_2\ln x$$

$$(a_1 - a_2)\ln x = 0$$

$$\Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x=1, y=f_a(1)=1$$

Alle Scharkurven gehen durch $(1|1)$.

Sonst treffen sich 2 Scharkurven nicht.

Waagrechtspunkte $f'_a(x) = 0 \Rightarrow a\ln x = a-1 \quad || :a (\neq 0)$

$$\ln x = 1 - \frac{1}{a} \Rightarrow x = e^{1-1/a} = \frac{e}{\sqrt[a]{e}}$$

$$y = f_a(e^{1-1/a}) = \frac{1+a(1-1/a)}{e^{1-1/a}} = ae^{1/a-1}$$

$$W(e^{1-1/a} | ae^{1/a-1})$$

Für $a=0$ folgt $0=-1$, Widerspruch: G_0 hat keinen Waagrechtspunkt.

Die Art der Waagrechtspunkte bestimmt man bei Scharen meist mit der

$$2. \text{Ableitung: } f''_a(e^{1-1/a}) = \frac{2-3a+2a(1-1/a)}{(e^{1-1/a})^3} = \frac{-a}{(e^{1-1/a})^3}$$

Weil der Nenner positiv ist, hängt das Vorzeichen ab vom Zähler $(-a)$:

$$a > 0 \Rightarrow f''_a(e^{1-1/a}) < 0 \quad W \text{ ist Hochpunkt.}$$

$$a < 0 \Rightarrow f''_a(e^{1-1/a}) > 0 \quad W \text{ ist Tiefpunkt.}$$

Ortlinie der Waagrechtunkte $x = e^{1-1/a} \Rightarrow a = \frac{1}{1-\ln x}, x \neq e$

$$y = ae^{1/a-1} = a \frac{1}{e^{1-1/a}} = \frac{1}{1-\ln x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x(1-\ln x)}$$

Ortlinie der Hochpunkte: $a > 0 \Rightarrow y > 0, x < e$

Ortlinie der Tiefpunkte: $a < 0 \Rightarrow y < 0, x > e$

Flachpunkte $f''_a(x) = 0 \Rightarrow 2a \ln x = 3a - 2 \quad || :2a (\neq 0)$

$$\ln x = \frac{3}{2} - \frac{1}{a} \Rightarrow x = e^{3/2-1/a}$$

$$y = f_a(e^{3/2-1/a}) = \frac{1+a(3/2-1/a)}{e^{3/2-1/a}} = \frac{3}{2} ae^{1/a-3/2}$$

$$F(e^{3/2-1/a} | \frac{3}{2} ae^{1/a-3/2})$$

Für $a=0$ folgt $0=-2$, Widerspruch. G_0 hat keinen Flachpunkt.

Die Art der Flachpunkte bestimmt man bei Scharen meist mit der

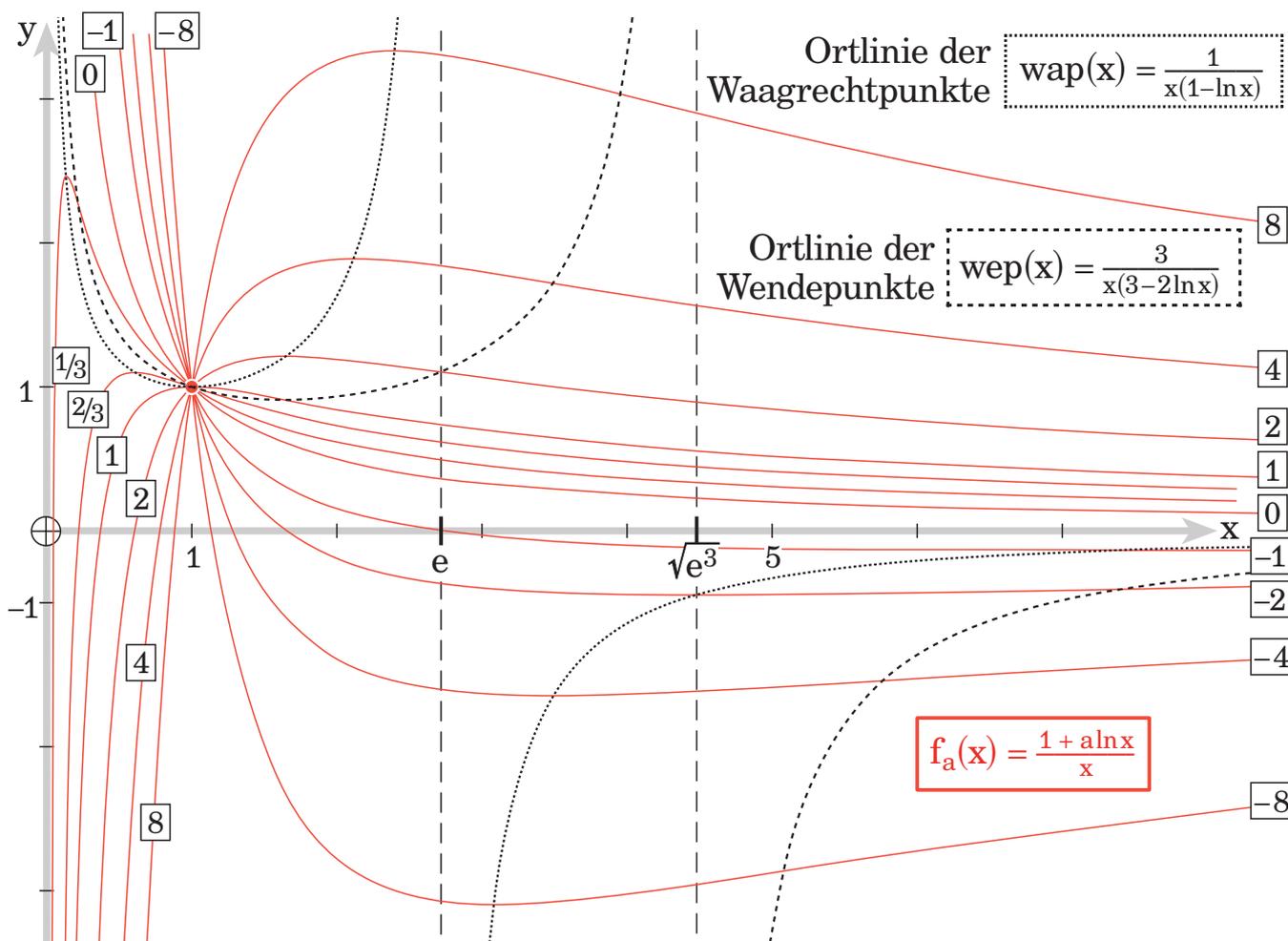
3. Ableitung: $f'''_a(x) = \frac{x^3(2a/x) - (2-3a+2a \ln x) \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{11a-6-6a \ln x}{x^4}$

$$f'''_a(e^{3/2-1/a}) = \frac{11a-6-6a(\frac{3}{2}-\frac{1}{a})}{(e^{3/2-1/a})^4} = \frac{2a}{(e^{3/2-1/a})^4}$$

Für $a \neq 0$ ist $f'''_a(e^{3/2-1/a}) \neq 0$, also ist jeder Flachpunkt auch Wendepunkt.

Ortlinie der Flachpunkte $x = e^{3/2-1/a} \Rightarrow a = \frac{1}{3/2-\ln x}, x \neq e^{3/2}$

$$y = \frac{3}{2} ae^{1/a-3/2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3/2-\ln x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{3}{x(3-2 \ln x)}$$



Aufgaben

- ◇1 Berechne. a) $\lim_{x \geq 0} x^2 \ln x$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \ln \sqrt{x}$ c) $\lim_{x \geq 0} \frac{\ln x}{x^2}$
 d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{1}{x}}{x}$
- ◇2 Berechne ($n \in \mathbb{N}$). a) $\lim_{x \geq 0} \frac{1}{x^n \ln x}$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n \ln x}$ c) $\lim_{x \geq 0} \frac{x^n}{\ln x}$ d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{\ln x}$
- 3 Berechne ($n \in \mathbb{N}$). a) $\lim_{x \geq 0} x(\ln x)^n$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^n}{x}$ c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{(\ln x)^n}$
- 4 Schreibe den Term als Potenz von e und berechne dann den Grenzwert.
 a) $\lim_{x \rightarrow 0} x^x$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x-1}}$ c) $\lim_{x \geq 0} |\ln x|^x$
- 5 Berechne.
 a) $\lim_{x \geq 0} x^{\sqrt{x}}$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\sqrt{x}}$ c) $\lim_{x \geq 0} \sqrt{x}^x$
 d) $\lim_{x \geq 0} x^{\sqrt{x}}$ e) $\lim_{x \geq 0} \sqrt{x}^{\sqrt{x}}$ f) $\lim_{x \geq 1} x^{\frac{1}{\ln x}}$
- 6 Berechne mit der Regel von L'HOSPITAL.
 a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\ln(x+2)}{x+1}$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+2)}{x+1}$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln \sqrt{|x-1|}}$
 d) $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}}$ e) $\lim_{x \geq 1} (\ln x)^{x-1}$
- ◇7 Diskutiere und zeichne den Graphen (maximale Definitionsmenge!).
 a) $f(x) = x - 1 + \ln \frac{1}{x}$ c) $f(x) = \frac{1}{\ln x}$ b) $f(x) = (x-2)^2 + \ln(x^2)$
 c) $f(x) = x^2(\ln(x^2) - 1)$ d) $f(x) = \frac{1}{x}(2 + \ln(x^2))$ e) $f(x) = \ln(x^4) - 8(\ln \sqrt{x})^2$
- 8 Diskutiere und zeichne den Graphen (max. Definitionsmenge, Symmetrie!).
 a) $f(x) = \ln|x^2 - 4|$ b) $f(x) = \ln(x^2 - 4)$ c) $f(x) = \ln(4+x) - \ln(4-x)$
- 9 $f_a(x) = \ln|x^2 + a|$
 Diskutiere und zeichne die Scharkurven für $a \in \{-2, -1, 0, 1\}$.
- ◇10 $f(x) = \ln x$
 a) Gib eine Gleichung der Tangente von G_f an, die durch $(0|0)$ geht.
 b) Gib eine Gleichung der Normale von G_f an, die durch $(0|1)$ geht.
 Welcher Kurvenpunkt liegt $(0|1)$ am nächsten?

- c) Gib eine Gleichung der Tangente von G_f an,
die mit der x -Achse einen Winkel von 30° bildet.

- 11** Für welche Zahl ist der Unterschied zwischen ihrer Wurzel und ihrem natürlichen Logarithmus am kleinsten?
- 12** Die Gerade $x=a$ schneide die \ln -Kurve in Q und die x -Achse in R ; die Kurvennormale in Q schneide die x -Achse in S . Bestimme a so, dass der Inhalt des Dreiecks QRS ein Extremum hat. Welches Extremum liegt vor ?
- 13** Auf der \ln -Kurve liege der Punkt $P(a|b)$. P und der Ursprung seien die gegenüberliegenden Ecken eines Rechtecks, von dem 2 Seiten in den Koordinatenachsen liegen.
- a) Für welchen Wert von a ($0 < a < 1$) hat das Rechteck extremen Inhalt ? Wie groß ist dieser ?
- b) a_0 sei die Rechteckbreite für den Fall, dass die \ln -Kurve das Rechteck in inhaltgleiche Teile zerlegt. Stelle eine Gleichung für a_0 auf und zeige, dass sie genau eine Lösung hat. Gib ein Intervall der Länge $0,1$ an, in dem a_0 liegt.
- 14** Die Tangente der \ln -Kurve in $P(a|b)$ schneide die x -Achse in S und die y -Achse in T . P und T seien die gegenüberliegenden Ecken eines Rechtecks, von dem 1 Seite in der y -Achse liegt.
- a) Bestimme den Flächeninhalt des Rechtecks.
- b) Die \ln -Kurve schneide die untere Rechteckseite in U . Bestimme U .
- c) Für welchen a -Wert liegen U und S übereinander ?
- d) Für welchen a -Wert liegt die untere Rechteckseite in der x -Achse ?
- e) Die \ln -Kurve zerlege das Rechteck in 2 Teile. Berechne das Verhältnis der Inhalte dieser Teilflächen.

◊**15** $f(x) = \frac{1}{x(1-\ln x)}$

Diskutiere f und zeichne G_f . (Siehe Beispiel auf Seite 147)

- 16** Auf Seite 144 ist die Schar mit $f_n(x) = x^n \ln x$ abgebildet. Wegen $\lim_{x \rightarrow 0} x^n \cdot \ln x = 0$ münden alle Kurven im Ursprung. Berechne den Winkel, unter dem die Kurven im Ursprung münden.

•17 $f(x) = \frac{1}{x \ln x^e}$

a) Diskutiere F mit $F(x) = \int_e^x f(t) dt$. a) Diskutiere F mit $F(x) = \int_e^x f(t) dt$.

•18 Auf Seite 147 ist eine Schar mit $f_a(x) = \frac{1+a \ln x}{x}$, $a \in \mathbb{R}$ abgebildet.

In (1|1) treffen sich alle Scharkurven. Welche Kurve hat dort

a) einen Extrempunkt ? (Art?)

b) einen Wendepunkt ?

c) die Winkelhalbierende des 1. Quadranten als Tangente ?

•19 Auf Seite 147 ist eine Schar mit $f_a(x) = \frac{1+a \ln x}{x}$, $a \in \mathbb{R}$ abgebildet.

a_1 und a_2 seien Parameterwerte sich rechtwinklig schneidender Kurven.

a) Welche Beziehung besteht zwischen a_1 und a_2 ?

b) Welche Kurve schneidet G_0 rechtwinklig ?

c) Welche Kurve hat keinen rechtwinklig schneidenden Partner ?

20 Auf Seite 147 ist eine Schar mit $f_a(x) = \frac{1+a \ln x}{x}$, $a \in \mathbb{R}$ abgebildet.

a) Zeige: $S(x) = \frac{1}{2} (\ln x)^2$ ist eine Stammfunktion von $s(x) = \frac{\ln x}{x}$.

b) Welche Scharkurven begrenzen mit der x-Achse und der Gerade $x=1$ ein endliches Flächenstück vom Inhalt 0,5 ?

21 Untersuche auf Symmetrie zum Koordinatensystem, diskutiere und zeichne die Kurven. Bestimme die Umkehrfunktion.

a) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

b) $g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

c) $h(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$, $|x| < 1$

d) $k(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{x-1}$, $|x| > 1$

•22 Der hyperbolische Areakosinus

Die Einheitshyperbel $y^2 = x^2 - 1$

a) Zeige: $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 1} - x) = 0$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 1} + x) = 0$

Welche Bedeutung haben demnach die Geraden $y=x$ und $y=-x$ für den Graphen der Funktion mit $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$?

b) Diskutiere die Funktion f und zeichne den Graphen.

c) Zeichne ins selbe Koordinatensystem die Punktmenge mit der Gleichung $y^2 = x^2 - 1$. Diese Kurve heißt Einheitshyperbel.

Der hyperbolische Areakosinus

d) Die Flächenfunktion des Hyperbelsektors:

Stelle $F(x)$ dar mit einer Integralfunktion

$$\text{und zeige } F'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

e) $G(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$

Zeige: $G'(x) = F'(x)$ und $G(1) = F(1)$ und
folgere daraus: $G(x) = F(x)$.

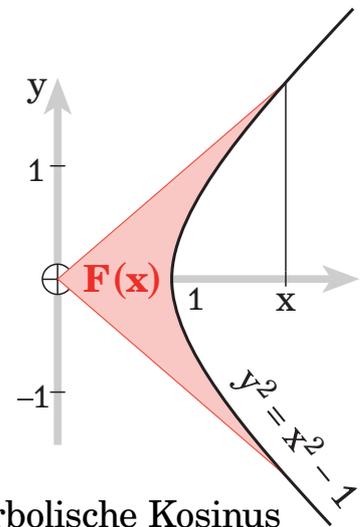
F heißt Areakosinus **arcosh**.

f) $F(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$

Zeige: Die Umkehrfunktion F^{-1} ist der hyperbolische Kosinus

$$\operatorname{arcosh}^{-1}(x) = \operatorname{cosh}(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

Der Zusammenhang mit der Einheitshyperbel führt zum Adjektiv »hyperbolisch«. Die Bezeichnung »Area« (=Fläche) rührt her von der Berechnung des Inhalts des Hyperbelsektors.



•23 Diskutiere und zeichne den Graphen.

Untersuche auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit in den Nahtstellen.

a) $f(x) = x + |\ln(1-x)|$

b) $g(x) = |\ln x| - |x-1|$

24 Diskutiere und zeichne den Graphen.

Untersuche auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit in den Nahtstellen.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x < 1 \\ 1 - \ln x & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{für } x \in]0; e] \\ 3 - \ln(x^2) & \text{für } x \in]e; \infty[\end{cases}$

•25 $f(x) = \begin{cases} (\ln x)^2 & \text{für } 0 < x < k \\ 1 + a(1 - \ln x) & \text{für } k \leq x \end{cases}$ Bestimme a und k so, dass f differenzierbar ist. Zeichne die zugehörige Kurve.

•26 Diskutiere und zeichne den Graphen.

Untersuche die Kurven auf Symmetrie zum Koordinatensystem.

a) $f(x) = \ln|x - \sqrt{x^2+1}|$

b) $g(x) = \ln|x - \sqrt{x^2-1}|$

•27 $f_a(x) = ax + \ln x$

Bestimme die maximale Definitionsmenge D , das Kurvenverhalten am Rand von D , Nullstellen, Ort und Art von Waagrecht- und Flachpunkten und deren Ortlinien.

Skizziere Kurven für $a \in \{-1, -1/e, -0.25, 0\}$ und die Ortlinie der Waagrecht- und Flachpunkte. Bestimme mit dem Verlauf dieser Ortlinie die Bereiche von a , in denen eine Scharkurve keine, 1 oder 2 Nullstellen hat.

$$\text{:28 } f_a(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$$

- a) Bestimme die maximale Definitionsmenge D , das Kurvenverhalten am Rand von D , etwaige Symmetrie zum Koordinatensystem und Nullstellen. Zeige, dass jede Scharkurve $a \neq 0$ derjenigen mit $a=0$ für $x \rightarrow \infty$ beliebig nahe kommt, ohne sie zu schneiden.
- b) Bestimme Ort und Art von Waagrecht- und Flachpunkten. Ermittle die Ortlinien der Waagrecht- und Flachpunkte. Bestimme die Schar $t_a(x)$ der Flachpunkt tangente. Zeige, dass jede Flachpunkt tangente auch die Kurve mit $k(x) = 1 + \ln x$ berührt.
- c) Skizziere Kurven für $a \in \{0, 1/4, 1, 4\}$.

$$\text{:29 } f_a(x) = \ln(x^2 + e^a) - x^2, a \leq 0$$

- a) Bestimme die maximale Definitionsmenge D , das Kurvenverhalten am Rand von D und etwaige Symmetrie zum Koordinatensystem.
- b) Zeige mit der Abschätzung $\ln z < z - 1$ (für $z > 0, z \neq 1$), dass es keinen positiven Funktionswert gibt, und schließe daraus auf die Nullstellen.
- c) Zeige, dass jede Scharkurve für $x \rightarrow \infty$ beliebig nahe herankommt an die Kurve mit $h(x) = \ln(x^2) - x^2$.
- d) Bestimme Ort und Art von Waagrecht- und Flachpunkten. Ermittle die Ortlinien der Waagrecht- und Flachpunkte.
- e) Skizziere Kurven für $a \in \{-2, -1, 0\}$.

$$\text{:30 } f_a(x) = x^{-a} \cdot \ln x^2, a \in \mathbb{N}$$

- a) Bestimme die maximale Definitionsmenge D , das Kurvenverhalten am Rand von D und etwaige Symmetrie zum Koordinatensystem.
- b) Zeige, dass sich alle Scharkurven in einem Punkt B rechts von der y -Achse berühren und bestimme die Gleichung der gemeinsamen Tangente t .
- c) Bestimme Ort und Art der Waagrecht punkte. Ermittle die Gleichung der Kurve, auf der die Waagrecht punkte liegen.
- d) Bestimme Ort und Art der Flachpunkte.
- e) Löse Teilaufgabe **a)** für $a = -1$ und für $a = -2$.
- f) Löse Teilaufgabe **a)** für $a = \frac{1}{2}$ und für $a = -\frac{1}{2}$.
- g) Skizziere Kurven für $a \in \{-1, 0, 1, 2\}$ im Bereich $0 \leq x \leq 3$.

•31 $f_a(x) = (\ln x)^2 - 2a \cdot \ln x$, $a \in \mathbb{N}$

- a) Bestimme die maximale Definitionsmenge D , das Kurvenverhalten am Rand von D und Achsenpunkte.
- b) Bestimme Ort und Art der Waagrechtpunkte.
Ermittle die Gleichung der Kurve, auf der die Waagrechtpunkte liegen.
- c) Bestimme Ort und Art der Flachpunkte.
Ermittle die Gleichung der Kurve, auf der die Flachpunkte liegen.
- d) Berechne den Inhalt der Fläche, die zwischen der x -Achse und einer Scharkurve liegt. Wie groß ist er im Fall $a=1$?
- e) Skizziere Kurven für $a \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ im Bereich $0 \leq x \leq 10$.

Zum Nachdenken

① Reiz und Empfindung

Der Physiologe Ernst Heinrich WEBER (1795 bis 1878) veröffentlicht 1834 seine Untersuchungen über das Hören und über den Tastsinn der Haut. Er formuliert ein Gesetz, das den Zusammenhang zwischen Reiz und Empfindung wiedergibt.

Einer seiner Versuche hätte so aussehen können: Die Hand einer Versuchsperson liegt auf einem Tisch. Auf der Hand liegt ein Gegenstand. Sein Gewicht ist ein Reiz R , dieser verursacht bei der Versuchsperson die (Druck-)Empfindung E . Legt man noch einen Gegenstand dazu, so vergrößert sich der Reiz. Aber nicht immer nimmt man diese Reizverstärkung wahr. Man nimmt sie erst dann wahr, wenn der zusätzliche Reiz einen gewissen Mindestwert (Schwellenwert) überschreitet.

Weber stellt fest: Für eine eben spürbare Steigerung der Empfindung ΔE_0 ist immer dieselbe relative Reizsteigerung $\frac{\Delta R}{R}$ nötig. Weil eine größere relative Reizsteigerung eine größere Änderung der Empfindung auslösen soll, setzt Weber die relative Reizsteigerung proportional zur Änderung der Empfindung: $\Delta E \sim \frac{\Delta R}{R}$

Der Psychologe und Philosoph Gustav Theodor FECHNER (1801 bis 1887) formuliert diesen Zusammenhang mathematisch. Er stellt die Empfindung E dar als Funktion des Reizes R und folgert aus Webers Formel: $\frac{\Delta E}{\Delta R} \approx k \cdot \frac{1}{R}$. Für kleine Reizänderungen ΔR heißt das ungefähr: $\frac{d}{dR} E(R) = k \cdot \frac{1}{R}$. Die Funktion E muss also bis auf eine Konstante gleich sein dem natürlichen Logarithmus: $E(R) = k \cdot \ln R + C$.

Ist R_0 der gerade noch nicht spürbare Reiz, dann gilt

$$0 = E(R_0) = k \cdot \ln R_0 + C \Rightarrow C = -k \cdot \ln R_0$$

$$E(R) = k \cdot \ln R + C = k \cdot \ln R - k \cdot \ln R_0$$

$$E(R) = k \cdot \ln \frac{R}{R_0} \quad \text{Weber-Fechner-Gesetz}$$

Ist R groß gegenüber dem Schwellenwert R_0 , so ist R/R_0 groß gegenüber 1. Der natürliche Logarithmus wächst nur schwach. Das bedeutet: Liegt schon ein starker Reiz vor, dann ist erst eine gewaltige Steigerung des Reizes wahrnehmbar. (Abstumpfung durch Reizüberflutung)

Die Empfindung ist eine messbare Größe, wenn R_0 und k festliegen. Anstelle des natürlichen Logarithmus kann man jeden anderen Logarithmus verwenden. Beim Hören ist die Lautstärke E (Empfindung) abhängig vom Schalldruck R (Reiz). Man misst den Schalldruck in Pa (=N/m²) und die Lautstärke in Phon. Für die Normalfrequenz von 1 kHz ist $E(R) = 20 \cdot \lg \frac{R}{R_0}$.

Der Schwellenreiz R_0 wurde international festgelegt als mittlere Hörschwelle einer repräsentativen Gruppe 20-jähriger Frauen: $R_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ Pa, also $E(R_0) = 0$ Phon.

| | |
|----------|---|
| 0 Phon | Hörschwelle |
| 20 Phon | Taschenuhr in 1m Entfernung |
| 50 Phon | halblaute Unterhaltung in 1m Entfernung |
| 90 Phon | Schreien in 1m Entfernung |
| 120 Phon | Rockmusik (Disco, Konzert) |
| 130 Phon | Schmerzgrenze = Düsentriebwerk in 7m Entfernung |
| 180 Phon | Raketentriebwerk in 7m Entfernung |

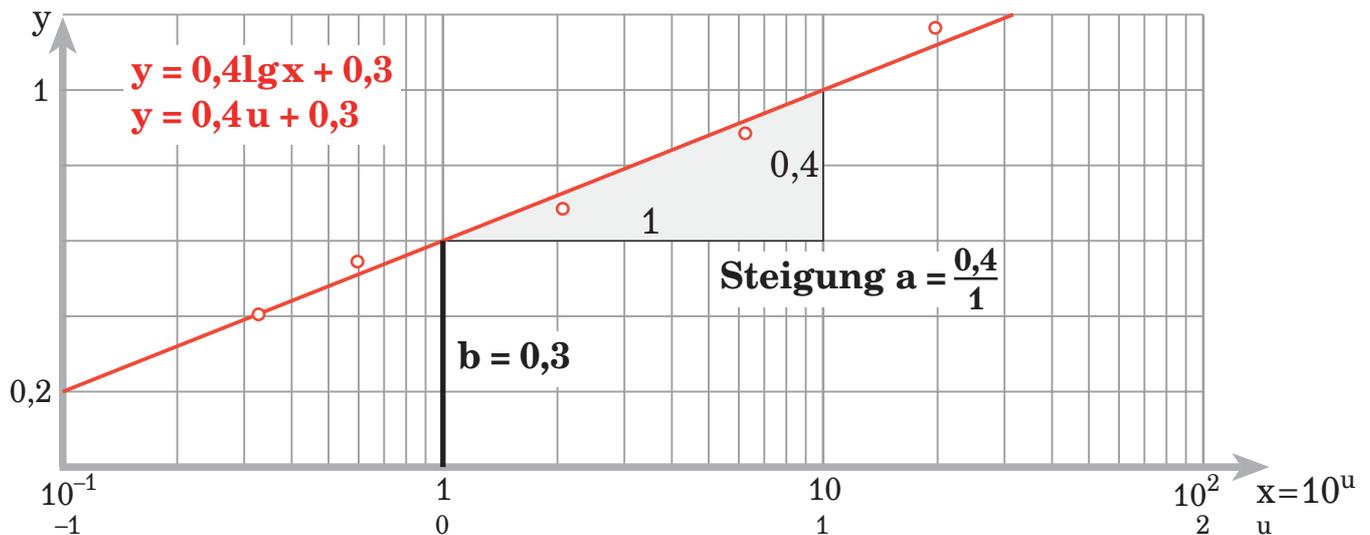
② Logarithmische Papiere

Beim Experimentieren muss man oft aus Messpunkten die Gleichung des zugrunde liegenden Graphen ermitteln. Das geht am einfachsten, wenn der Graph eine Gerade ist. Bei komplizierten Zusammenhängen versucht man, durch geschickte Wahl des Koordinatensystems den Graphen zu einer Gerade zu verformen. Für besonders häufige Verformungen gibt es eigens vorgefertigte Papiere, zum Beispiel die logarithmischen Papiere – das sind Papiere mit 10er-logarithmischen Skalen. (Obacht: Auf logarithmischen Skalen gibt es keine 0.) Man unterscheidet 3 Typen:

- Halb-logarithmisches Papier (Logarithmus-Skala auf der x-Achse, »abszissen-logarithmisch«)

| | | | |
|----------|-------------------------|--------------|-------------|
| Funktion | $y = a \cdot \lg x + b$ | Substitution | $u = \lg x$ |
| Gerade | $y = a \cdot u + b$ | | |

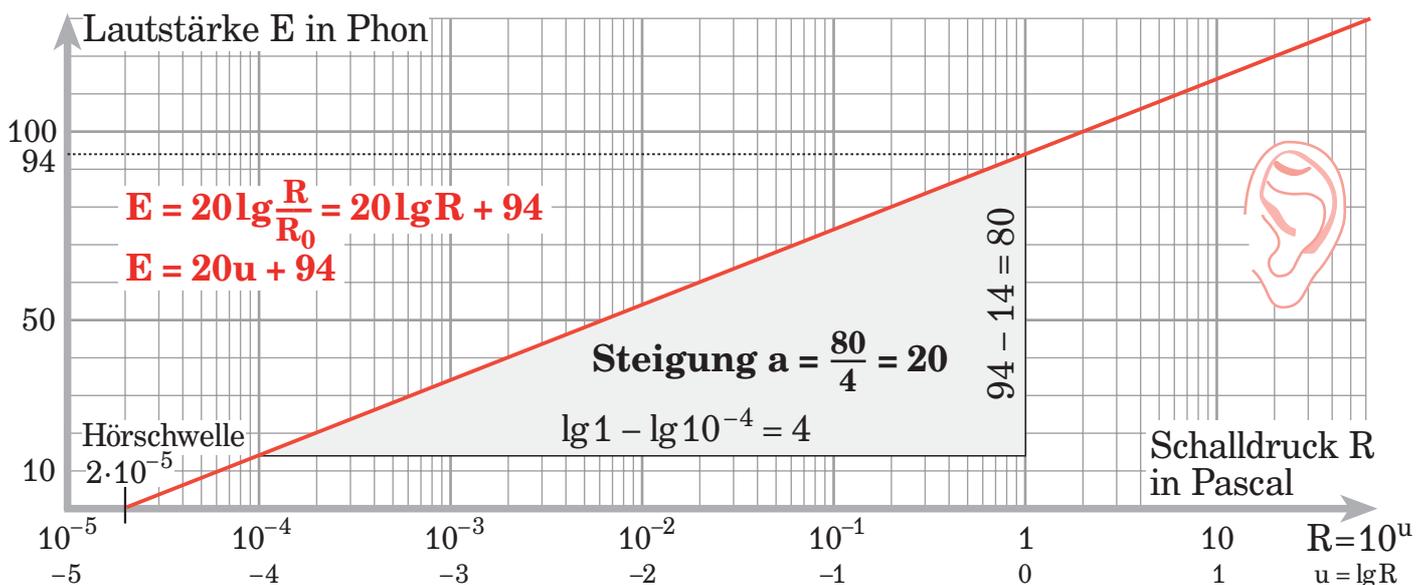
Mit einem Lineal passt man die Gerade an die Messpunkte an und liest ab die Steigung a und die Konstante b , das ist der y -Wert für $x=1$. (Die u -Skala ist auf logarithmischem Papier nicht abgedruckt.)



Beispiel: Weber-Fechner-Gesetz

$$y = E(R) = 20 \cdot \lg \frac{R}{R_0} = 20 \cdot \lg R - 20 \cdot \lg R_0 = 20 \cdot \lg R - 20 \cdot \lg(2 \cdot 10^{-5})$$

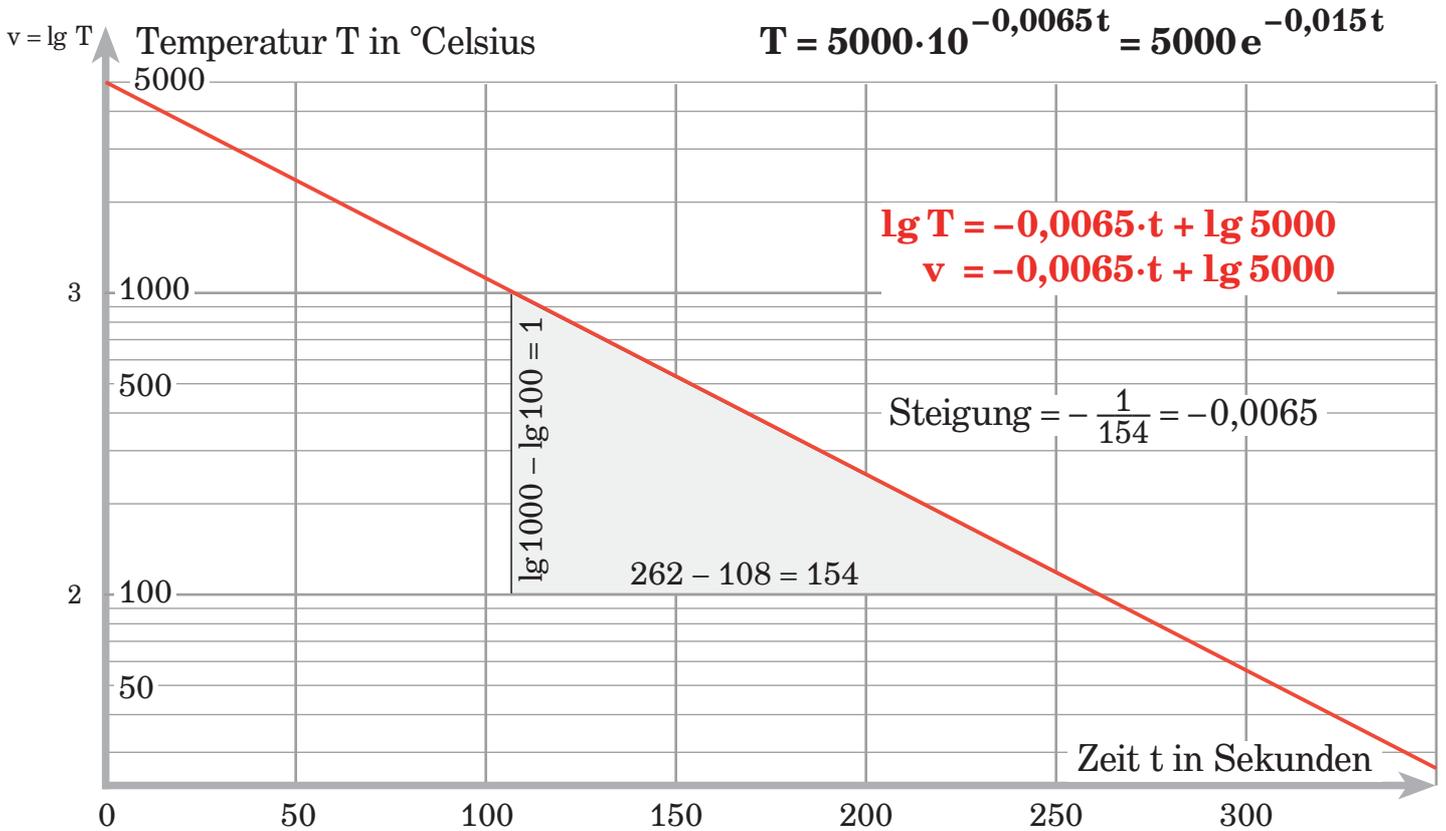
$$y = 20 \cdot \lg R + 94$$



Das Bild zeigt einen weiteren Vorzug der logarithmischen Darstellung: Sie erfasst viele Größenordnungen. So funktioniert unser Ohr im Bereich von 7 Größenordnungen, unser Auge schafft sogar 15 Größenordnungen !

• Halb-logarithmisches Papier (Logarithmus-Skala auf der y-Achse, »ordinaten-logarithmisch«)

Funktion $y = a \cdot e^{bx}$
 logarithmiert $\lg y = \lg a + bx \cdot \lg e$ Substitution $w = \lg y, y = 10^w$
 Gerade $w = (b \cdot \lg e) \cdot x + \lg a$
 Beispiel: Abkühlungs-Gesetz $y = 5000 \cdot 10^{-0,0065x}$



• Doppelt-logarithmisches Papier (Logarithmus-Skala auf x- und y-Achse)

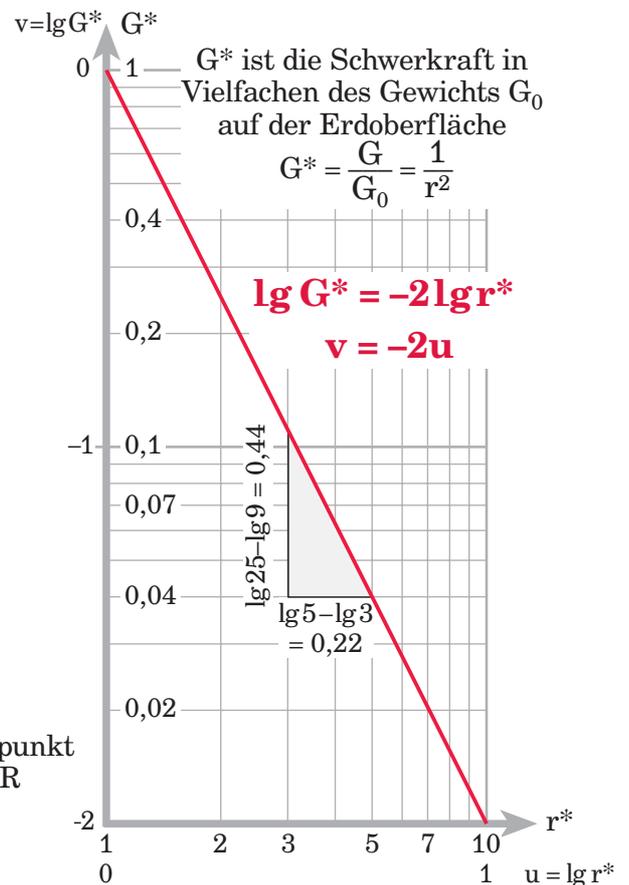
Funktion $y = a \cdot x^b$
 logarithmiert $\lg y = \lg a + b \cdot \lg x$
 Substitution $w = \lg y, y = 10^w$
 $u = \lg x, x = 10^u$
 Gerade $w = b \cdot u + \lg a$
 Beispiel: »Quadratisches Abstandgesetz«

$$y = \frac{a}{x^2}$$

$$w = -2u + \lg a$$

r^* ist Entfernung vom Erdmittelpunkt in Vielfachen des Erdradius R

$$r^* = \frac{r}{R}$$



3 Die harmonische Reihe

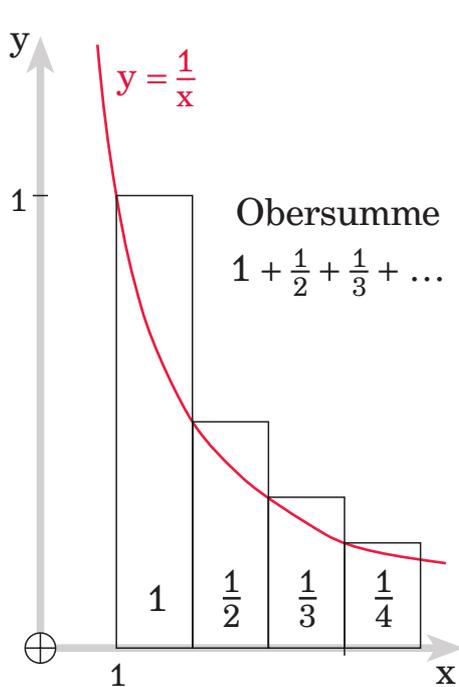
Wie groß ist eigentlich die Summe der positiven Stammbrüche $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$?
 Diese Reihe heißt harmonische Reihe.

Mit dem Computer berechnete Näherungswerte suggerieren die Existenz eines Grenzwerts:

$$\sum_{k=1}^{100000} \frac{1}{k} = 12,09\dots \quad \sum_{k=1}^{200000} \frac{1}{k} = 12,78\dots \quad \sum_{k=1}^{300000} \frac{1}{k} = 13,18\dots$$

Tatsächlich aber kann man beweisen, dass es keinen Grenzwert gibt:

Die harmonische Reihe divergiert. Sie wird sogar beliebig groß.



$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ ist gleich der Obersumme für das Integral

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^{n+1} = \ln(n+1) - 0 = \ln(n+1)$$

also $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} > \ln(n+1)$.

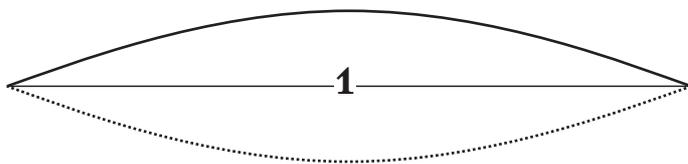
Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = \infty$ gilt auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

Die harmonische Reihe divergiert so langsam wie die ln-Funktion. Dagegen konvergiert die Summe der quadrierten Stammbrüche gegen einen seltsamen Grenzwert:

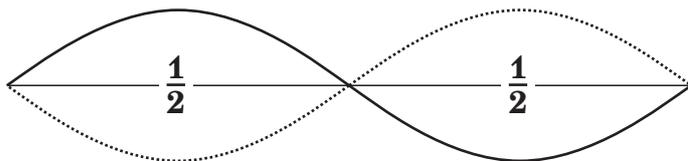
$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{6} \pi^2$$

Das Adjektiv »harmonisch« wirkt in diesem Zusammenhang merkwürdig. Eine Erklärung liefert die Harmonielehre der Musik. Unterteilt man eine Saite im Verhältnis 1:2 oder 1:3 oder 1:4 und zupft die Saitenteile an, so empfindet unser Ohr angenehme (=harmonische) Tonintervalle. Die Summanden der harmonischen Reihe sind die Verhältnisse, in denen die Wellenlängen der »harmonischen Obertöne« zur Wellenlänge des Grundtons stehen.



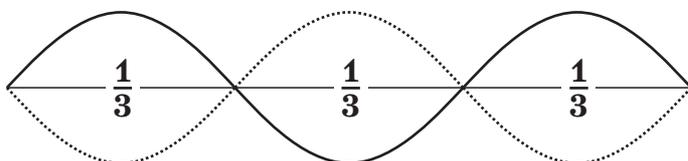
Grundton = 1. Teilton

 C



1. Oberton = 2. Teilton

 c

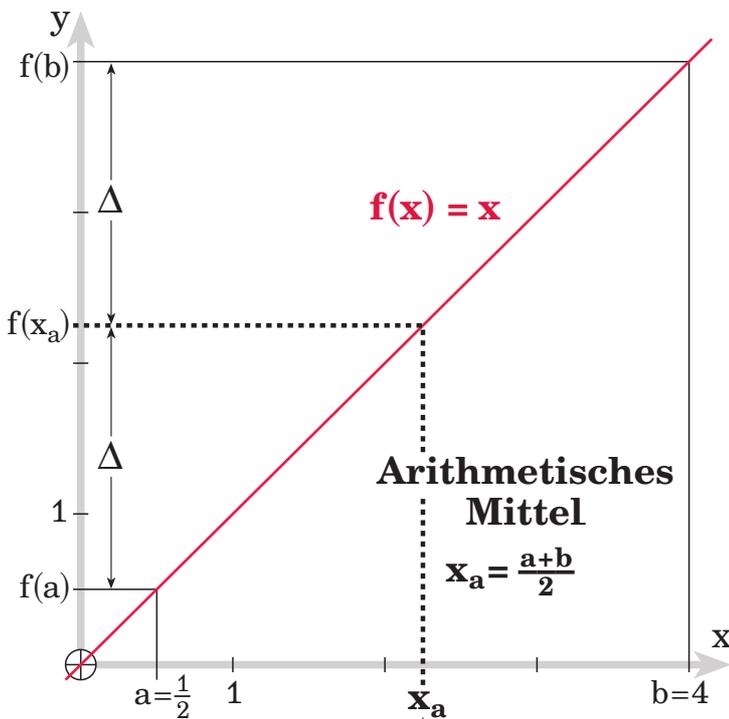


2. Oberton = 3. Teilton

 g

4 Verschiedene Mittel

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ heißt harmonische Reihe, weil jeder Summand (bis auf den ersten) gleich ist dem harmonischen Mittel seiner beiden Nachbarn. Das harmonische Mittel ist meist wenig bekannt. Deshalb seien die 3 wichtigsten mathematischen Mittel vorgestellt.



Das arithmetische Mittel ist auch bekannt als »Durchschnitt«.

Das arithmetische Mittel x_a der Zahlen a und b ist $x_a = \frac{a+b}{2}$, auf der Zahlengerade liegt es in der Mitte zwischen a und b .

Diese Mittelwertbildung lässt sich erweitern auf Funktionswerte.

Ist f eine monotone Funktion, so ist x_m mit $f(x_m) = \frac{f(a)+f(b)}{2}$ ein von f abhängiges Mittel der Zahlen a und b . x_m ist also die Zahl, deren Funktionswert das arithmetische Mittel der Funktionswerte von a und b ist.

Die 3 Mittel hängen ab von der Funktion f :

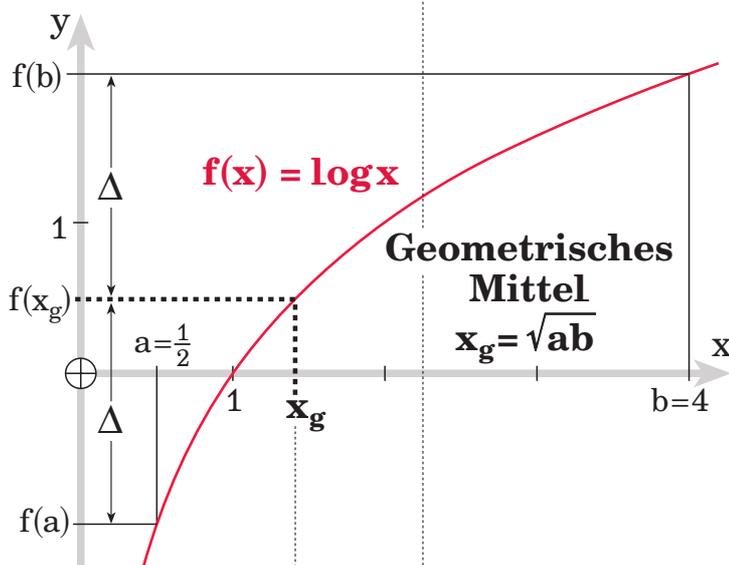
Affine Funktion mit $f(x) = x$

arithmetisches Mittel der Funktionswerte
 $f(x_m) = \frac{f(a)+f(b)}{2} \Rightarrow f(x_a) = x_a = \frac{a+b}{2}$

Logarithmus-Funktion mit $f(x) = \log x$

arithmetisches Mittel der Funktionswerte
 $f(x_m) = \frac{\log a + \log b}{2} = \frac{1}{2} \log(ab) = \log \sqrt{ab}$
 $\Rightarrow f(x_g) = \log x_g = \log \sqrt{ab}$

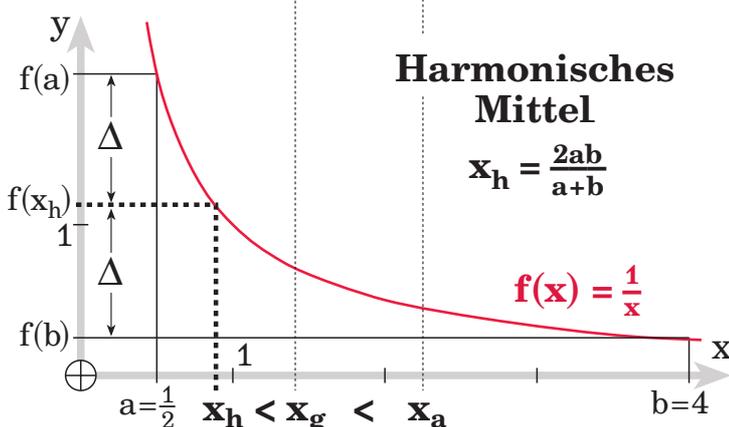
geometrisches Mittel $x_g = \sqrt{ab}$



Kehrwert-Funktion mit $f(x) = \frac{1}{x}$

arithmetisches Mittel der Funktionswerte
 $f(x_m) = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2} = \frac{a+b}{2ab} \Rightarrow f(x_h) = \frac{1}{x_h} = \frac{a+b}{2ab}$

harmonisches Mittel $x_h = \frac{2ab}{a+b}$



5 Ein ungelöstes Problem der Zahlentheorie

Seit Menschen rechnen, wollen sie wissen, wieviel Primzahlen es gibt und wie man sie berechnet. Schon EUKLID (≈300 v.Chr.) hat gewusst, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Sie liegen sogar dichter als die Quadratzahlen, denn die Summe der Primzahl-Kehrwerte divergiert, während die der Quadratzahl-Kehrwerte konvergiert. Bis heute jedoch haben die Primzahlen Geheimnisse bewahrt. So ist es keinem gelungen, eine Formel für die k-te Primzahl zu finden. Auch sucht man immer noch eine Formel P(x) für die Anzahl der Primzahlen bis zur Zahl x. Wenigstens angenähert ist P(x) mit 2 Funktionen beschreibbar:

Die eine steckt im »Primzahlsatz« : $P(x) \approx \frac{x}{\ln x}$.

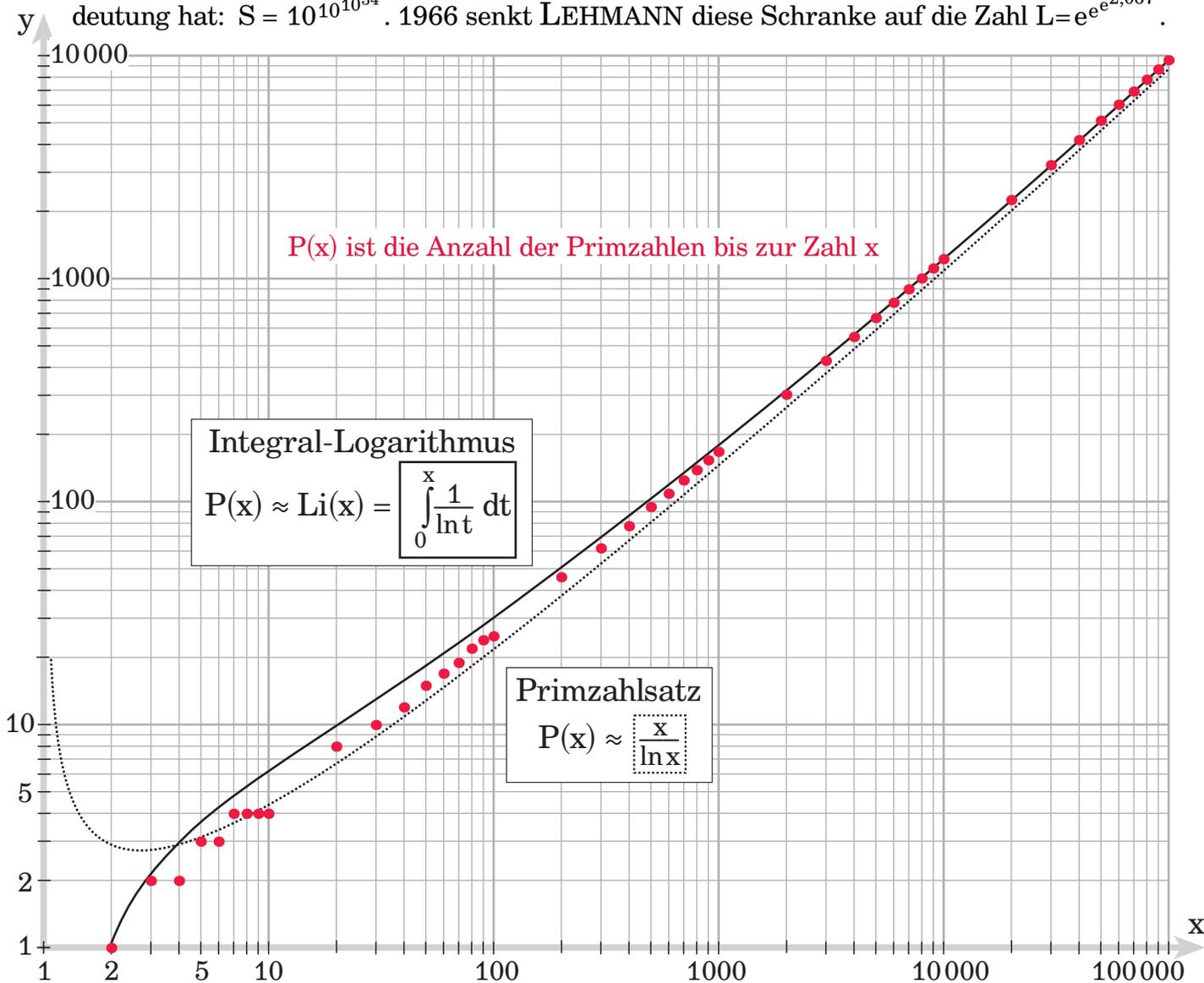
Eine wesentlich bessere Näherung schafft die 2. Funktion, der »Integral-Logarithmus«: $\int_0^x \frac{1}{\ln t} dt$.

Obwohl der Integrand für t=1 nicht definiert ist, lässt sich $\int_0^x \frac{1}{\ln t} dt$ berechnen zu 1,04516...

(vergleiche dazu auch Kapitel IX.3). $P(x) \approx Li(x) = \int_0^x \frac{1}{\ln t} dt = 1,04516... + \int_2^x \frac{1}{\ln t} dt$.

Das ≈-Zeichen gilt in dem Sinn, dass $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Li(x)} = 1$ ist.

Für alle bisher berechneten Werte ist $P(x) - Li(x) < 0$. 1914 beweist LITTLEWOOD, dass diese Differenz unendlich oft das Vorzeichen wechselt. 1933 nennt SKEWES eine obere Grenze S für den 1. Vorzeichenwechsel. Lange Zeit war S die größte Zahl, die in der Mathematik eine Bedeutung hat: $S = 10^{10^{10^{34}}}$. 1966 senkt LEHMANN diese Schranke auf die Zahl $L = e^{e^{2,067}}$.



Computer-Einsatz: Konvergenz von Reihen

Hier einige mit Mathematica berechneten Summenwerte.

Der dazu nötige Rechenbefehl ist der mathematischen Vorschrift des Σ -Zeichens nachempfunden.

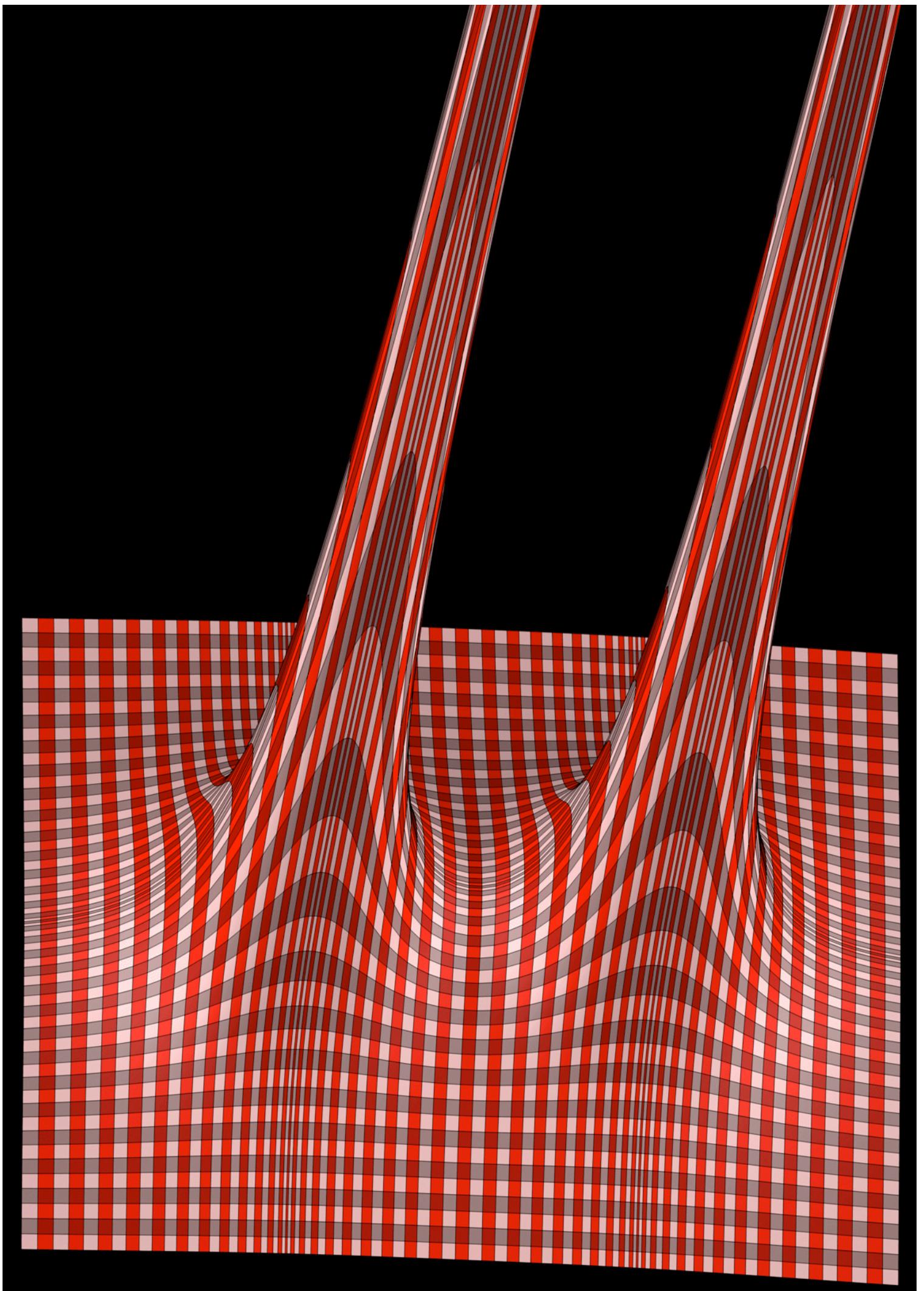
Die Anweisung $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{2k-1}$ erledigt Mathematica mit dem Befehl `Sum[3^(1-2k)/(2k-1),{k,1,n}]`

| Anzahl n der Sum- manden | harmoni- sche Reihe $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ | $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ $\frac{1}{6}\pi^2 = 1.644934066848\dots$ | Mercator für $x=1$ $\sum_{k=1}^n \frac{-(-1)^k}{k}$ $\ln 2 = 0,6931471805599\dots$ | $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{2k-1}$ $\ln 2 = 0,6931471805599\dots$ |
|-----------------------------------|---|--|--|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0,6... |
| 2 | | | | 0,69... |
| 3 | | | | 0.693... |
| 4 | | | | 0.6931... |
| 5 | | | | 0.69314... |
| 6 | | | | 0.693147... |
| 7 | | | | 0.6931471... |
| 8 | | | | 0.6931471... |
| 9 | | | | 0.693147180... |
| 10 | 2,92... | 1,... | 0,6... | 0,6931471805... |
| 10^2 | 5,18... | 1,6... | 0,6... | |
| 10^3 | 7,48... | 1,64... | 0,69... | |
| 10^4 | 9,78... | 1,644... | 0,693... | |
| 10^5 | 12,09... | 1,6449... | 0,69314... | |
| 10^6 | 14,39... | 1,64493... | 0,69314... | |
| 10^7 | 16,69... | 1,64493... | 0,6931471... | |
| 10^8 | 18,99... | 1,6449340... | 0,6931471... | |
| 10^9 | 21,30... | 1,64493406... | 0,693147180... | |
| 10^{10} | 23,60... | 1,644934066... | 0,6931471805... | |
| 10^{11} | 25,90... | 1,6449340668... | 0,69314718055... | |
| 10^{12} | 28,20... | 1,64493406684... | 0,693147180559... | |
| | divergent | konvergent | konvergent | stark konvergent |

Bei der harmonischen Reihe fällt auf, dass sich die Summenwerte um 2,3 vergrößern, wenn sich die Anzahl (>100) der Summanden verzehnfacht. Bei so vielen Summanden sind die Flächenzuwächse bei den $\frac{1}{k}$ -Streifen praktisch gleich den Flächenzuwächsen unter der $\frac{1}{x}$ -Kurve. Der Flächeninhalt unter der $\frac{1}{x}$ -Kurve zwischen 1 und n ist $\ln n$, zwischen 1 und $10n$ ist er $\ln 10n = \ln 10 + \ln n$.

Der Flächeninhalt vergrößert sich also etwa um $\ln 10 \approx 2,3$.

Auf eine solche Eigenschaft wird man erst aufmerksam durch sinnvolle Computer-Mathematik.



VIII. Rationale Funktion

1. Definitionen und Eigenschaften

Eine rationale Zahl r ist der Quotient zweier ganzer Zahlen, Beispiel $r = \frac{3}{4}$.
Der Term einer rationalen Funktion f ist der Quotient zweier Polynome:

$$f(x) = \frac{a_z x^z + a_{z-1} x^{z-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0}, \quad \begin{array}{l} a_z \neq 0 \\ b_n \neq 0 \end{array}$$

$a_z x^z + a_{z-1} x^{z-1} + \dots + a_1 x + a_0$ heißt Zählerpolynom vom Grad z

$b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$ heißt Nennerpolynom vom Grad n

So ist bei $f(x) = \frac{x^4 - 4x^3 + 4x^2}{x^3 - 2x^2 + x}$ der Zählergrad $z=4$ und der Nennergrad $n=3$.

Als Quotientfunktion von Polynomfunktionen ist f stetig und differenzierbar.

Maximale Definitionsmenge D

D ist die Menge der reellen Zahlen \mathbb{R} ohne die Nullstellen des Nenners.

Die Nullstellen des Nenners sind die Definitionslücken.

Man findet sie am schnellsten durch Faktorisieren, im Beispiel:

$$x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1) = x(x-1)^2,$$

Nullstellen des Nenners sind 0 und 1, also $D = \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$.

Faktorisieren und gegebenenfalls Vereinfachen durch Kürzen

Man setzt die Definitionslücken im Zählerpolynom ein.

Ergibt sich 0, so kann man faktorisieren und kürzen, im Beispiel:

Zähler für $x=0$: $0 - 0 + 0 = 0$, also enthält der Zähler den Faktor x ,

Zähler für $x=1$: $1 - 4 + 4 = 1$, also enthält der Zähler nicht den Faktor $(x-1)$

Fürs Faktorisieren des Zählers bieten sich an

manchmal: Ausklammern, Binomische Formel, Erraten eines Faktors

immer: Polynomdivision (falls ein Faktor bekannt ist)

im Beispiel: $x^4 - 4x^3 + 4x^2 = x^2(x^2 - 4x + 4) = x^2(x-2)^2$

$$f(x) = \frac{x^4 - 4x^3 + 4x^2}{x^3 - 2x^2 + x} = \frac{x^2(x-2)^2}{x(x-1)^2} = \frac{x(x-2)^2}{(x-1)^2} = \frac{Z(x)}{N(x)}$$

Von jetzt an arbeitet man nur noch mit dem gekürzten Term

und beachtet die Definitionsmenge, im Beispiel $f(x) = \frac{x(x-2)^2}{(x-1)^2}$, $x \neq 0$, $x \neq 1$.

Nullstellen

Zählerpolynom $Z(x) = 0$

Nullstellen sind nur die Lösungen, die in der Definitionsmenge D liegen,

im Beispiel $Z(x) = x(x-2)^2 = 0 \Rightarrow x=0$ oder $x=2$

die Lösung 0 liegt nicht in D , ist also keine Nullstelle,

die Lösung 2 liegt in D , sie ist 2-fache Nullstelle.

Eine Besonderheit, in der sich viele rationale Funktionen unterscheiden von den Polynomfunktionen, sind Asymptoten ihrer Graphen. Man unterscheidet 2 Sorten: senkrechte Asymptoten und nicht-senkrechte Asymptoten.

Definition Die Stelle $x=a$ heißt **Pol** von f .
 Die Gerade $x=a$ heißt **senkrechte Asymptote** von G_f
 für $x \lesssim a$ beziehungsweise $x \gtrsim a$, wenn gilt
 $\lim_{x \lesssim a} f(x) = \pm\infty$ beziehungsweise $\lim_{x \gtrsim a} f(x) = \pm\infty$.
 Die Gerade $y=mx+t$ heißt **Asymptote** von G_f
 für $x \rightarrow \pm\infty$, wenn gilt $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (mx+t)] = 0$.

» $\pm\infty$ « steht für die Fälle » $+\infty$ « oder » $-\infty$ «.

Anschaulich bedeuten diese Definitionen: Asymptoten sind Geraden, denen eine Kurve G_f beliebig nahe kommt, wenn y oder x ins Unendliche gehen.

Verhalten am Rand der Definitionsmenge

Löcher

Eine (stetig behebbare) Definitionslücke a ist der x -Wert eines Kurvenlochs, wenn der gekürzte Term dort definiert ist – also Loch($a | \frac{Z(a)}{N(a)}$), im Beispiel: Loch($0 | 0$).

Pole, senkrechte Asymptoten

$x=a$ ist Pol von f , wenn a Nullstelle des Nenners $N(x)$ im gekürzten Bruch ist.

Ist diese Nullstelle v -fach, dann heißt auch der Pol v -fach.

Im Beispiel: $f(x) = \frac{x(x-2)^2}{(x-1)^2}$ ist $x=1$ ein 2facher Pol.

Verhalten von G_f links vom Pol a :

$$\lim_{x \lesssim a} \frac{Z(x)}{N(x)} = \lim_{x \lesssim a} \frac{Z(a)}{N(x)}, \text{ wobei } Z(a) \neq 0$$

Verhalten von G_f rechts vom Pol a :

$$\lim_{x \gtrsim a} \frac{Z(x)}{N(x)} = \lim_{x \gtrsim a} \frac{Z(a)}{N(x)}, \text{ wobei } Z(a) \neq 0$$

Die Grenzwerte für $x \gtrsim a$ und $x \lesssim a$ sind gleich $+\infty$ oder $-\infty$;

das Vorzeichen muss eigens bestimmt werden – im Beispiel:

$$\lim_{x \lesssim 1} \frac{x(x-2)^2}{(x-1)^2} = \lim_{x \lesssim 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \gg \frac{1}{+0} \ll = \infty$$

$$\lim_{x \gtrsim 1} \frac{x(x-2)^2}{(x-1)^2} = \lim_{x \gtrsim 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \gg \frac{1}{+0} \ll = \infty$$

Die Kurve geht links und rechts von $x=1$ nach oben ins Unendliche.

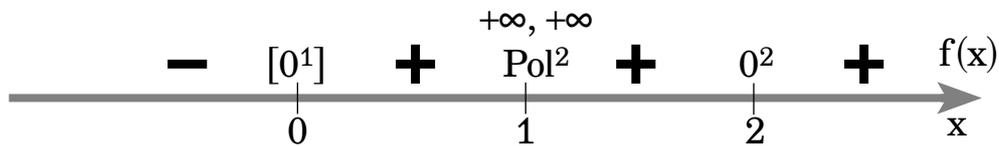
In der Umgebung einer Nullstelle a mit gerader Vielfachheit haben Funktionswerte links und rechts von a das selbe Vorzeichen. Entsprechend haben Funktionswerte das selbe Vorzeichen links und rechts von einem Pol a mit gerader Vielfachheit.

In der Umgebung einer Nullstelle a mit ungerader Vielfachheit haben Funktionswerte links und rechts von a verschiedene Vorzeichen. Entsprechend haben Funktionswerte verschiedene Vorzeichen links und rechts von einem Pol a mit ungerader Vielfachheit.

Etwas salopp, aber einprägsam:

Vorzeichenwechsel bei ungeraden Polen,
kein Vorzeichenwechsel bei geraden Polen.

Das Verhalten von G_f in der Umgebung von Polen findet man auch mit der Übersicht übers Vorzeichen von $f(x)$. Man markiert die Nullstellen und Definitionslücken und berücksichtigt die Vielfachheit der Nullstellen und Polstellen:



Nicht-senkrechte Asymptoten, asymptotische Kurven

sind bestimmt von Zählergrad z und Nennergrad n :

| | | |
|-----------|--|---|
| $z < n$ | Die x -Achse ist Asymptote | $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ |
| $z = n$ | Die Waagrechte $y = \frac{a_z}{b_n}$ ist Asymptote | $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{a_z}{b_n}$ |
| $z = n+1$ | Schräge Asymptote | } $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \infty$ |
| $z > n+1$ | »Asymptotische Polynomkurve« vom Grad $z-n$ | |

In den ersten beiden Fällen kann man die Asymptote gleich am Term ablesen.

Beweis: Man kürzt den Term $\frac{a_z x^z + a_{z-1} x^{z-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0}$ mit x^n ($x \neq 0$).

$$f(x) = \frac{a_z x^{z-n} + a_{z-1} x^{z-1-n} + \dots + a_1 x^{1-n} + a_0 x^{-n}}{b_n + b_{n-1} x^{-1} + \dots + b_1 x^{1-n} + b_0 x^{-n}}$$

$$\text{Fall } z < n: \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{0+0+\dots+0}{b_n+0+\dots+0} = 0$$

$$\text{Fall } z = n: \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_z + a_{z-1} x^{-1} + \dots + a_1 x^{1-n} + a_0 x^{-n}}{b_n + b_{n-1} x^{-1} + \dots + b_1 x^{1-n} + b_0 x^{-n}} = \frac{a_z}{b_n}$$

In den letzten beiden Fällen ist Polynomdivision angesagt.

Beweis: $(a_z x^z + a_{z-1} x^{z-1} + \dots + a_0) : (b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0)$

$$= \boxed{\frac{a_z}{b_n} x^{z-n} + \dots} + \frac{\text{Rest}}{\text{Nenner}} \quad (\text{Grad des Rests} < \text{Grad des Nenners})$$

$A(x) = \frac{a_z}{b_n} x^{z-n} + \dots$ ist ein Polynom vom Grad $z-n$; seiner Polynomkurve schmiegt sich G_f asymptotisch an, denn $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\text{Rest}}{\text{Nenner}} = 0$

Im Beispiel des gekürzten Terms $f(x) = \frac{x(x-2)^2}{(x-1)^2} = \frac{x^3-4x^2+4x}{x^2-2x+1}$ ist $z=3$ und $n=2$; es gilt $z = n+1$, die Kurve hat eine schräge Asymptote.

Polynomdivision $(x^3-4x^2+4x):(x^2-2x+1) = x-2 + \frac{-x+2}{(x-1)^2}$

$$\begin{array}{r} x^3-4x^2+4x \\ \underline{x^3-2x^2+x} \\ -2x^2+3x \\ \underline{-2x^2+4x-2} \\ -x+2 \quad (\text{Rest}) \end{array}$$

Das Ergebnis $f(x) = x-2 + \frac{-x+2}{(x-1)^2}$ besteht aus:

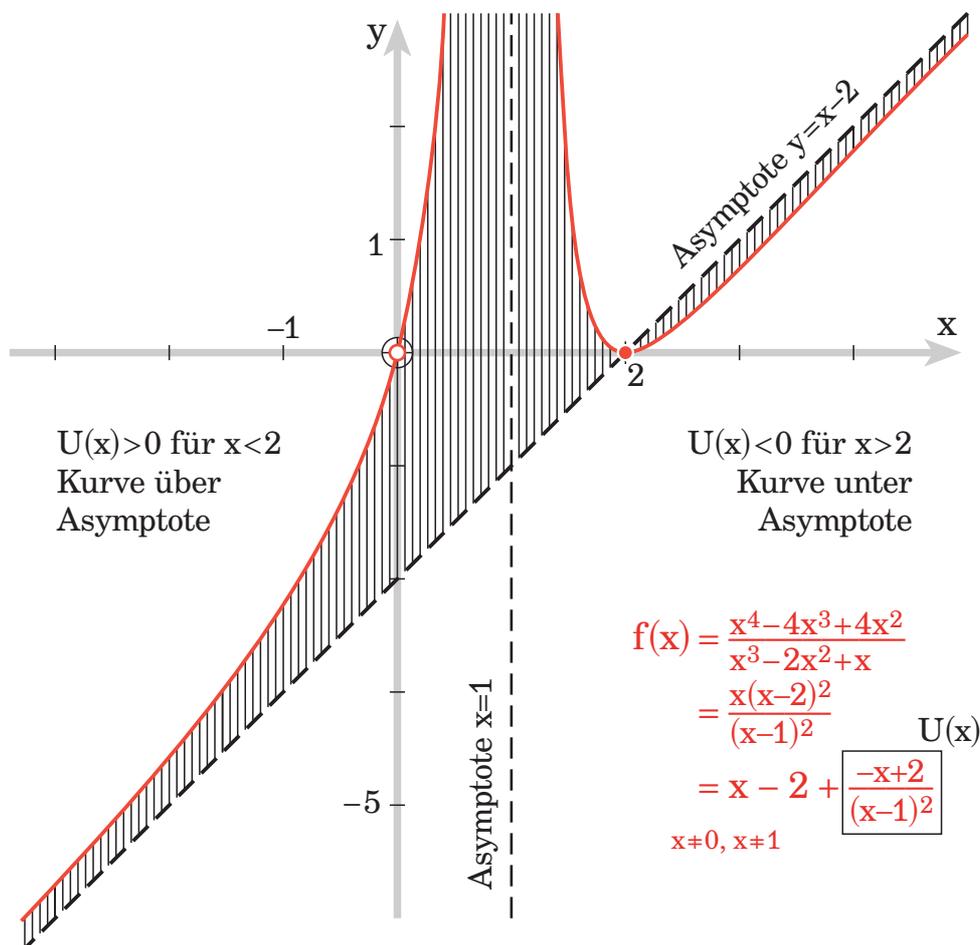
Polynom $A(x) = x-2$ und Bruch $U(x) = \frac{-x+2}{(x-1)^2}$.

$A(x)$ ist der asymptotische Term, er beschreibt die Asymptote $y = A(x) = x-2$.

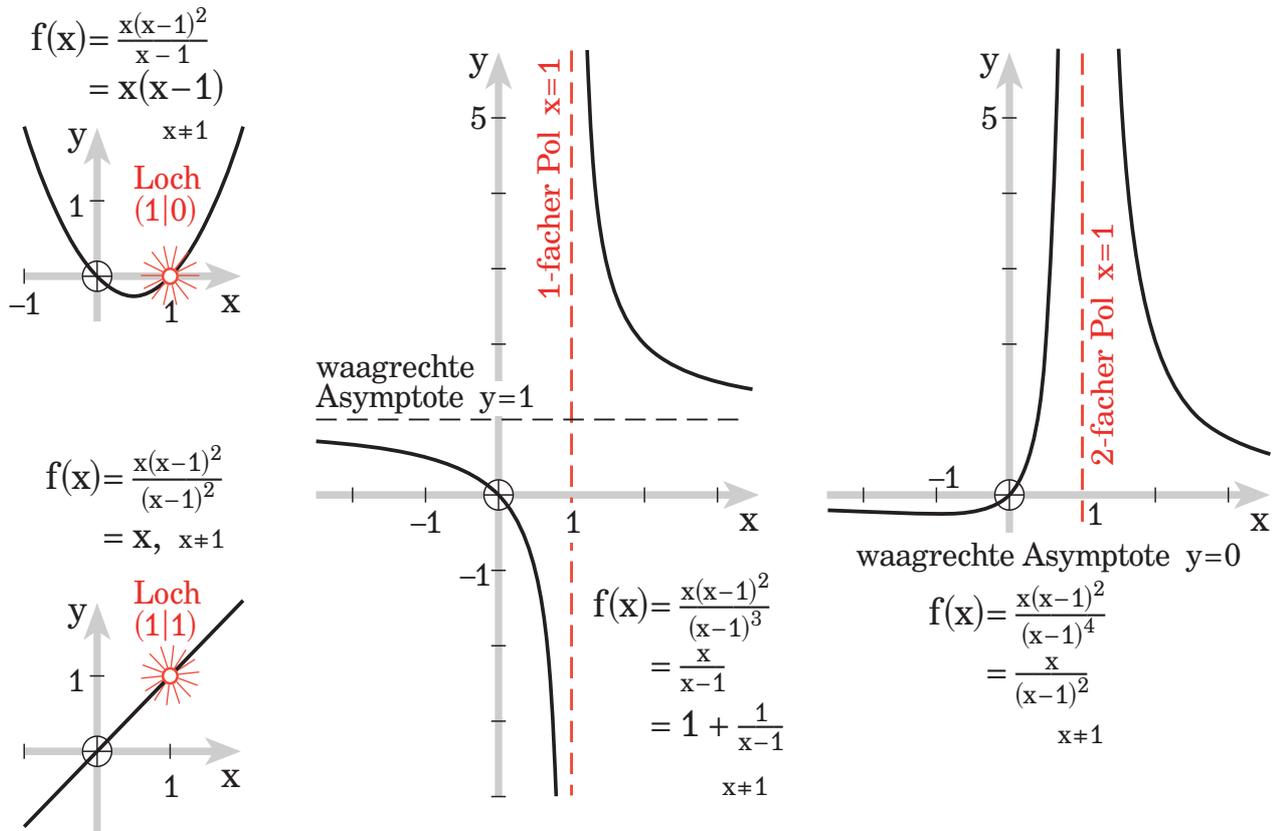
$U(x)$ ist der Differenzterm, er beschreibt den y -Unterschied von Kurve und Asymptote. Er geht gegen 0 für $x \rightarrow \pm\infty$, und er ist gleich 0, falls sich Kurve und Asymptote schneiden; im Beispiel ist das der Fall für $x=2$, das ist die doppelte Nullstelle.

$$U(x) = f(x) - (mx+t) = \frac{x(x-2)^2}{(x-1)^2} - (x-2) = \frac{-x+2}{(x-1)^2}$$

Ist $U(x)$ positiv, so liegt die Kurve über ihrer Asymptote,
ist $U(x)$ negativ, so liegt die Kurve unter ihrer Asymptote.



Die folgende Serie veranschaulicht den Einfluss der Nennerpotenz bei sonst unveränderten Faktoren.



Diskussion einer Kurve

Beispiel: $f(x) = \frac{3x^4 + 14x^3 - 54x - 27}{4x^3 - 12x - 8}$

Maximale Definitionsmenge D

Nenner = $4(x^3 - 3x - 2)$ ist gleich 0 für $x=-1$. Zweimalige Polynomdivision durch $(x+1)$ ergibt: Nenner = $4(x+1)^2(x-2)$.

Definitionsmenge $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$

Faktorisieren

Zähler = $3(x^4 + \frac{14}{3}x^3 - 18x - 9)$.

Als ganzzahlige Nullstellen kommen infrage: $\pm 1, \pm 3, \pm 9$.

Durch Probieren findet man -3 als Nullstelle, also

Zähler = $(x+3)(3x^3 + 5x^2 - 15x - 9)$.

-3 ist auch Nullstelle der 2. Klammer, also

Zähler = $(x+3)^2(3x^2 - 4x - 3)$

$f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{(x+3)^2(3x^2 - 4x - 3)}{4(x+1)^2(x-2)}$

Nullstellen

$$Z(x) = 0 \Rightarrow x = -3 \text{ (2-fach) und } x_{\pm} = \frac{2 \pm \sqrt{13}}{3} \text{ (je 1fach)}$$

Verhalten am Rand von D

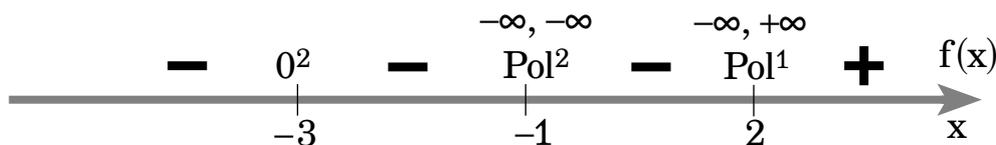
Pol $x = -1$ (2-fach, kein Vorzeichenwechsel)

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{Z(x)}{N(x)} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{4 \cdot 4}{4(x+1)^2 \cdot (-3)} = \gg \frac{16}{-12 \cdot (+0)} \ll = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{Z(x)}{N(x)} = -\infty$$

Pol $x = 2$ (1-fach, Vorzeichenwechsel)

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{Z(x)}{N(x)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{25 \cdot 1}{4 \cdot 9(x-2)} = \gg \frac{25}{36 \cdot (-0)} \ll = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{Z(x)}{N(x)} = +\infty$$

Oder statt Grenzwertrechnung Übersicht übers Vorzeichen von $f(x)$



Der Zählergrad ist um 1 größer als der Nennergrad, also gibt es eine schräge Asymptote.

Polynomdivision ergibt $f(x) = \frac{3}{4}x + \frac{7}{2} + \frac{(3x-1)^2}{4(x+1)^2(x-2)} = A(x) + U(x)$

Asymptote $y = A(x) = \frac{3}{4}x + \frac{7}{2}$, also $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

Für $x = \frac{1}{3}$ hat der Differenzterm $U(x)$ eine 2fache Nullstelle;

G_f berührt die Asymptote in $(\frac{1}{3} | A(\frac{1}{3})) = (\frac{1}{3} | \frac{15}{4})$.

Für $x < 2$ und $x \neq \frac{1}{3}$ ist $U(x) < 0$, die Kurve liegt unter der Asymptote, für $x > 2$ ist $U(x) > 0$, die Kurve liegt über der Asymptote.

Waagrechtspunkte

Die Berechnung von $f'(x)$ ist sehr aufwändig. Am ehesten erträglich ist

die Ableitung von $f(x) = \frac{3}{4}x + \frac{7}{2} + \frac{(3x-1)^2}{4(x+1)^2(x-2)}$. Nach langer Rechnung,

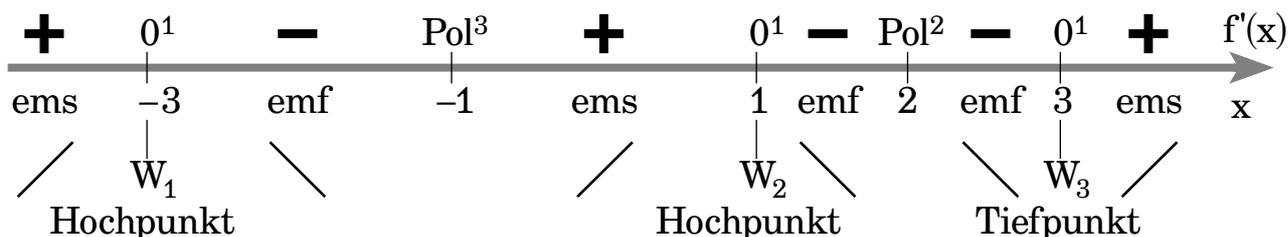
Faktorisieren und Kürzen ergibt sich $f'(x) = \frac{3 \cdot (x+3)(x-1)(x-3)(x^2+1)}{4(x+1)^3(x-2)^2}$.

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -3$ (1fach), $y = f(-3) = 0$, $W_1(-3|0)$

$\Rightarrow x = 1$ (1fach), $y = f(1) = 4$, $W_2(1|4)$

$\Rightarrow x = 3$ (1fach), $y = f(3) = \frac{27}{4}$, $W_3(3|\frac{27}{4})$

Monotonie



Flachpunkte

Die Untersuchung der 2. Ableitung sprengt den üblichen Rahmen.

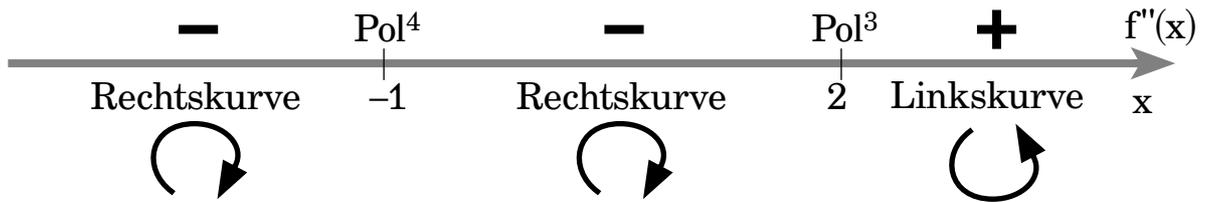
$$\text{Es ergibt sich } f''(x) = \frac{3}{2} \cdot \frac{3x^4 - 12x^3 + 50x^2 - 52x + 27}{(x+1)^4(x-2)^3}.$$

Der Zähler ist positiv, wie eine höchst trickreiche Umformung zeigt:

$$3x^4 - 12x^3 + 50x^2 - 52x + 27 = 3(x-1)^4 + 8(4x^2 - 5x + 3).$$

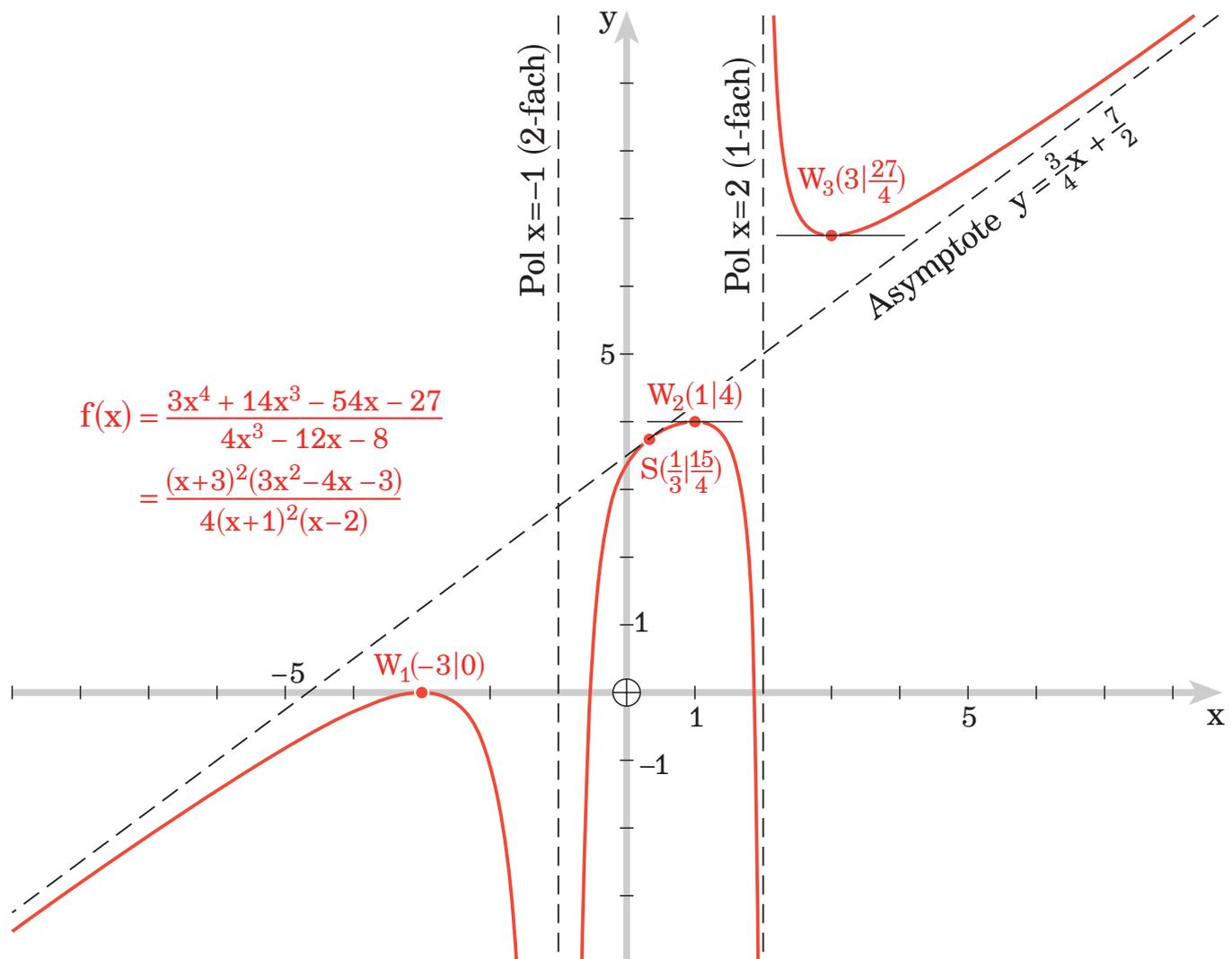
Es gibt also keine Flachpunkte – und damit keine Wendepunkte.

Krümmung



Aus dem Bild liest man die Wertemenge ab

$$W =]-\infty; 4] \cup [\frac{27}{4}; +\infty[\text{ oder } W = \mathbb{R} \setminus]4; \frac{27}{4}[$$



Diskussion einer Schar

Beispiel: $f_a(x) = \frac{x^2 + x - ax}{x+1}$

$$f'_a(x) = \frac{x^2 + 2x + 1 - a}{(x+1)^2} \quad f''_a(x) = \frac{2a}{(x+1)^3}$$

Maximale Definitionsmenge $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Faktorisieren $f_a(x) = \frac{x(x+1-a)}{x+1} = \frac{Z(x)}{N(x)}$

Nullstellen

$$Z(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \begin{array}{l} \text{ist 1-fach, falls } a \neq 1 \\ \text{ist 2-fach, falls } a = 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow x = a-1 \text{ ist 1-fach, falls } a \neq 0 \text{ und } a \neq 1$$

Die Nullstelle 0 hängt nicht ab vom Parameter, also gilt sie für jede Scharkurve G_a ; alle Scharkurven laufen durch $(0|0)$.

Verhalten am Rand von D

$$N(x) = 0 \Rightarrow \text{Pol } x = -1, \text{ falls } a \neq 0 \text{ (1fach, Vorzeichenwechsel)}$$

Der Pol $x = -1$ hängt nicht ab vom Parameter, also haben alle Scharkurven bis auf G_0 die senkrechte Asymptote $x = -1$.

$$\text{Verhalten von } G_a \text{ links vom Pol } -1: \lim_{x \nearrow -1} f_a(x) = \gg \frac{a}{-0} \ll = \begin{cases} -\infty \text{ für } a > 0 \\ +\infty \text{ für } a < 0 \end{cases}$$

$$\text{Verhalten von } G_a \text{ rechts vom Pol } -1: \lim_{x \searrow -1} f_a(x) = \gg \frac{a}{0} \ll = \begin{cases} +\infty \text{ für } a > 0 \\ -\infty \text{ für } a < 0 \end{cases}$$

$$\text{Im Fall } a=0 \text{ ergibt sich } f_0(x) = \frac{x(x+1)}{x+1} = x,$$

$x = -1$ ist jetzt eine stetig behebbare Definitionslücke:
die Kurve G_0 hat das Loch $(-1|-1)$.

$$\text{Polynomdivision: } f_a(x) = (x^2 + x - ax):(x+1) = x - a + \frac{a}{x+1}$$

Schräge Asymptoten $y=x-a$ ($a \neq 0$), also $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_a(x) = -\infty$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} f_a(x) = \infty$.

Fall $a=0$: G_0 ist eine Gerade mit dem Loch $(-1|-1)$.

Fall $a>0$: G_f liegt $\begin{cases} \text{über der Asymptote für } x \rightarrow +\infty. \\ \text{unter der Asymptote für } x \rightarrow -\infty. \end{cases}$

Fall $a<0$: G_f liegt $\begin{cases} \text{unter der Asymptote für } x \rightarrow +\infty. \\ \text{über der Asymptote für } x \rightarrow -\infty. \end{cases}$

Waagrechtunkte

$$f'_a(x) = \frac{x^2 + 2x + 1 - a}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - a}{(x+1)^2} = 1 - \frac{a}{(x+1)^2}$$

$$f'_a(x) = 0 \Rightarrow (x+1)^2 = a$$

Fall $a < 0$: G_a hat keinen Waagrechtpunkt.

Fall $a = 0$: Die Lösung $x = -1$ ist Definitionslücke,

G_0 (Gerade!) hat keinen Waagrechtpunkt.

Fall $a > 0$: G_a hat 2 Waagrechtunkte mit den x -Werten $x_{\pm} = -1 \pm \sqrt{a}$ die zugehörigen y -Werte berechnet man am besten mit dem faktorisierten Funktionsterm:

$$y_{\pm} = f_a(x_{\pm}) = \frac{x_{\pm}(x_{\pm} + 1 - a)}{x_{\pm} + 1} = \frac{(-1 \pm \sqrt{a})(\pm \sqrt{a} - a)}{\pm \sqrt{a}} = (-1 \pm \sqrt{a})(1 \mp \sqrt{a})$$

$$y_{\pm} = -(-1 \pm \sqrt{a})(-1 \pm \sqrt{a}) = -(-1 \pm \sqrt{a})^2$$

$$\text{Waagrechtunkte } W_{\pm}(-1 \pm \sqrt{a} \mid -(-1 \pm \sqrt{a})^2)$$

Kurve, auf der die Waagrechtunkte liegen:

$y_{\pm} = -(-1 \pm \sqrt{a})^2 = -x_{\pm}^2$, kurz $y = \text{wap}(x) = -x^2$, also unten offene Normalparabel.

Art der Waagrechtunkte:

$$f''_a(x_{\pm}) = \frac{2a}{(x_{\pm} + 1)^3} = \frac{2a}{(x_{\pm} + 1)^2(x_{\pm} + 1)} = \frac{2a}{a(\pm \sqrt{a})} = \pm \frac{2}{\sqrt{a}}$$

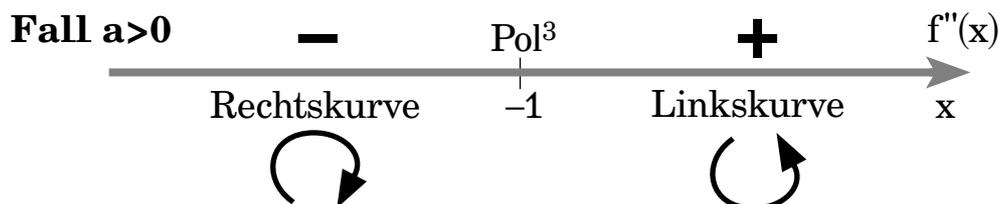
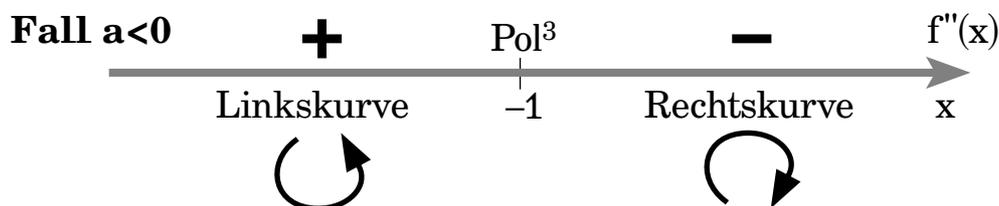
$$f''_a(x_{-}) = -\frac{2}{\sqrt{a}} < 0 \Rightarrow W_{-}(-1 - \sqrt{a} \mid -(-1 - \sqrt{a})^2) \text{ sind Hochpunkte.}$$

$$f''_a(x_{+}) = +\frac{2}{\sqrt{a}} > 0 \Rightarrow W_{+}(-1 + \sqrt{a} \mid -(-1 + \sqrt{a})^2) \text{ sind Tiefpunkte.}$$

Flachpunkte

gibt es im Fall $a \neq 0$ nicht, weil $f''_a(x)$ keine Nullstellen hat. Im Fall $a = 0$ ist G_0 eine Gerade mit Loch; jeder Geradenpunkt ist Flachpunkt.

Krümmung

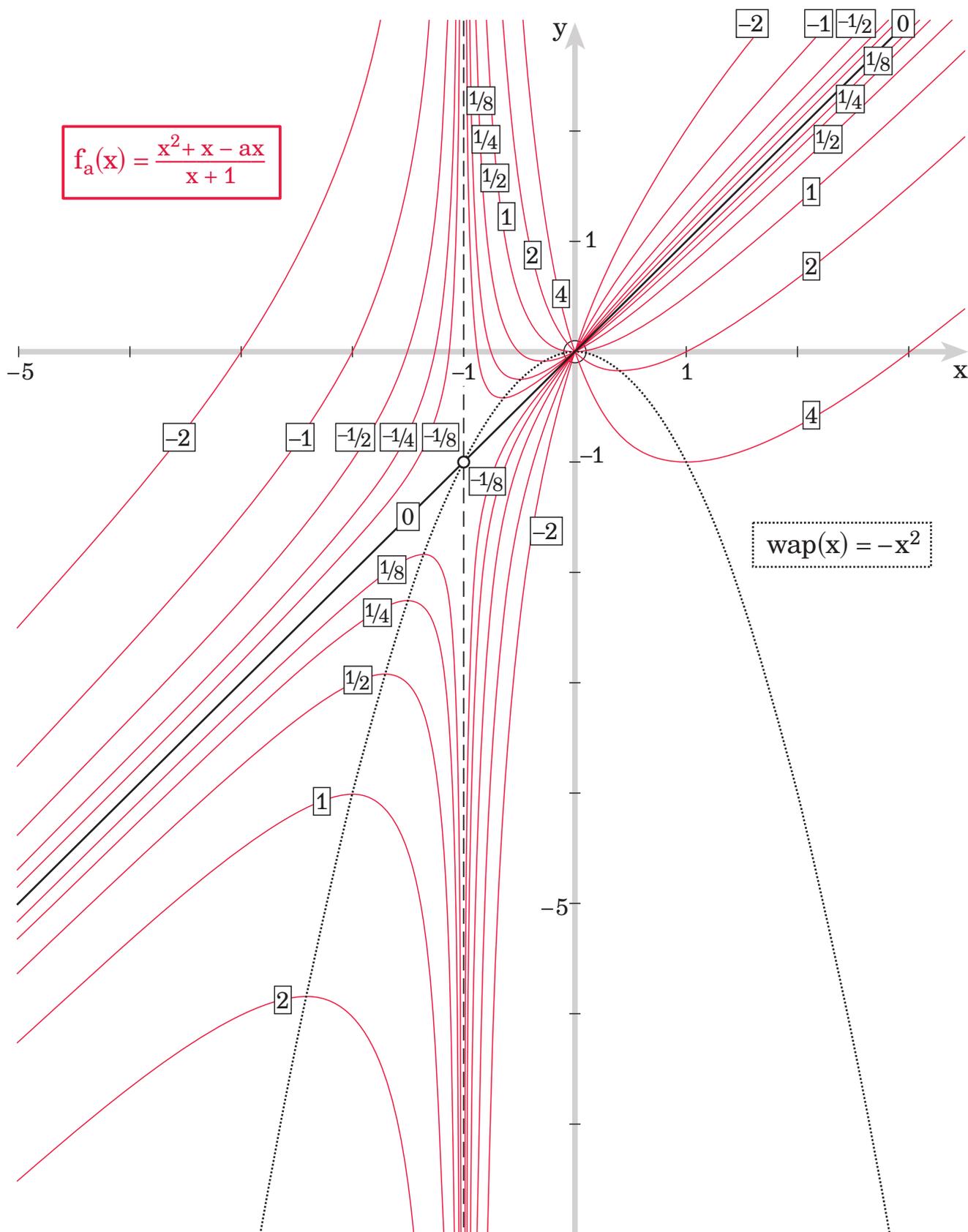


Dem Bild entnimmt man die Wertemenge W , sie hängt ab von a :

$$a < 0: W = \mathbb{R}$$

$$a = 0: W = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$a > 0: W = \mathbb{R} \setminus]h;t[\text{ mit } h = -(1+\sqrt{a})^2 \text{ und } t = -(1-\sqrt{a})^2$$



Aufgaben

◇1 Bestimme Nullstellen und Asymptoten und skizziere die Graphen.

a) $f(x) = \frac{1}{x}$ b) $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$ c) $f(x) = \frac{x+1}{x}$ d) $f(x) = \frac{x}{x+1}$

◇2 Bestimme die Nullstellen und asymptotischen Kurven und skizziere die Graphen.

a) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ b) $f(x) = x - \frac{1}{x}$ c) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ d) $f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$

◇3 Bestimme die Nullstellen und asymptotischen Kurven und skizziere die Graphen.

a) $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$ b) $f(x) = x - \frac{1}{x^2}$ c) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ d) $f(x) = x^2 - \frac{1}{x^2}$

◇4 Bestimme Nullstellen und Asymptoten und skizziere die Graphen.

a) $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ b) $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ c) $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$ d) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$

◇5 Bestimme Nullstellen und Asymptoten und skizziere die Graphen.

a) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ b) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ c) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ d) $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$

6 Bestimme Nullstellen und Asymptoten und skizziere die Graphen.

a) $f(x) = \frac{-x^3}{x^4+x^2}$ b) $f(x) = \frac{1-x^2}{x^4-1}$ c) $f(x) = \frac{x+x^3}{x-x^5}$

•7 Bestimme Nullstellen und Asymptoten und skizziere die Graphen.

a) $f(x) = \frac{x}{x+1}$ b) $f(x) = \frac{|x|}{x+1}$ c) $f(x) = \frac{x}{|x|+1}$
 d) $f(x) = \frac{|x|}{|x|+1}$ e) $f(x) = \frac{x}{|x+1|}$ f) $f(x) = \left| \frac{x}{x+1} \right|$

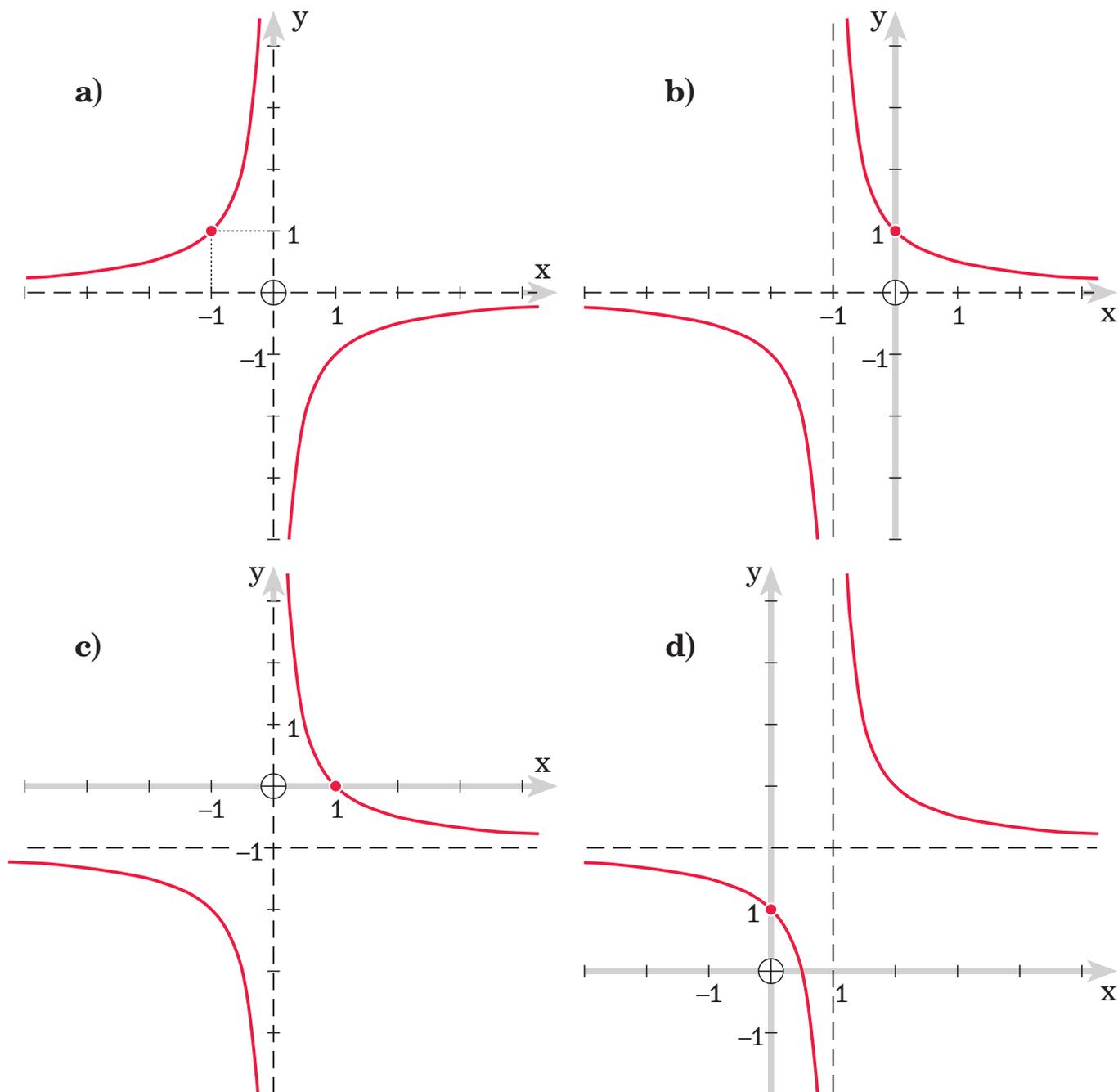
•8 Bestimme Nullstellen und Asymptoten und skizziere die Graphen.

a) $f(x) = \frac{|x|}{x^2+x}$ b) $f(x) = \frac{x}{x^2+|x|}$ c) $f(x) = \frac{|x^2-1|}{x^3-x}$ d) $f(x) = \frac{x}{|x^2-x|}$

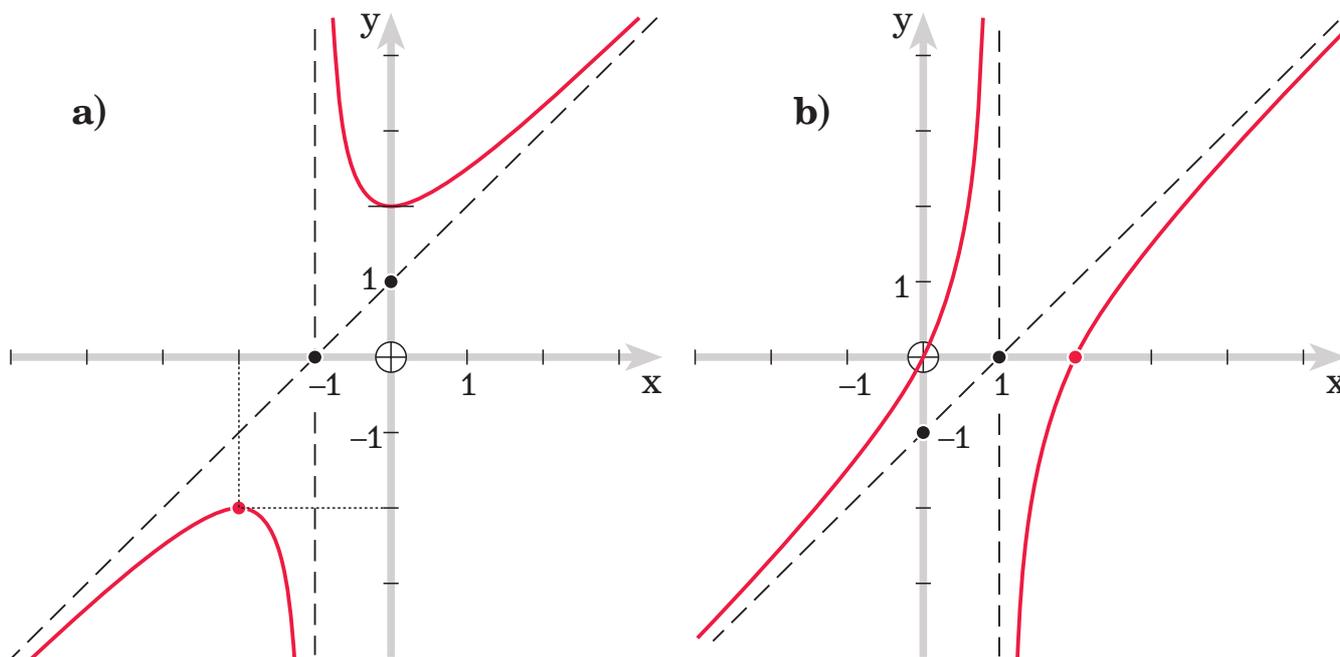
•9 Gib möglichst einfache Terme von Funktionen an, deren Kurven folgende Asymptoten haben:

- a) $x = 1$ b) $x = 1$ und $x = -2$
 c) $y = 1$ d) $y = -1$ und $x = -1$
 e) $y = x$ f) $y = x + 1$ und $x = 3$

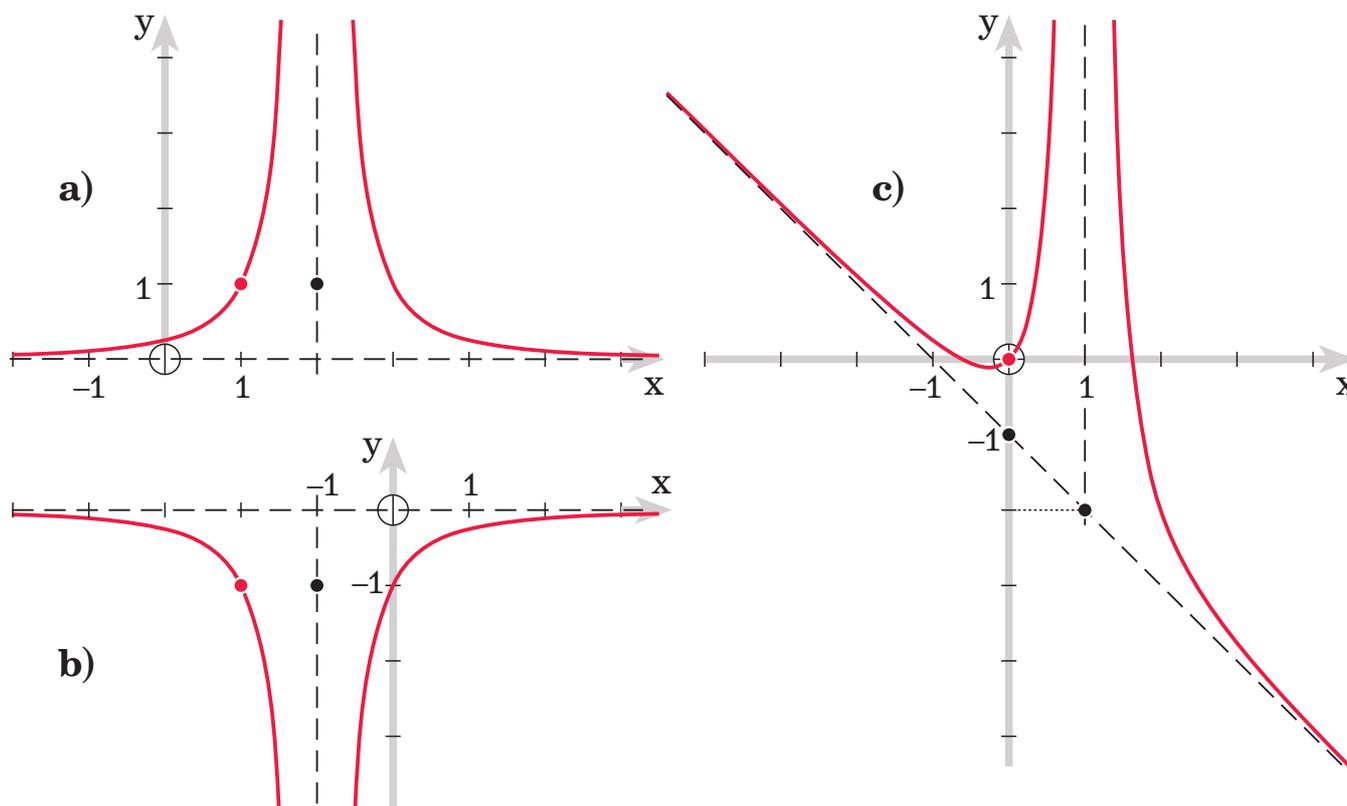
◊10 Die Bilder zeigen Kurven rationaler Funktionen mit einem 1fachen Pol und einer waagrechten Asymptote sowie Kurvenpunkte mit ganzzahligen Koordinaten. Stelle den Funktionsterm auf.



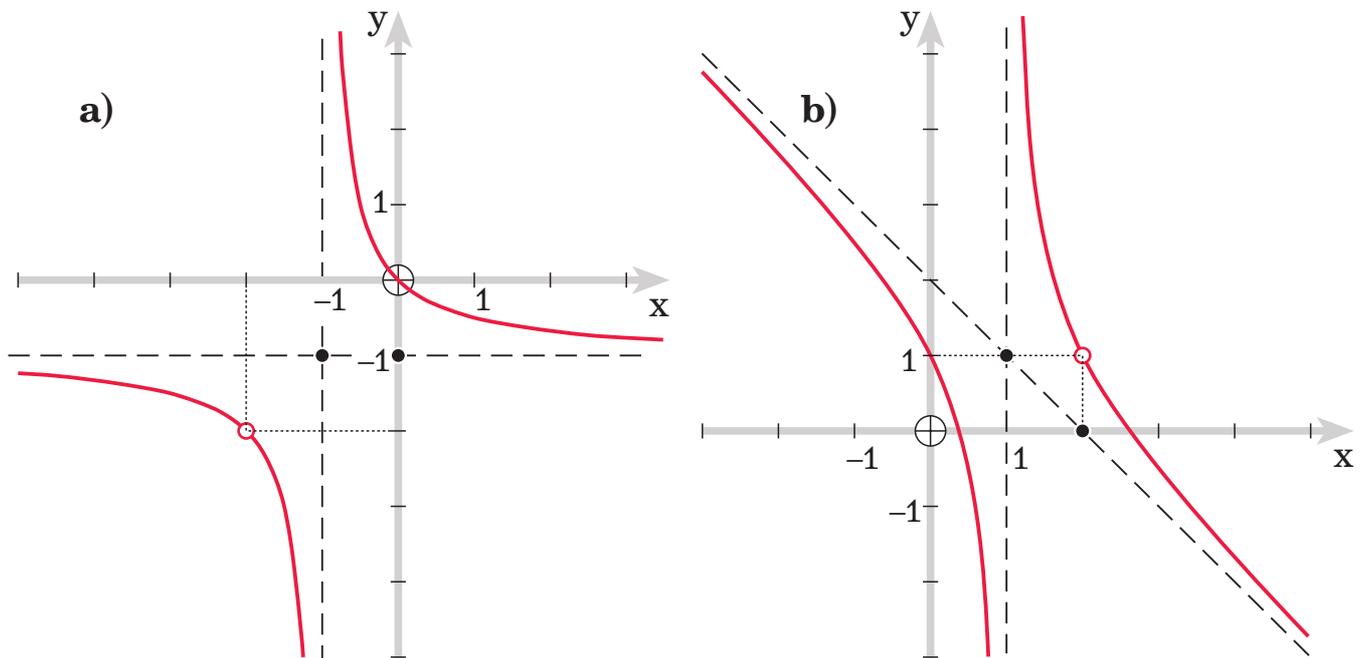
- 11 Die Bilder zeigen Kurven rationaler Funktionen mit einem 1fachen Pol und einer schiefen Asymptote sowie Kurven- und Asymptotenpunkte mit ganzzahligen Koordinaten. Stelle den Funktionsterm auf.



- 12 Die Bilder zeigen Kurven rationaler Funktionen mit einem 2fachen Pol und einer weiteren Asymptote sowie Kurven- und Asymptotenpunkte mit ganzzahligen Koordinaten. Stelle den Funktionsterm auf.



- 13 Die Bilder zeigen Kurven rationaler Funktionen mit einem 1fachen Pol und einer weiteren Asymptote sowie Kurvenlöcher und Asymptotenpunkte mit ganzzahligen Koordinaten. Stelle den Funktionsterm auf.



Bearbeite die Aufgaben **14** bis **30** unter den Gesichtspunkten:

- maximale Definitionsmenge D
- Symmetrie zum Koordinatensystem
- Nullstellen
- Asymptoten und Verhalten am Rand von D
- Ort und Art von Waagrecht- und Flachpunkten
- Skizze und Wertemenge

14 $f(x) = \frac{16x}{x^3 - 16}$

15 $f(x) = \frac{x}{x^3 - 3x^2 + 4}$

16 $f(x) = \frac{3x^3}{x^3 + 16}$

17 $f(x) = \frac{-x^4}{x^3 + 4}$

18 $f(x) = \frac{x^3 - 2x}{3 - x^2}$

19 $f(x) = \frac{12x - 3x^2}{x^2 + 4x + 4}$

$$20 \quad f(x) = \frac{5x^5}{10x^3 - 32}$$

$$21 \quad f(x) = \frac{(x-1)^3}{3x^2}$$

$$22 \quad f(x) = \frac{x^2(2x+9)}{4(x+4)^2}$$

$$23 \quad f(x) = \frac{3x^2 + 6x - 9}{x^2 + 2x + 4}$$

$$24 \quad f(x) = \frac{x^3 + 8x^2 + 23x + 22}{x^2 + 4x + 5}$$

$$25 \quad f(x) = \frac{2x^3 + 6x^2 - 8}{x^3 - 4}$$

$$26 \quad f(x) = \frac{x^4 - 51x^2 - 48}{40x}$$

$$27 \quad f(x) = \frac{x^5 - 3x^3 - 162}{4x^3}$$

$$28 \quad f(x) = \frac{5x^6 - 176x}{5x^5 + 144}$$

$$29 \quad f(x) = \frac{144x - 3x^6}{3x^5 - 64}$$

$$30 \quad f(x) = \frac{x^6 - 104x}{x^5 - 32}$$

$$31 \quad f_a(x) = \frac{(x-a)(x^2 + ax + a^2 - 3)}{x(x^2 - 3)}$$

- a) Diskutiere f_2 wie in den vorigen Aufgaben.
- b) Für welche Werte von a hat $f_a(x)$ eine 2fache Nullstelle?
 - c) Zeige: G_2 ist symmetrisch zu $(0|1)$.
 - d) Zeige: G_2 und G_1 sind zueinander symmetrisch bezüglich der y -Achse.
 - e) Zeige: G_a und G_{-a} sind zueinander symmetrisch bezüglich der y -Achse.
 - f) Für welche Werte von a hat f_a stetig behebbare Definitionslücken?
Gib die Löcher an.

Bearbeite die Aufgaben **32** bis **42** unter den Gesichtspunkten:

- maximale Definitionsmenge D
- Symmetrie einer Scharkurve zum Koordinatensystem
- Symmetrie zweier Scharkurven zueinander bezüglich des Koordinatensystems
- Nullstellen
- Asymptoten und Verhalten am Rand von D
- Ort und Art von Waagrecht- und Flachpunkten
- Kurven, auf denen die Waagrecht- oder Flachpunkte liegen
- Skizze für die angegebenen Parameterwerte $a \in \{\dots\}$

•32 $f_a(x) = \frac{8ax}{x^2 + a^2}, a \neq 0 \quad a \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3\}$

•33 $f_a(x) = \frac{4x - a}{x^2} \quad a \in \{\pm 1, \pm 4\}$

•34 $f_a(x) = \frac{x^2 - a}{x - 1} \quad a \in \{0, \pm 1, \pm 4\}$

•35 $f_a(x) = \frac{x^2 - ax}{2 - 2x} \quad a \in \{0, \pm 1, \pm 4\}$

•36 $f_a(x) = \frac{x^2}{2x + a} \quad a \in \{0, \pm 2, \pm 4\}$

•37 $f_a(x) = \frac{x}{a} - \frac{a}{x} \quad a \in \{1, 2, 3\}$

Bestimme die Parameterwerte der Scharkurven, die sich auf der x -Achse rechtwinklig schneiden.

Bei welcher Scharkurve ($a > 0$) hat der Schnittwinkel von schräger Asymptote und Tangenten in den Nullstellen ein Extremum? Gib diesen Winkel an sowie die Art seines Extremums.

•38 $f_a(x) = \frac{x^2}{a} - \frac{a}{x} \quad a \in \{\pm 1, \pm 4\}$

Bestimme die Schar der Wendetangenten.

Zeige: G_h mit $h(x) = 2\sqrt{-x}, x < 0$, berührt jede Scharkurve mit $a > 0$.

Gib den Berührungspunkt an.

Die Kurve G_a geht durch den Waagrechtspunkt von G_b ; welche Beziehung besteht zwischen a und b ?

$$\text{39 } f_a(x) = \frac{1}{3} \left(\frac{x^2}{a} - \frac{a^2}{x} \right), \quad a \in \{\pm 1, \pm 5\}$$

Bestimme die Schar der Wendetangenten.

Die Kurve G_a geht durch den Waagrechtspunkt von G_b ; welche Beziehung besteht zwischen a und b ?

Die Scharkurven haben eine gemeinsame Tangente. Zeige, dass die Punkte $(-\sqrt[3]{2a} \mid a/\sqrt[3]{2})$ Berührungspunkte sind, und stelle die Gleichung der Tangente auf. Diese Tangente schneidet jede Scharkurve in einem weiteren Punkt S ; berechne S .

$$\text{40 } f_a(x) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{a}{x^2}, \quad a \in \{\pm 1, \pm 2\}$$

Die Scharkurven haben eine gemeinsame Berührungskurve. Zeige, dass die Punkte $(\pm \sqrt[4]{-a^3/2} \mid 3/\sqrt{-2a})$ Berührungspunkte sind, und stelle die Gleichung der Berührungskurve auf.

$$\text{41 } f_a(x) = \frac{x^2 - 4ax + 5a^2}{x - 2a}, \quad a \in \{0, \pm 1, \pm 1, 5\}$$

Berechne Schnittpunkt und Schnittwinkel von G_a und y -Achse.

Welche Beziehung besteht zwischen den Parameterwerten a und b zweier Scharkurven, deren Waagrechtspunkte auf gleicher Höhe liegen?

Welche Beziehung besteht zwischen den Parameterwerten a und b zweier Scharkurven, deren eine durch den Waagrechtspunkt der andern geht?

Zeige: t_{\pm} mit $t_{\pm}(x) = \frac{1}{2}(\pm \sqrt{5} - 1)x$ sind Tangenten jeder Scharkurve.

$$\text{42 } f_a(x) = \frac{ax^2 - 1}{x^2 - a} \quad \text{a) } a \in \{2, 1\} \quad \text{b) } a \in \{1, \frac{1}{2}, 0\} \quad \text{c) } a \in \{0, -\frac{1}{2}, -1, -2\}$$

d) Zeige: Bis auf eine schneiden sich alle Scharkurven in 2 Punkten P und Q .

Berechne P und Q .

e) Welche Grenzkurve ergibt sich für $|a| \rightarrow \infty$?

$$\text{43 } f_{a,b}(x) = \frac{x^3 + a}{1 + bx^2}$$

Bestimme a und b so, dass die Kurve symmetrisch ist zum Ursprung und die Asymptote $y = -x$ hat.

$$\text{44 } f_{a,b}(x) = \frac{ax^2}{ax + b}$$

Bestimme a und b so, dass die Kurve den Tiefpunkt $(1 \mid 2)$ hat.

$$\text{45 } f_{a,b,c}(x) = \frac{ax(x+b)}{(x+c)^2}$$

Bestimme a , b und c so, dass die Kurve den Hochpunkt $(1 \mid 1)$ hat und $y = -3$ Asymptote ist.

•46 $f(x) = \frac{4x-4}{x^2}, x \neq 0$

a) Zeichne G_f (Nullstellen, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkt).

b) $b(x) = |f(x)|$
Zeichne G_b (Nullstellen, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkt).

c) $q(x) = [f(x)]^2$
Zeichne G_q (Nullstellen, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkt).

d) $i(x) = [f(x)]^{-1}$
Zeichne G_i (Nullstellen, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkt).

e) $l(x) = \ln f(x)$
Zeichne G_l (Nullstellen, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkt).

•47 $f(x) = \frac{3x^2}{2x^3+1}, x \neq -\sqrt[3]{0,5}$

a) Zeichne G_f (Nullstellen, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkt).

b) $b(x) = |f(x)|$
Zeichne G_b (Nullstellen, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkt).

c) $q(x) = [f(x)]^2$
Zeichne G_q (Nullstellen, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkt).

d) $i(x) = [f(x)]^{-1}$
Zeichne G_i (Nullstellen, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkt).

e) $j(x) = [f(x)]^{-2}$
Zeichne G_j (Nullstellen, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkt).

f) $l(x) = \ln f(x)$
Zeichne G_l (Nullstellen, Asymptoten, Extrem- und Wendepunkt).

Bruchungleichungen

Löse die folgenden Ungleichungen so:

- Zeichne jeweils die Graphen,
- bestimme gegebenenfalls die Schnittpunkte,
- lies aus dem Bild die Lösungsmenge ab.

48 a) $\frac{1}{x(x+2)} > 0$

b) $\frac{3}{(x+1)(x-2)} < 0$

49 a) $\frac{x}{x-1} > 2$

b) $\frac{x+1}{x+3} \geq -1$

50 a) $\frac{2}{x-1} \leq \frac{2x-2}{x+1}$

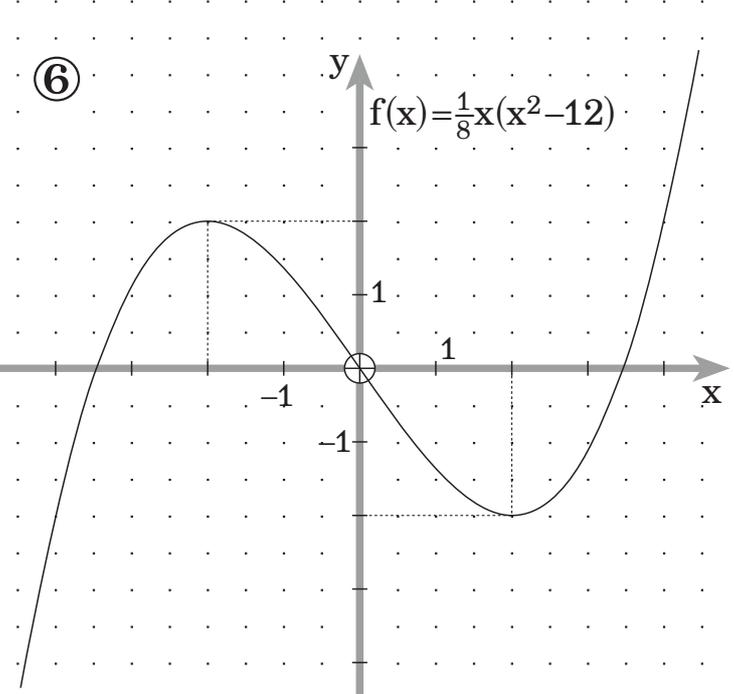
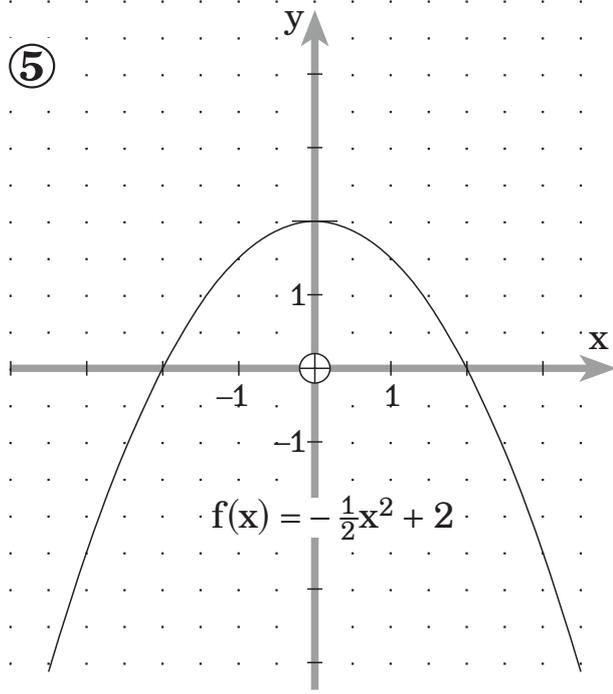
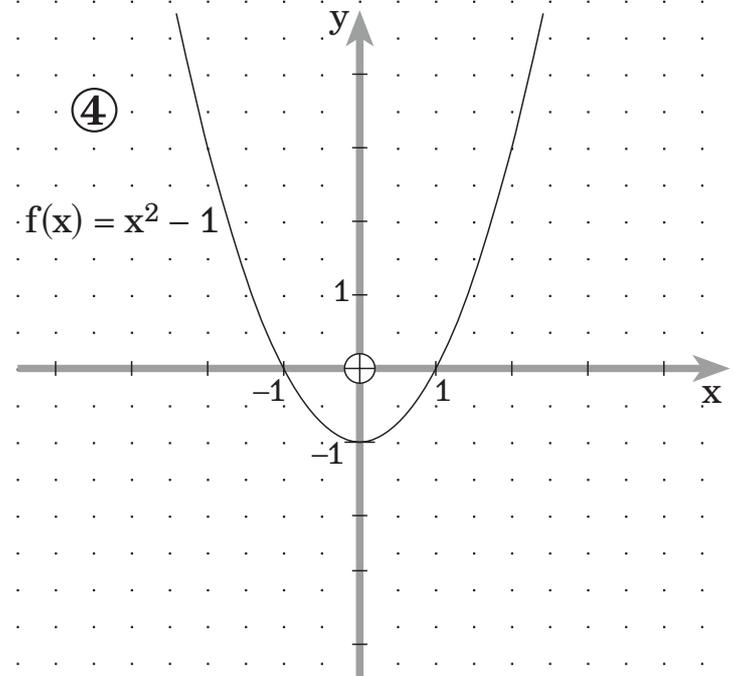
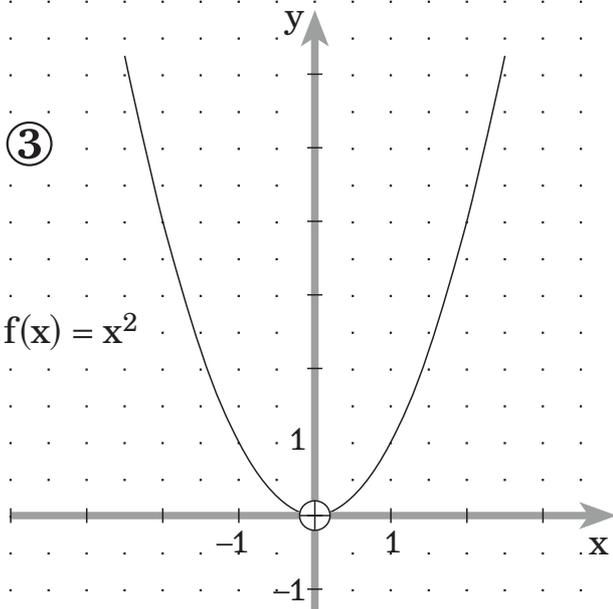
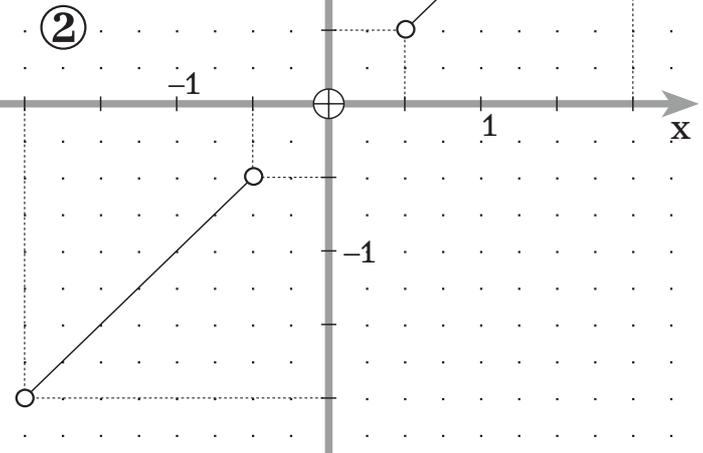
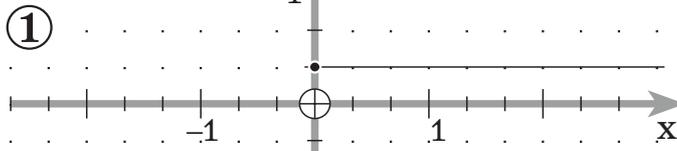
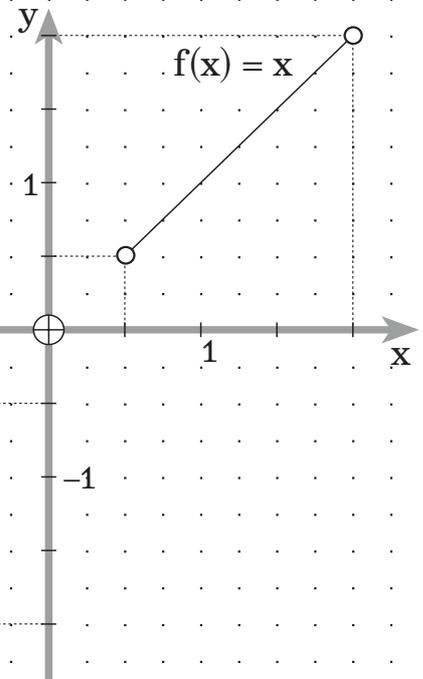
b) $\frac{x-1}{x+1} \geq \frac{2x+7}{x+3}$

12 Kehrwertkurven

51 Überlege: Welche Zahlen sind gleich ihrem Kehrwert? Was wird aus einer senkrechten Asymptote, was wird aus einem Punkt der x-Achse?

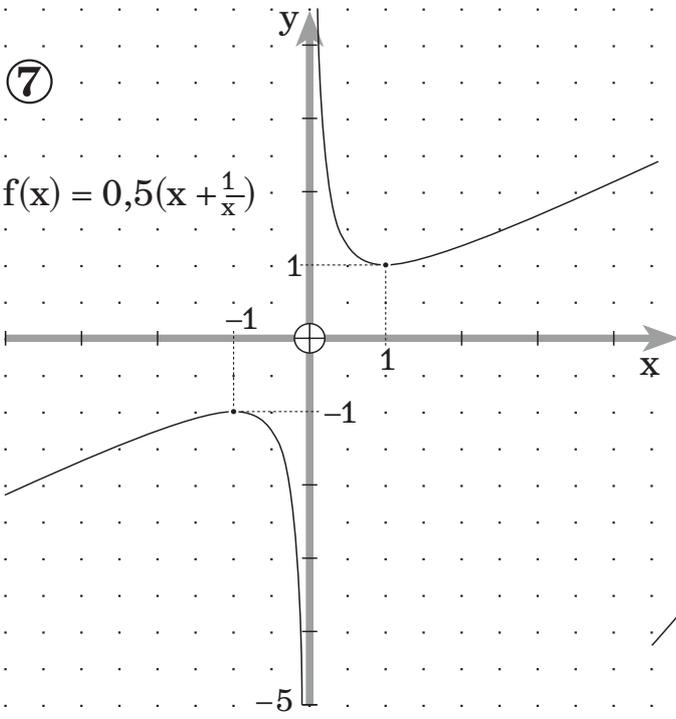
$$f(x) = \begin{cases} 1/3 & \text{für } x \geq 0 \\ -3/2 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Gezeichnet ist die Kurve einer Funktion f . Skizziere die Kurve der Funktion k mit $k(x) = 1/f(x)$.



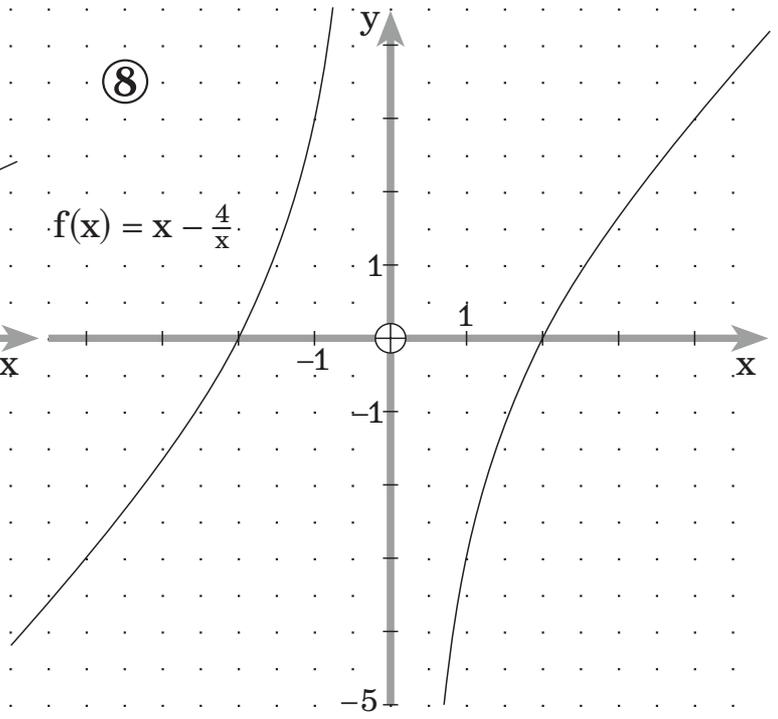
⑦

$$f(x) = 0,5\left(x + \frac{1}{x}\right)$$



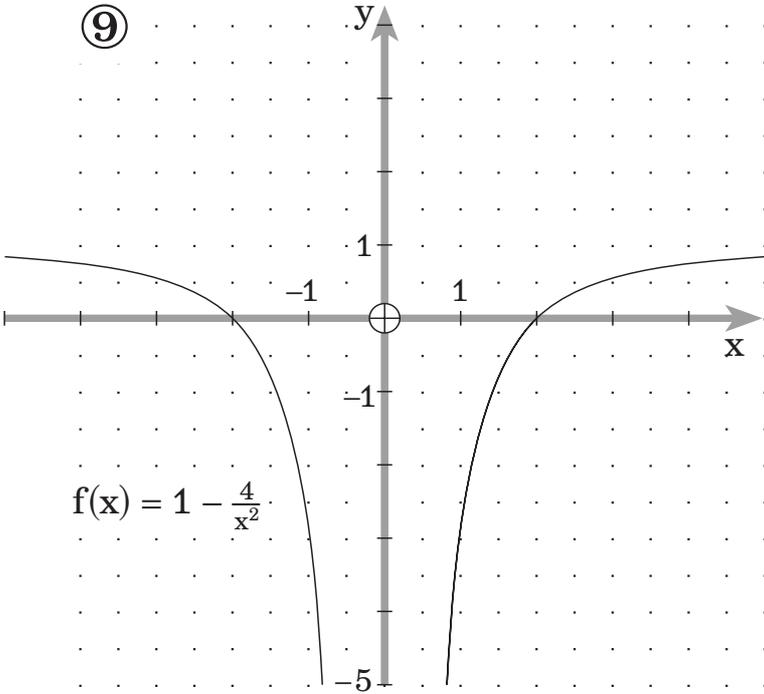
⑧

$$f(x) = x - \frac{4}{x}$$



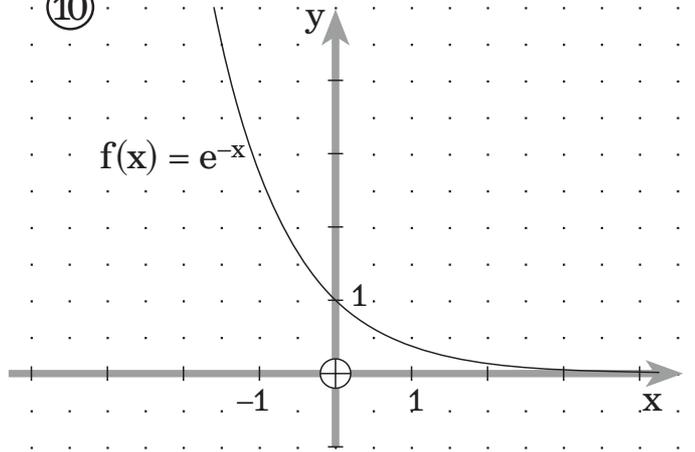
⑨

$$f(x) = 1 - \frac{4}{x^2}$$



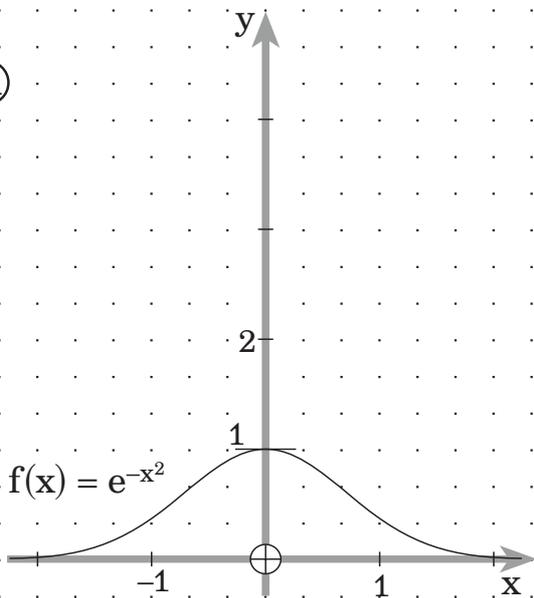
⑩

$$f(x) = e^{-x}$$



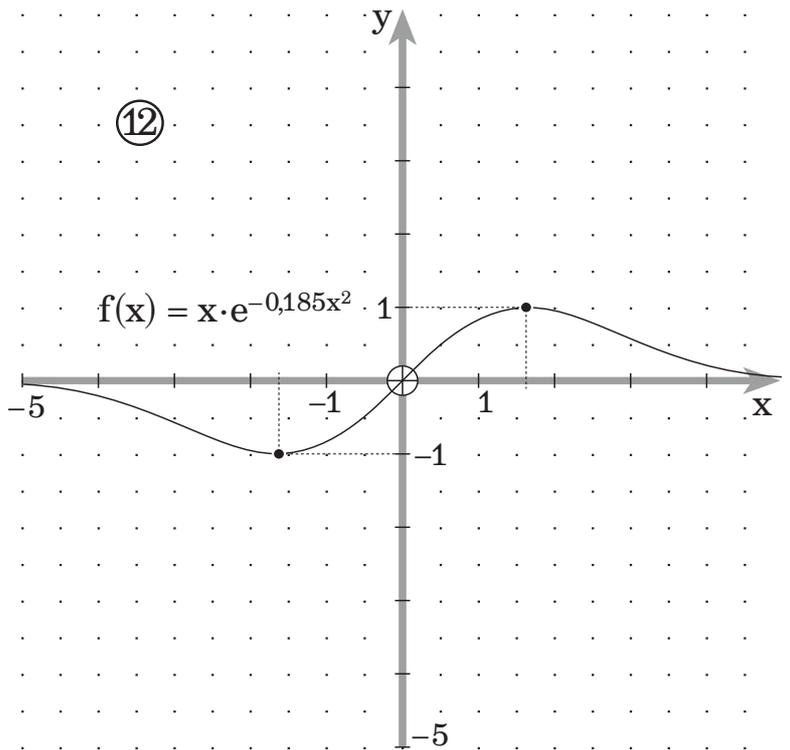
⑪

$$f(x) = e^{-x^2}$$



⑫

$$f(x) = x \cdot e^{-0,185x^2}$$



Flächenberechnungen

◊52 Berechne die bestimmten Integrale und deute die Ergebnisse als Flächeninhalte an einer Skizze.

a) $\int_1^e \frac{1}{x} dx$

b) $\int_{-e}^{-1} \frac{1-x}{x} dx$

c) $\int_{-3,71}^2 \frac{x}{3-x} dx$

d) $\int_{-3}^3 \frac{7x}{x^2-16} dx$

e) $\int_{-6}^2 \left(\frac{x^2}{4x-12} + 1 \right) dx$

•53 $f(x) = \frac{x^2}{4(x-1)}$

- Bestimme die maximale Definitionsmenge D_f , die Nullstelle und die Asymptoten. Gib das Verhalten von G_f an den Grenzen von D_f an.
- Bestimme Ort und Art der Waagrechtspunkte und skizziere G_f .
- Bestimme den Inhalt der Fläche, die begrenzt ist von G_f und den Geraden mit den Gleichungen $y = \frac{1}{4}(x+1)$, $x = 2$ und $x = a$ mit $a > 2$.

•54 $f(x) = \frac{x^2+9}{2x}$

- Bestimme die Asymptoten sowie Ort und Art der Waagrechtspunkte und skizziere G_f .
- Bestimme den Inhalt der Fläche, die begrenzt ist von G_f , von der Gerade durch die Waagrechtspunkte und der Gerade $y = 5x$.

•55 $f(x) = \frac{17x^2 - x^4 - 16}{3x^2}$

- Bestimme die asymptotischen Kurven sowie Ort und Art der Waagrechtspunkte W_i ; zeichne G_f und die Gerade w , die durch die W_i geht.
- Berechne den Inhalt I der Fläche, die zwischen G_f und der x -Achse liegt.
- G_f , w und die x -Achse begrenzen ein möglichst kleines Flächenstück; berechne seinen Inhalt K .
- G_f , w und die x -Achse begrenzen ein möglichst großes Flächenstück; berechne seinen Inhalt G .

•56 $f(x) = \frac{x^4 - 14x^2 + 24}{x^3}$

- Bestimme alle wichtigen Kurveneigenschaften und zeichne G_f .
- G_f und die x -Achse begrenzen 2 Flächenstücke; berechne ihren Inhalt I .
- G_f und die Gerade durch die Waagrechtspunkte begrenzen 2 Flächenstücke; berechne ihren Inhalt J .
- G_f , seine Asymptote und die x -Achse begrenzen 2 Flächenstücke; berechne ihren Inhalt F .

2. Anwendungen

Zustandsgleichung des idealen Gases

Unter einem idealen Gas versteht man ein Gas, von dem man annimmt:
 die Moleküle sind punktförmig,
 die Moleküle beeinflussen sich gegenseitig nur beim Stoßen.

Die bestimmenden Größen sind: der Druck p , das Volumen V und die (absolute) Temperatur T . Diese 3 Größen hängen so zusammen:

$$\boxed{p \cdot V = C \cdot T} \quad \text{Zustandsgleichung des idealen Gases}$$

C ist eine Konstante, sie hängt ab von der Anzahl der Gasmoleküle.

Verdichtet man ein Gas bei konstanter Temperatur, so ändert sich der Druck mit dem Volumen: $p = \frac{CT}{V}$ (I).

Speziell unter Normalbedingungen gilt: $p_0 = \frac{CT_0}{V_0}$ (II).

$p_0 = 1,013 \text{ bar}$ Normaldruck

$T_0 = 273,15 \text{ K} = 0^\circ \text{C}$ Normaltemperatur

$V_0 = 1 \text{ m}^3$

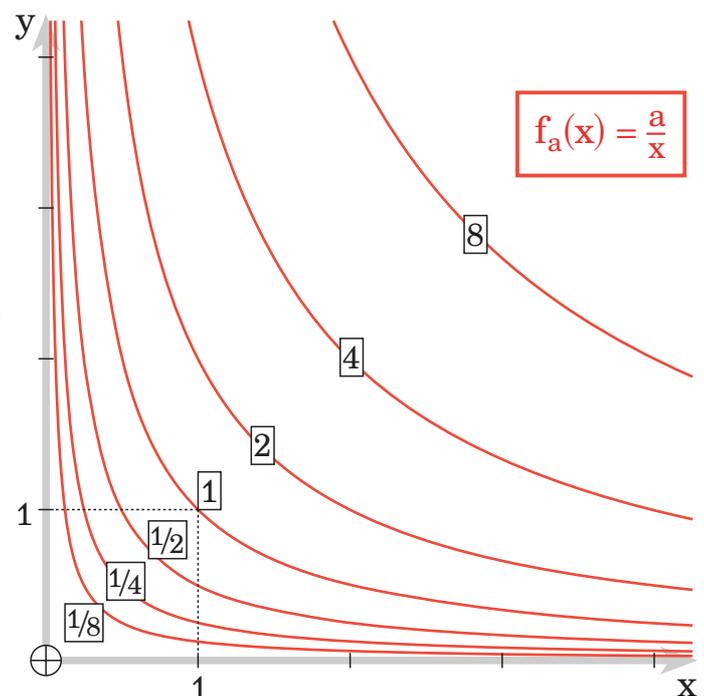
Normierung auf Normalbedingungen:

(I):(II) $\frac{p}{p_0} = \frac{T/T_0}{V/V_0}$ kurz $y = \frac{a}{x}$, $x > 0$

mit $y = p/p_0$, $x = V/V_0$ und $a = T/T_0$

Wir nehmen das normierte Volumen V/V_0 als Variable x . Für den Fall, dass sich die Temperatur nicht ändert, ist die normierte Temperatur T/T_0 ein Parameter a .

Im Bild ergibt das eine Schar von Hyperbeln. Jede Kurve beschreibt das Verhalten des Gases bei konstanter Temperatur; solche Kurven heißen Isothermen. Nur bei sehr hoher Temperatur und niedrigem Druck verhalten sich reale Gase wie das ideale Gas.



Zustandsgleichung realer Gase

Bei niedrigeren Temperaturen sind Korrekturen an der Zustandsgleichung des idealen Gases nötig. Sie stammen vom holländischen Physiker Johannes Diderik VAN DER WAALS (Leiden 1837 bis 1923 Amsterdam).

1879 hat er die nach ihm benannte Gleichung für reale Gase aufgestellt:

$$\boxed{\left(p + \frac{\alpha}{V^2}\right)(V - \beta) = C \cdot T} \quad \text{van-der-Waals-Gleichung}$$

Der Binnendruck $\frac{\alpha}{V^2}$ berücksichtigt die Wechselwirkung der Gasmoleküle vor und nach dem Stoß mit einander. Das Kovolumen β berücksichtigt das tatsächliche Volumen der Gasmoleküle.

Aufgelöst nach dem Druck: $p = \frac{CT}{V-\beta} - \frac{\alpha}{V^2}$, $V > \beta$, $T > 0$ Kelvin

Auch hier vereinfacht eine Normierung die Darstellung erheblich.

Normiert wird auf die Werte am Terrassenpunkt, dem »kritischen Punkt K«.

•Bestimmung von V_k , p_k , T_k :

$$p = \frac{CT}{V-\beta} - \frac{\alpha}{V^2}, \quad V > \beta \quad \frac{dp}{dV} = \frac{-CT}{(V-\beta)^2} + \frac{2\alpha}{V^3} \quad \frac{d^2p}{dV^2} = \frac{2CT}{(V-\beta)^3} - \frac{6\alpha}{V^4}$$

In $K(V_k|p_k)$ sind die 1. und 2. Ableitung des Drucks nach V gleich 0:

$$\frac{dp}{dV} = 0 \Rightarrow \frac{CT}{(V-\beta)^2} = \frac{2\alpha}{V^3} \Rightarrow CT = \frac{2\alpha(V-\beta)^2}{V^3} \quad (\text{I})$$

$$\frac{d^2p}{dV^2} = 0 \Rightarrow \frac{2CT}{(V-\beta)^3} = \frac{6\alpha}{V^4} \Rightarrow CT = \frac{3\alpha(V-\beta)^3}{V^4} \quad (\text{II})$$

$$\frac{(\text{II})}{(\text{I})} = 1 = \frac{3\alpha(V-\beta)^3 V^3}{V^4 2\alpha(V-\beta)^2} \Rightarrow 1 = \frac{3(V-\beta)}{2V} \Rightarrow 2V = 3V - 3\beta \Rightarrow V = 3\beta = V_K$$

$$V=3\beta \text{ eingesetzt in } \frac{dp}{dV} = 0, \text{ also in } CT = \frac{2\alpha(V-\beta)^2}{V^3} : CT = \frac{2\alpha \cdot 4\beta^2}{27\beta^3} \Rightarrow T = \frac{8\alpha}{27\beta C} = T_K$$

$V=3\beta$ und $CT = \frac{8\alpha}{27\beta}$ eingesetzt in $p = \frac{CT}{V-\beta} - \frac{\alpha}{V^2}$:

$$p = \frac{8\alpha}{27\beta(3\beta-\beta)} - \frac{\alpha}{9\beta^2} = \frac{4\alpha}{27\beta^2} - \frac{\alpha}{9\beta^2} = \frac{4\alpha}{27\beta^2} - \frac{3\alpha}{27\beta^2} = \frac{\alpha}{27\beta^2} = p_k$$

•Normierung: $p_n = p/p_k$ $T_n = T/T_k$ $V_n = V/V_k$

$$p = \frac{CT}{V-\beta} - \frac{\alpha}{V^2} \quad \text{Ersetzungen: } p = p_k p_n \quad CT = CT_k T_n \quad V = V_k V_n$$

$$p_n p_k = \frac{CT_k T_n}{V_k V_n - \beta} - \frac{\alpha}{V_k^2 V_n^2} \quad \text{die Werte für } p_k, T_k \text{ und } V_k \text{ eingesetzt}$$

$$\frac{\alpha}{27\beta^2} p_n = \frac{C \frac{8\alpha}{27\beta C} T_n}{V_n 3\beta - \beta} - \frac{\alpha}{9\beta^2 V_n^2} \quad || \cdot \frac{27\beta^2}{\alpha}$$

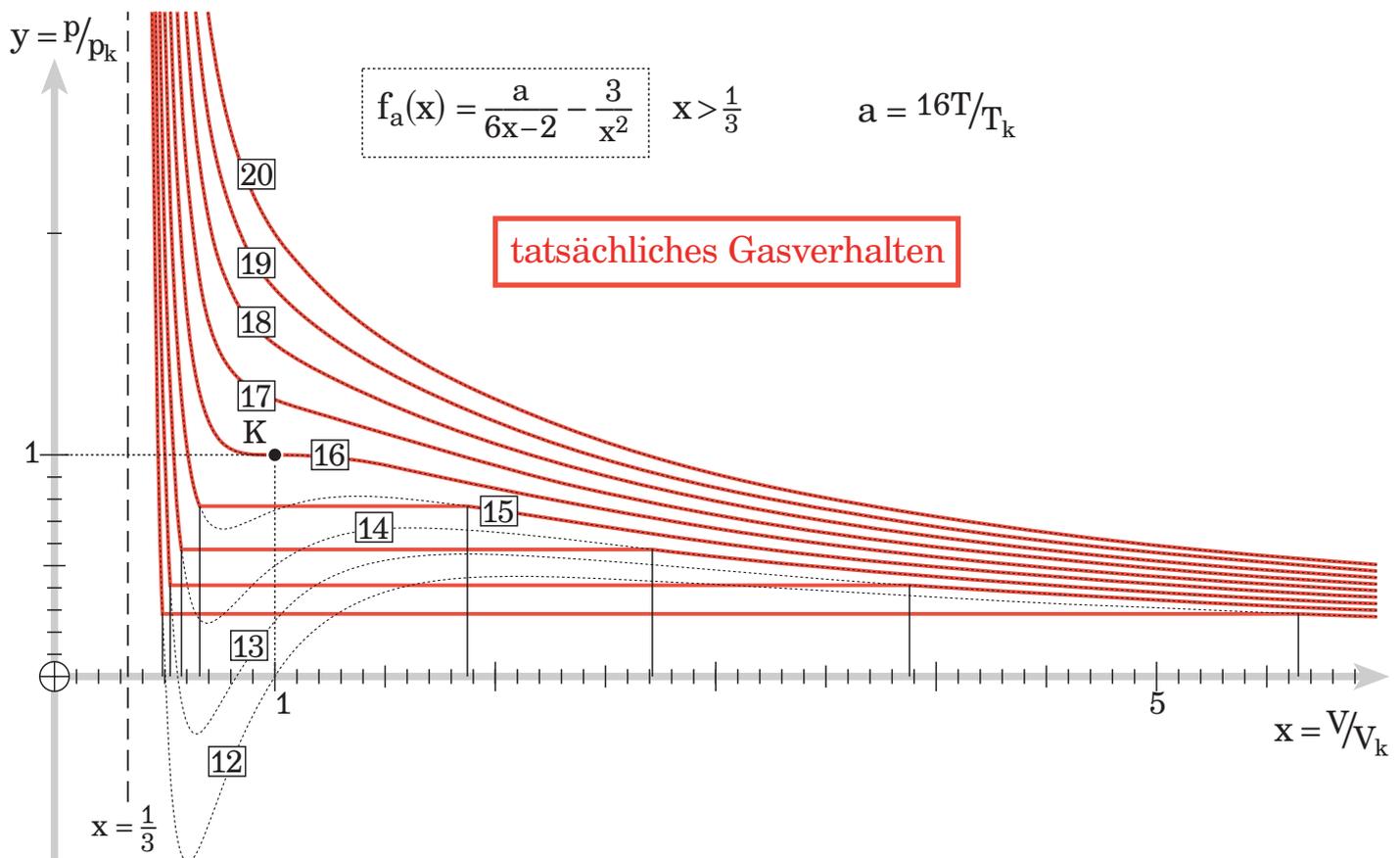
$$p_n = \frac{T_n \cdot 8\beta}{\beta(3V_n - 1)} - \frac{3}{V_n^2} \Rightarrow p_n = \frac{8T_n}{3V_n - 1} - \frac{3}{V_n^2}$$

$$\boxed{(p_n + \frac{3}{V_n^2})(3V_n - 1) = 8T_n} \quad \text{normierte van-der-Waals-Gleichung}$$

Aus $p_n = \frac{8T_n}{3V_n - 1} - \frac{3}{V_n^2}$ entsteht der Term der Funktionenschar f_a

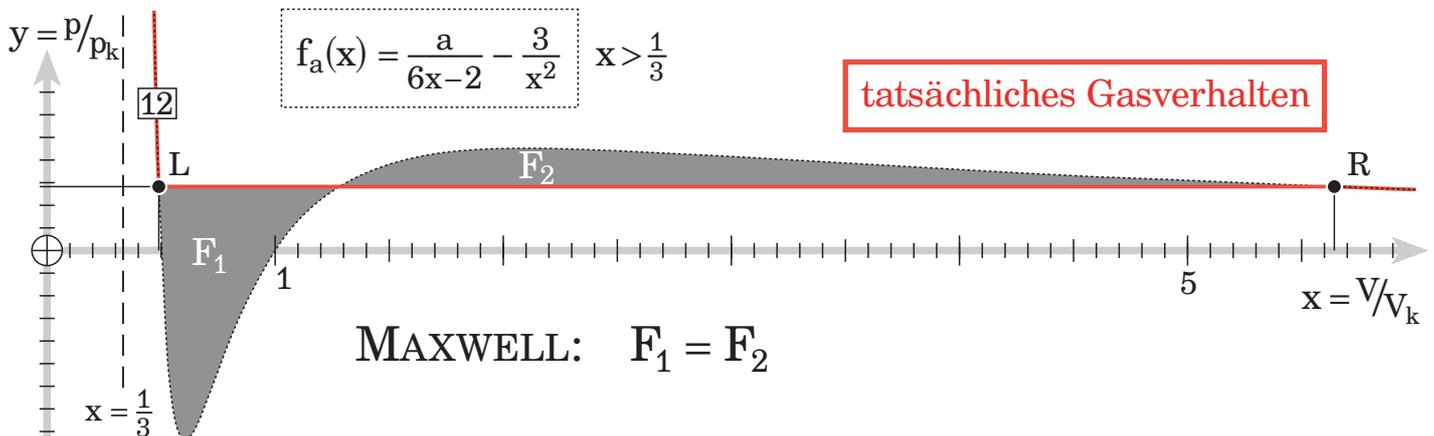
durch die Ersetzungen: $16T_n = a$, $V_n = x$, $p_n = y$.

$$f_a(x) = \frac{a}{6x-2} - \frac{3}{x^2}, \quad x > \frac{1}{3}, \quad a > 0 \quad (1|1) \text{ ist Terrassenpunkt, durch ihn geht } G_{16}.$$



Kurze Deutung der van-der-Waals-Isothermen

Bei Temperaturen $> T_k$ (also $a > 16$) ähneln die Isothermen um so mehr den Hyperbeln beim idealen Gas, je höher die Temperatur oder je niedriger der Druck ist. Gasverflüssigung ist nicht möglich.



Bei Temperaturen $< T_k$ (also $a < 16$) lassen sich reale Gase verflüssigen. Die roten Kurven verlaufen streckenweise parallel zur x-Achse; in diesen Volumenintervallen existieren flüssiger und gasförmiger Zustand nebeneinander. Rechts von R verhält sich das Gas näherungsweise wie ein ideales Gas. Links von L ist das Gas völlig verflüssigt; eine Komprimierung ist nur mit sehr hohen Drücken erreichbar. Zwischen L und R beschreibt G_f nicht das tatsächliche Verhalten des Gases: Das Volumen ändert sich durch Verdampfen oder Kondensieren ohne Druckänderung. Nach MAXWELL ist die waagrechte Strecke [LR] so festgelegt, dass sie mit der Isotherme 2 Flächenstücke einschließt, die den selben Inhalt haben.

Kritische Daten einiger Gase:

| | kritische Temperatur | kritischer Druck | kritische Dichte |
|--------------|----------------------|------------------|------------------------|
| Wasserdampf | 647K = 374°C | 218 bar | 0,33 g/cm ³ |
| Kohlendioxid | 304K = 31°C | 73 bar | 0,47 g/cm ³ |
| Stickstoff | 126K = -147°C | 35 bar | 0,31 g/cm ³ |

Rutherford-Hyperbeln

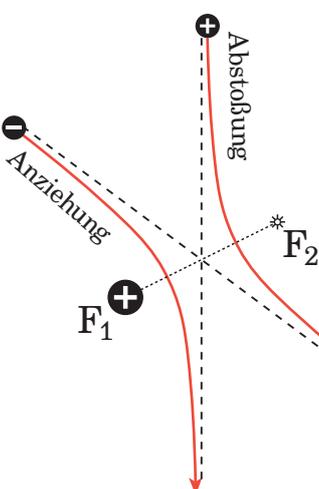
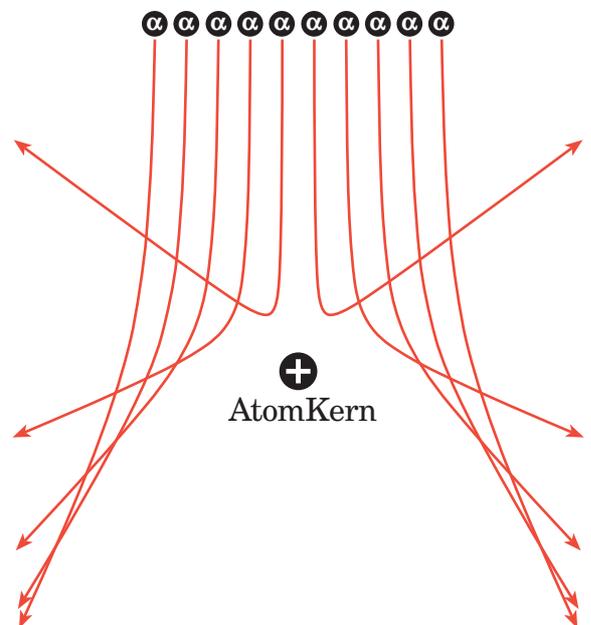
1911 hat der englische Physiker Ernest RUTHERFORD (1871 bis 1937) ein bahnbrechendes Modell für Atome veröffentlicht:

Das Atom ähnelt einem Planetensystem. Die »Planeten« sind die (negativen) Elektronen. Sie umkreisen ihre »Sonne«, den (positiven) Atomkern.

Der Atomkern enthält praktisch die gesamte Atommasse, so wie die Sonne praktisch die gesamte Masse unsres Planetensystems enthält.

Dieses Rutherford-Atommodell war die Folgerung aus Ergebnissen von »**Streuversuchen**«, einer damals neuen Experimentiertechnik. Diese zählt auch heute noch zu den wichtigsten Methoden, den Aufbau von Teilchen und Materie zu klären. In seinem Streuversuch schoss Rutherford gleich schnelle α -Teilchen (= 2fach positiv geladene Heliumkerne) auf eine Goldfolie. Entgegen seiner Erwartung wurden einige α -Teilchen deutlich abgelenkt. Diese Erscheinung konnte er nur mit seinem Modell erklären:

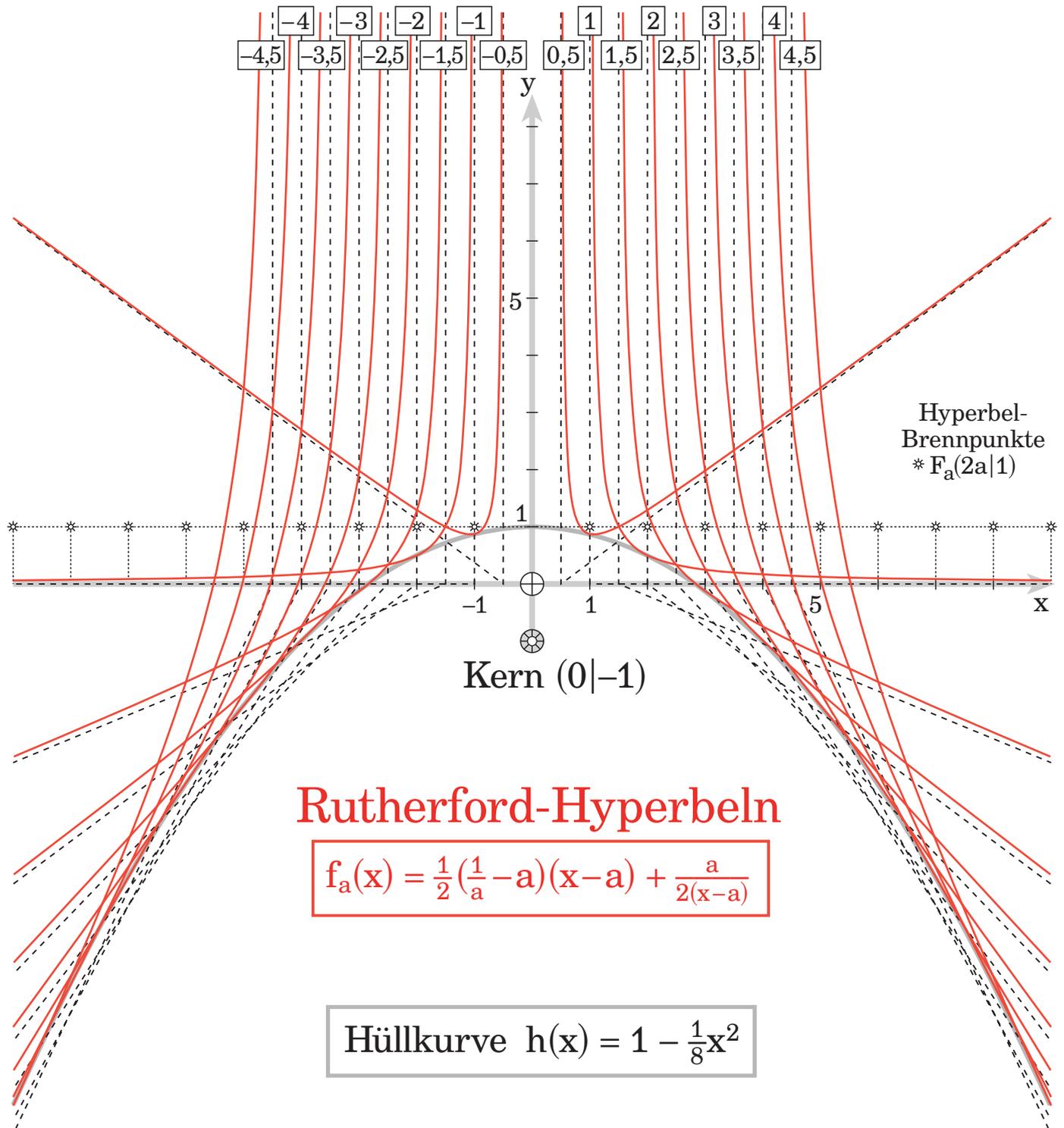
Die positiven α -Teilchen nähern sich dem positiven Atomkern und werden von ihm abgestoßen, also abgelenkt. Diese Ablenkung ist um so stärker, je näher das α -Teilchen dem Atomkern kommt. Im Grenzfall (zentraler Stoß) kehrt das α -Teilchen sogar um (nicht im Bild rechts enthalten). Die α -Teilchen laufen auf Bahnen, die in einem Hyperbelast liegen.



Der andere Ast legt die Bahn fest, auf der negative Teilchen laufen, die vom Kern angezogen werden. (Ähnlich manchen Kometen im Sonnensystem)

Für die Hyperbelschar liefert die Theorie:

$$f_a(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} - a \right) (x - a) + \frac{a}{2(x-a)}, \quad a \neq 0$$

Schar der Rutherford-Äste ($a \neq 0$)

Der Atomkern, das »Streuzentrum«, sitzt in $(0|-1)$. Der Scharparameter a ist der »Stoßparameter«. Die senkrechten Asymptoten $x=a$ beschreiben die Flugrichtung der ankommenden α -Teilchen in sehr großer Entfernung vom Kern. Die schiefen Asymptoten $y = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} - a \right) (x - a)$ beschreiben die Flugrichtungen der abgelenkten α -Teilchen in sehr großer Entfernung vom Kern.

Für Kegelschnittfreunde: Der Kern ist gemeinsamer Brennpunkt aller Hyperbeln. Die andern Hyperbel-Brennpunkte $(2a|1)$ liegen auf der Gerade $y=1$.

Aufgaben

1 Van-der-Waals-Gleichung

- a) Das 2. Bild im Abschnitt »Zustandgleichung realer Gase« zeigt die van-der-Waal-Isotherme für $a=12$.
Entnimm der Zeichnung folgende Daten für Stickstoff:
Temperatur der Isotherme in K und °C,
Druck in bar zwischen R und L.
Auf welchen Teil verringert sich das Volumen beim Verflüssigen zwischen R und L ?
- b) Bestimme die Kurve der Flachpunkte der Isothermenschar.
Achte auf die Beschränkungen für a und x !
- c) Bestimme mithilfe eines Computer-Algebra-Systems:
Für welche Werte von a haben die Isothermen keinen, einen oder zwei Wendepunkte ?
Welche Bedeutung hat der Hochpunkt der Flachpunkt-Kurve von **b)**,
auf welcher Isotherme liegt er, welche mathematische Rolle spielt er ?

2 Rutherford-Streuung

Der Ablenkwinkel bei der Rutherford-Streuung sei der Winkel zwischen der schiefen Asymptote und der negativen y -Achse.

- a) Zeige, dass die Schar symmetrisch ist zur y -Achse.
- b) Berechne die Ablenkwinkel für die Stoßparameter $a \in \{\frac{1}{2}; 1; 4\}$.
- c) Für welche Werte von a haben die Hyperbeln waagrechte Tangenten ?
- d) Bestimme die Kurve, die das Gebiet begrenzt, in das kein α -Teilchen eindringen kann.
Wie muss ein α -Teilchen fliegen, um dem Kern möglichst nahe zu kommen ? Wie nah kommt es an den Kern heran ?

3 Beleuchtung

2 gleich starke Lichtquellen L und R haben die Entfernung 8. Sie beleuchten eine Wand, die von LR den Abstand $a > 0$ hat.

Die Lichtintensität in P ist proportional zu

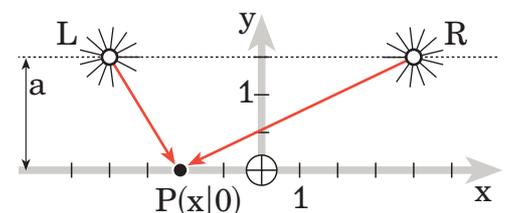
$$f_a(x) = \frac{32}{a^2 + (4+x)^2} + \frac{32}{a^2 + (4-x)^2}$$

Für welche Abstände a zeigen sich auf der Wand 2 Intensitätsmaxima ?

Für welche Abstände a zeigt sich nur ein Intensitätsmaximum ?

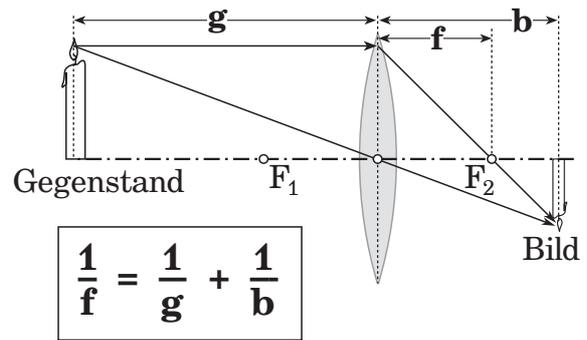
Zeichne Intensitätskurven für $a=2$, $a=4\sqrt{3} \approx 7$ und $a=12$.

Verwende $f'_a(x) = -\frac{128x(x^4 + 2x^2(a^2 + 16) + a^4 - 32a^2 - 768)}{(a^2 + (4+x)^2)^2(a^2 + (4-x)^2)^2}$



4 Linsengleichung

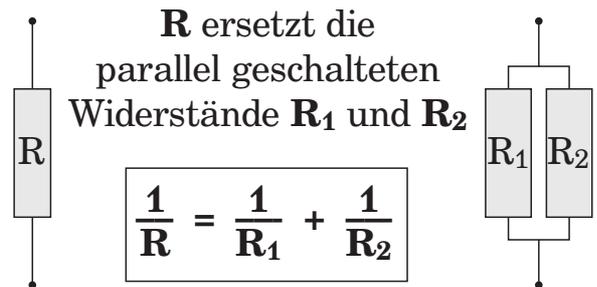
- f** Brennweite
(positiv bei Sammellinsen)
g Gegenstandsweite (>0)
b Bildweite



- a) Nimm $f > 0$ als Parameter a einer Schar rationaler Funktionen mit der unabhängigen Variable g als x und der abhängigen Variable b als y . Bestimme den Term $f_a(x)$ mit maximaler Definitionsmenge.
- b) Zeichne Scharkurven für $a \in \{1; 2\}$
- c) Gib die Asymptoten an und deute sie physikalisch.
- d) Ein reelles Bild ergibt sich nur für $y > 0$. Wo muss der Gegenstand sein, damit von ihm ein reelles Bild entsteht? Bei welcher Gegenstandsweite ist die Linse genau in der Mitte zwischen Bild und Gegenstand?

5 Parallelschaltung von Widerständen

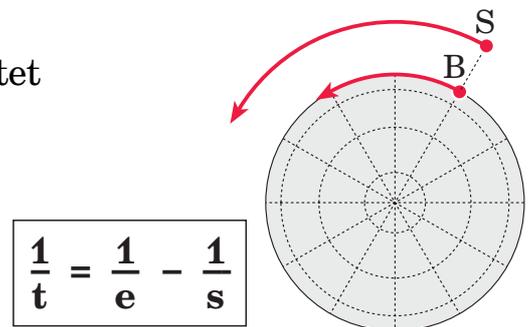
- a) Nimm $R_2 > 0$ als Parameter a einer Schar rationaler Funktionen mit der unabhängigen Variable $R_1 > 0$ als x und der abhängigen Variable R als y .
Bestimme den Scharterm $f_a(x)$ mit maximaler Definitionsmenge.



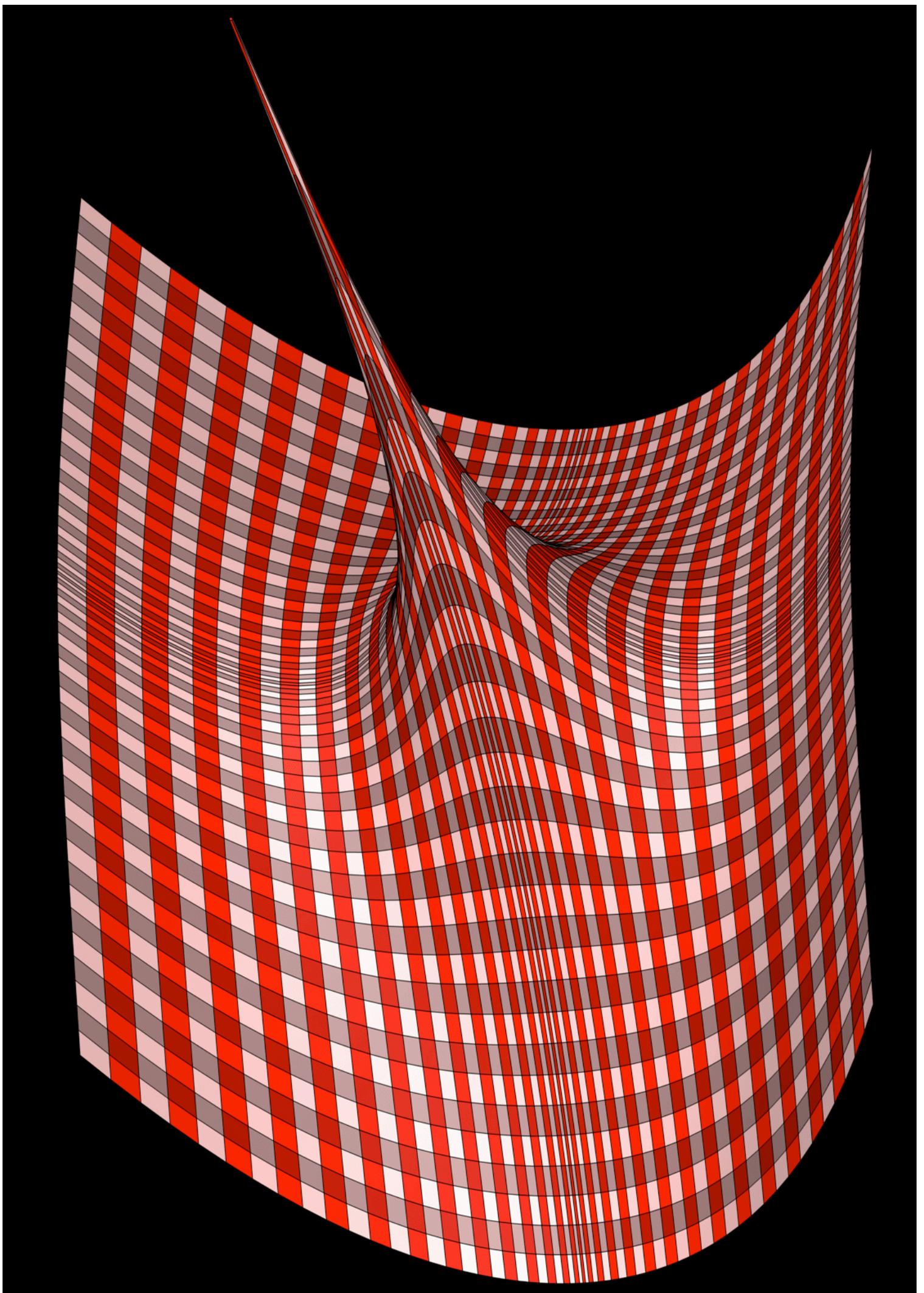
- b) Zeichne Scharkurven für $a \in \{1; 2\}$.
- c) Gib die Asymptoten an und deute sie physikalisch.

6 Satellitenumlauf

- t** Umlaufdauer eines Satelliten S , beobachtet von einem Punkt B des Äquators (Synodische Umlaufdauer > 0)
- e** Umlaufdauer von B (= 1 Tag)
- s** Umlaufdauer eines Satelliten S in der Äquatorebene (Siderische Umlaufdauer > 0)



- a) Nimm $e=1$ (Zeiteinheit = 1 Erdtag), s als unabhängige Variable x und t als abhängige Variable y . Bestimme den Funktionsterm $f(x)$ mit maximaler Definitionsmenge.
- b) Zeichne den Graphen.
- c) Gib die Asymptoten an und deute sie physikalisch.



IX. Technik des Integrierens

1. Partielle Integration

Bisher konnten wir nur solche Integrale berechnen, die sich auf gewisse Grundintegrale zurückführen lassen, wie

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

$$\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

Wie beim Differenzieren gibt es auch beim Integrieren Techniken für kompliziertere Funktionsterme. Sie sind Gegenstücke zu Ableitungsregeln. Zuerst behandeln wir die partielle Integration; sie ist das Gegenstück zur Produktregel beim Differenzieren.

Der besseren Übersicht halber schreiben wir u und v statt $u(x)$ und $v(x)$:

$$(uv)' = u'v + uv' \quad \text{umgestellt} \quad u'v = (uv)' - uv'$$

Sind u' und v' stetig, so gilt für die Stammfunktionen

$$\int u'v dx = \int [(uv)' - uv'] dx = \int (uv)' dx - \int uv' dx = uv - \int uv' dx \quad \text{kurz}$$

| |
|----------------------------------|
| $\int u'v dx = uv - \int uv' dx$ |
|----------------------------------|

In Worten: Eine Stammfunktion von $u'v$ ergibt sich, wenn man von uv eine Stammfunktion von uv' subtrahiert.

Die partielle Integration ist nur sinnvoll, wenn gilt:

- Der Integrand ist darstellbar als Produkt $u'v$.
- Vom 1. Faktor u' ist eine Stammfunktion u bekannt.
- Das Integral $\int uv' dx$ ist einfacher als das Ausgangsintegral $\int u'v dx$.

Bewährt hat sich das Schema $\int u'v dx =$

| | |
|--------------|--------------|
| $u' = \dots$ | $u = \dots$ |
| $v = \dots$ | $v' = \dots$ |

$$= uv - \int uv' dx$$

Wir unterscheiden 3 typische Fälle:

Typ »Abräumen«

Ist ein Faktor ein Polynom, und wird der andere beim Integrieren nicht komplizierter, so räumt man das Polynom durch mehrmaliges Differenzieren ab.

Beispiel:

- Unbestimmtes Integral

$$\int e^x(2-x^2) dx =$$

| | |
|-------------|------------|
| $u' = e^x$ | $u = e^x$ |
| $v = 2-x^2$ | $v' = -2x$ |

$$= e^x(2-x^2) - \int e^x(-2x) dx$$

$$= e^x(2-x^2) + 2 \int e^x \cdot x dx$$

| | |
|------------|-----------|
| $u' = e^x$ | $u = e^x$ |
| $v = x$ | $v' = 1$ |

$$= e^x(2-x^2) + 2[e^x \cdot x - \int e^x \cdot 1 dx]$$

$$= e^x(2-x^2) + 2xe^x - 2e^x + C = -x(x-2)e^x + C$$

Aus formalen Gründen schreibt man den Summanden C, wenn das letzte Integralzeichen verschwindet.

- Bestimmtes Integral

$$\int_0^1 e^x(2-x^2) dx = [-x(x-2)e^x]_0^1 = -1(1-2)e^1 - 0 = e$$

Typ »Faktor 1«

Ist von einer Funktion keine Stammfunktion bekannt, wohl aber ihre Ableitung, so kann der Faktor 1 weiterhelfen.

Beispiel:

- Unbestimmtes Integral

$$\int \ln x dx = \int 1 \cdot \ln x dx$$

| | |
|-------------|--------------------|
| $u' = 1$ | $u = x$ |
| $v = \ln x$ | $v' = \frac{1}{x}$ |

$$= x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C$$

- Bestimmtes Integral

$$\int_1^e \ln x dx = [x(\ln x - 1)]_1^e = e(\ln e - 1) - 1(\ln 1 - 1) = e \cdot 0 - 1(-1) = 1$$

Typ »Phönix«

Phönix ist ein Vogel der antiken Sagenwelt. Fühlte er sein Ende nahen, so verbrannte er sich, um aus seiner Asche neu zu erstehen.

Wenn beide Faktoren beim Integrieren und Differenzieren in absehbarer Zeit wiederkehren (also \exp , \sin , \cos), dann lohnt es sich, so lang partiell zu integrieren, bis das ursprüngliche Integral wie Phönix »aus seiner Asche« entsteht. Durch Umformen der so entstandenen Gleichung lässt sich das Integral berechnen.

Beispiel:

- Unbestimmtes Integral

$$I = \int e^{-x} \sin(2x) \, dx =$$

| | |
|----------------|-------------------|
| $u' = e^{-x}$ | $u = -e^{-x}$ |
| $v = \sin(2x)$ | $v' = 2 \cos(2x)$ |

$$= -e^{-x} \sin(2x) + 2 \int e^{-x} \cos(2x) \, dx$$

| | |
|----------------|--------------------|
| $u' = e^{-x}$ | $u = -e^{-x}$ |
| $v = \cos(2x)$ | $v' = -2 \sin(2x)$ |

$$= -e^{-x} \sin(2x) + 2[-e^{-x} \cos(2x) - 2 \int e^{-x} \sin(2x) \, dx]$$

(Phönix=I ist wieder da!)

$$= -e^{-x} \sin(2x) - 2e^{-x} \cos(2x) - 4 \cdot I$$

Aufgelöst nach I:

$$5 \cdot I = -e^{-x} [\sin(2x) + 2 \cos(2x)] + C_1$$

$$I = \int e^{-x} \sin(2x) \, dx = -\frac{1}{5} e^{-x} [\sin(2x) + 2 \cos(2x)] + C$$

- Bestimmtes Integral

$$\int_0^{\pi} e^{-x} \sin(2x) \, dx = \left[-\frac{1}{5e^x} (\sin(2x) + 2 \cos(2x)) \right]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{1}{5e^{\pi}} (\sin(2\pi) + 2 \cos(2\pi)) - \left(-\frac{1}{5e^0} (\sin 0 + 2 \cos 0) \right) = -\frac{2}{5e^{\pi}} + \frac{2}{5}$$

$$= \frac{2}{5} \left(1 - \frac{1}{e^{\pi}} \right)$$

Aufgaben ($n \in \mathbb{N}$)

$$\diamond 1 \quad \text{a) } \int x e^x dx \quad \text{b) } \int x \sin x dx \quad \text{c) } \int (x^2 - 1) \cos x dx \quad \text{d) } \int (x^2 - 1) e^x dx$$

$$\diamond 2 \quad \text{a) } \int x \ln x dx \quad \text{b) } \int x^2 \ln x dx \quad \text{c) } \int x^n \ln x dx$$

$$\bullet 3 \quad \text{a) } \int \frac{\ln x}{x} dx \quad \text{b) } \int x(x+1)^3 dx \quad \text{c) } \int x^{-0,5} \ln x dx$$

$$\bullet 4 \quad \text{a) } \int x e^{-x} dx \quad \text{b) } \int x^2 e^{-x} dx \quad \text{c) } \int e^x \cos x dx \quad \text{d) } \int (\sin x)^2 dx$$

$$\bullet 5 \quad \text{a) } \int (2x+1) \ln(x+1) dx \quad \text{b) } \int (\ln x)^2 dx$$

$$\text{c) } \int x (\ln x)^2 dx \quad \text{d) } \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$$

$$\diamond 6 \quad \text{a) } \int_0^1 x e^x dx \quad \text{b) } \int_1^2 (x^3 - 1) e^{-x} dx \quad \text{c) } \int_{-1}^1 (x-1)^2 e^x dx$$

$$7 \quad \text{a) } \int_0^{\pi/2} x \cos x dx \quad \text{b) } \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2 \sin x dx$$

$$8 \quad \text{a) } \int_1^{e^2} \ln x dx \quad \bullet \text{b) } \int_1^e \lg x dx$$

$$\bullet 9 \quad \text{a) } \int_0^{\pi/4} e^x \sin x dx \quad \text{b) } \int_0^{\pi/4} e^{-x} \cos x dx \quad \text{c) } \int_0^{\pi} e^{2x} \sin x dx$$

$$\bullet 10 \quad \text{a) } \int_0^{\pi} (\cos x)^2 dx \quad \text{b) } \int_0^{\pi} \sin x \cos x dx \quad \text{c) } \int_1^{e^{2/3}} \sqrt{x} \ln x dx$$

$$\text{d) } \int_1^e (\ln x)^2 dx \quad \text{e) } \int_{-e}^{-1} \ln x^2 dx \quad \bullet \text{f) } \int_0^1 x \ln(x^2 + 1) dx$$

$$\text{g) } \int_1^e \frac{\ln x}{x^n} dx$$

$$\bullet 11 \quad \text{Zeige, dass gilt: a) } \int x^n \sin x dx = -x^n \cos x + n \int x^{n-1} \cos x dx$$

$$\text{b) } \int (\sin x)^n dx = -\frac{1}{n} (\sin x)^{n-1} \cos x + \frac{n-1}{n} \int (\sin x)^{n-2} dx$$

2. Substitutionsregel

So wie die Produktregel (beim Differenzieren) zur partiellen Integration führt, so folgt die Substitutionsregel aus der Kettenregel: $u[v(x)]' = u'[v(x)] \cdot v'(x)$.

Beim Integrieren $\int f(x) dx$ hilft manchmal eine Substitution: Man ersetzt x durch $g(t)$. Dabei ändert sich die Form des Integrals: $f(x)$ wird zu $f[g(t)]$.

Was aber wird aus dx ? Dazu müssen wir etwas weiter ausholen.

F sei eine Stammfunktion von f , das heißt $F'(x) = f(x)$ oder $F(x) = \int f(x) dx + C$.

Substitution mit $x = g(t)$

$$F(x) = F[g(t)]$$

Abgeleitet nach der Kettenregel

$$\frac{d}{dt} F[g(t)] = f[g(t)] \cdot g'(t)$$

Geschrieben als Integralformel ($\int \dots dt$ auf beiden Seiten)

$$F[g(t)] = \int f[g(t)] \cdot g'(t) dt$$

Auf der linken Seite macht man die Ersetzung rückgängig $g(t) = x$

$$F(x) = \int f[g(t)] \cdot g'(t) dt \text{ mit } x = g(t)$$

Dieser Zusammenhang lässt sich ausdrücken in 2 Varianten:

Variante A

$$\int f(x) dx = \int f[g(t)] \cdot g'(t) dt$$

mit $x = g(t)$

Ersetze x durch $g(t)$
und dx durch $g'(t) dt$

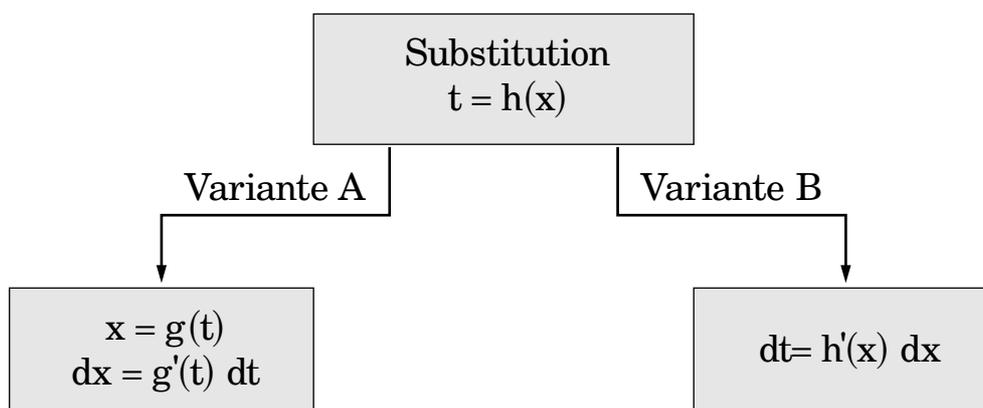
Variante B

$$\int f[h(x)] \cdot h'(x) dx = \int f(t) dt$$

mit $t = h(x)$

Ersetze $h(x)$ durch t
und $h'(x) dx$ durch dt

Praktisch geht man so vor: Im Integranden sucht man einen Teilterm $h(x)$ und ersetzt ihn durch t . Dann berechnet man $dt = h'(x) dx$ (Variante B) oder man löst $t = h(x)$ nach x auf: $x = g(t)$ und berechnet $dx = g'(t) dt$ (Variante A). Oft bieten sich mehrere Möglichkeiten für die Substitution an. Eine gute Substitution zu finden, erfordert Erfahrung, Fingerspitzengefühl und Glück!



Beispiel: $\int \left(\frac{1}{4}x - 5\right)^3 dx$

| |
|---|
| Substitution $t = h(x) = \frac{1}{4}x - 5$ |
|---|

| |
|--|
| Variante A $x = g(t) = 4t + 20$ $dx = g'(t) dt = 4 dt$ |
|--|

| |
|---|
| Variante B $dt = h'(x) dx = \frac{1}{4} dx$ $dx = 4 dt$ |
|---|

$$\int \left(\frac{1}{4}x - 5\right)^3 dx = \int t^3 \cdot 4 dt = 4 \cdot \frac{1}{4} t^4 + C = t^4 + C = \left(\frac{1}{4}x - 5\right)^4 + C$$

Beispiel: $\int xe^{-x^2} dx$

| |
|----------------------------|
| Substitution $t = -x^2$ |
|----------------------------|

| |
|--|
| Variante A $x = \sqrt{-t}$ $dx = \frac{-1}{2\sqrt{-t}} dt$ |
|--|

| |
|--|
| Variante B $dt = -2x dx$ $dx = -\frac{1}{2x} dt$ |
|--|

$$\begin{aligned} \int xe^{-x^2} dx &= \int \sqrt{-t} \cdot e^t \cdot \frac{-1}{2\sqrt{-t}} dt \\ &= -\frac{1}{2} \int e^t dt \\ &= -\frac{1}{2} e^t + C \\ &= -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int xe^{-x^2} dx &= \int x e^t \cdot \left(-\frac{1}{2x}\right) dt = -\frac{1}{2} \int e^t dt \\ &= -\frac{1}{2} e^t + C = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C \end{aligned}$$

Obacht: Nach der Substitution darf die Variable x nicht mehr im Integranden vorkommen.

Schneller gehts, wenn man sieht, dass hinterm \int -Zeichen $x dx$ schon steht. Denn dann ersetzt man $x dx$ durch $-\frac{1}{2} dt$ und bekommt sofort

$$\begin{aligned} \int e^{-x^2} x dx &= \int e^t \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) dt = -\frac{1}{2} e^t + C \\ &= -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C \end{aligned}$$

Der Fall $x = -\sqrt{-t}$ liefert das selbe Ergebnis.

| |
|--------------------------------|
| Substitution $t = e^{-x^2}$ |
|--------------------------------|

| |
|---|
| Variante A $-x^2 = \ln t \Rightarrow x = \pm \sqrt{-\ln t}$ $dx = \pm \frac{-1/t}{2\sqrt{-\ln t}} dt$ |
|---|

| |
|---|
| Variante B $dt = -2xe^{-x^2} dx \Rightarrow dx = \frac{-1}{2xe^{-x^2}} dt$ $xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} dt$ |
|---|

$$\begin{aligned} \int xe^{-x^2} dx &= \int \pm \sqrt{-\ln t} \cdot t \cdot \frac{\mp 1/t}{2\sqrt{-\ln t}} dt \\ &= -\frac{1}{2} \int dt = -\frac{1}{2} t + C \\ &= -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int xe^{-x^2} dx &= -\frac{1}{2} \int dt \\ &= -\frac{1}{2} t + C = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C \end{aligned}$$

Ein bestimmtes Integral löst man am besten so:

- Stammfunktion suchen mit Substitution
- Substitution rückgängig machen und Integrationsgrenzen einsetzen

Beispiel: $\int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}} dx$

$$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}} dx =$$

$$t = e^x + 1 \quad e^x = t - 1 \quad dt = e^x dx$$

$$= \int \frac{t-1}{\sqrt{t}} dt = \int \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right) dt = \frac{2}{3} t^{3/2} - 2 \cdot t^{1/2} + C$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{e^x+1}^3 - 2 \sqrt{e^x+1} + C$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}} dx &= \left[\frac{2}{3} \sqrt{e^x+1}^3 - 2 \sqrt{e^x+1} \right]_0^{\ln 2} = \left(\frac{2}{3} \cdot 3 \sqrt{3} - 2 \sqrt{3} \right) - \left(\frac{2}{3} \cdot 2 \sqrt{2} - 2 \sqrt{2} \right) \\ &= 0 - \left(-\frac{2}{3} \sqrt{2} \right) = \frac{2}{3} \sqrt{2} \end{aligned}$$

Aufgaben

◇1 a) $\int_1^4 (1-x)^2 dx$ b) $\int_1^2 5(2x-3)^4 dx$ c) $\int_{-1}^8 \sqrt{x+1} dx$ d) $\int_2^9 \sqrt[5]{(3x-2)^3} dx$

◇2 a) $\int_0^1 \frac{3}{(2x+1)^2} dx$ b) $\int_e^{5e} \frac{1}{2x-e} dx$ c) $\int_3^{16} \frac{1}{\sqrt{3x+16}} dx$

◇3 a) $\int_0^1 4e^{2x+1} dx$ b) $\int_{1/2}^{3/2} (2e^{3-2x})^2 dx$ c) $\int_1^3 \sin(2-x) dx$

4 a) $\int_1^2 \frac{2}{2x-1} dx$ b) $\int_0^1 \frac{12x}{3x^2+1} dx$ c) $\int_3^4 \frac{2x^3}{x^2-8} dx$

5 a) $\int_3^4 6x(x^2-2)^2 dx$ b) $\int_0^1 2e \cdot x \cdot e^{-x^2} dx$ c) $\int_1^2 x^n \cdot e^{x^{n+1}} dx$

6 a) $\int_0^{\pi/2} \sin 2x dx$ b) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} 16(\sin x)(\cos x)^3 dx$ c) $\int_{\pi/2}^{\pi} e^{\sin x} \cos x dx$

$$\diamond 7 \text{ a) } \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$$

$$\text{b) } \int_{-2}^{-1} \frac{e^x}{1-e^x} dx$$

$$\text{c) } \int_{-2}^{-1} \frac{1}{1+e^x} dx$$

$$8 \text{ a) } \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx$$

$$\text{b) } \int_0^1 \frac{x}{(x+1)^2} dx$$

$$\text{c) } \int_3^{15} \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$$

$$9 \text{ a) } \int \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}\sqrt{x^2-1}} dx$$

$$\text{b) } \int_0^{0,8} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$\text{c) } \int_{0,6}^{0,8} \frac{375x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$10 \text{ a) } \int_{-1}^1 \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$$

$$\text{b) } \int_1^2 \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} dx$$

$$\text{c) } \int_0^1 3e^x \sqrt{e^x - 1} dx$$

$$11 \text{ a) } \int_1^e 3 \cdot \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$$

$$\text{b) } \int_1^e 4 \cdot \frac{\ln \sqrt{x}}{x} dx$$

$$12 \text{ a) } \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x}{1 - \cos x} dx$$

$$\text{b) } \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \cos x}} dx$$

$$\text{c) } \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x}{e^{\cos x}} dx$$

$$\bullet 13 \text{ a) } \int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$$

$$\text{b) } \int_0^1 \sqrt{x} e^{\sqrt{x}} dx$$

$$\text{c) } \int_0^{\pi} x^2 \sin 2x dx$$

$$\text{d) } \int_0^{\pi/2} 3e^{2x} \cos 3x dx$$

$$\bullet 14 \int_0^{2\pi} 2(\sin x)^2 dx$$

a) Verwende die Formel $\cos 2x = 1 - 2(\sin x)^2$.

b) Verwende $(\sin x)^2 = \sin x \cdot \sin x$ und integriere partiell (Phönix!).

$$\bullet 15 \text{ f(x) = } \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

a) Diskutiere f und zeichne G_f .

b) Bestimme k so, dass gilt: $\int_0^k f(x) dx = 0$.

c) $F(x) := \int_{e^2}^x f(t) dt$. Bestimme D_F und beantworte ohne zu integrieren:
Wo hat F Nullstellen? Wo ist F positiv? Wo steigt G_F ?
Wo hat G_F Extrempunkte (Art?) und Wendepunkte?

d) Bestimme F(x) durch Integration und untersuche F(x) an den Grenzen der Definitionsmenge.

Gib an die Koordinaten der Extrem- und Wendepunkte. Zeichne G_F .

e) Zeige, dass $\int_0^{e^2} F(x) dx$ existiert und berechne das Integral.

•16 $f(x) = \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$

- a) Bestimme die maximale Definitionsmenge.
 b) Zeige: f ist symmetrisch zum Ursprung.
 c) Bestimme das Verhalten von f an den Grenzen der Definitionsmenge.
 d) Welcher Zusammenhang besteht zwischen $f(x)$ und $f(\frac{1}{x})$?
 e) Diskutiere f und zeichne G_f .
 f) Berechne $\int_0^{0,5} f(x) dx$.

•17 $f_a(x) = \frac{e^x - a}{e^x + a}$

- a) α) Bestimme die Definitionsmenge und (falls vorhanden) die Nullstellen. Fallunterscheidung!
 β) Untersuche das Monotonieverhalten anhand der 1. Ableitung.
 γ) Bestimme die Grenzwerte von $f_a(x)$ und $f'_a(x)$ für $x \rightarrow \pm\infty$.
 b) α) Für welche Werte von a haben die Scharkurven Wendepunkte ?
 β) Zeige durch Rechnung, dass die Kurven für $a = \pm 1$ punktsymmetrisch sind zum Ursprung.
 γ) Zeichne mithilfe dieser Ergebnisse die Scharkurven für $a = \pm 1$ im Intervall $[-3; 3]$, $1 \triangleq 2 \text{ cm}$.
 c) α) Bestimme $\int f_a(x) dx$; verwende die Umformung $\frac{e^x - a}{e^x + a} = \frac{2e^x}{e^x + a} - 1$.
 β) $F(u)$ sei Inhalt der Fläche, die eingeschlossen ist von den Kurven für $a = \pm 1$ und den Geraden mit $x=1$ und $x=u$, $u > 1$. Untersuche, ob der Flächeninhalt $F(u)$ für $u \rightarrow \infty$ einen Grenzwert hat.
 d) Sind die Scharfunktionen f_a in der Definitionsmenge umkehrbar ? Begründung! Bestimme die Schar der Umkehrfunktionen φ_a .

•18 $f_a(x) = (1 - \ln x)x^a$

- a) Untersuche das Verhalten von $f_a(x)$ an den Grenzen der Definitionsmenge.
 b) Bestimme die Schnittpunkte der Scharkurven mit den Parameterwerten a und b .
 c) Bestimme Ort und Art der Waagrechtpunkte sowie eine Gleichung der Kurve, auf der sie liegen.

- d) Für welche Parameterwerte schließen die Scharkurven mit der x-Achse Flächenstücke ein, die im Endlichen liegen ?
- e) Welche Scharkurve schließt mit der x-Achse ein Flächenstück von extremem Flächeninhalt ein ? Art des Extremums ?

19 $f_a(x) = \frac{a + \ln x}{x^2}$

- a) α) Untersuche $f_a(x)$ und $f'_a(x)$ an den Grenzen der Definitionsmenge. Bestimme die Nullstellen.
- β) Ermittle, in welchen Teilmengen von D die Schar f_a monoton ist. Beweise, dass jede Scharkurve genau einen Hochpunkt hat. Gib die Wertemenge W von f_a an.
- b) α) Skizziere die Scharkurve zu $a=0$ mithilfe der bisherigen Ergebnisse.
- β) Berechne den Inhalt der Fläche, die begrenzt ist von der x-Achse und der Scharkurve G_a . Bei welcher Scharkurve ist dieser Inhalt 1 ?
- c) $I_u(x) = \int_u^x f_0(t) dt$, $f_0(t) = \frac{\ln t}{t^2}$, $x \geq u$, $u \geq 1$
- α) Zeige, dass die Schar der Integralfunktionen I_u eine echte Teilmenge der Schar der Stammfunktionen von $f_0(x)$ ist für $x \geq u$.
- β) Begründe, dass immer gilt: $I_u(x) \geq 0$.
- d) α) Untersuche die Kurve von I_u auf Extrem- und Wendepunkte und bestimme diese gegebenenfalls (Fallunterscheidung für u!).
- β) Zeige, dass die zu $u=1$ gehörige Funktion I_1 umkehrbar ist. Diese Funktion heiße I_1^* .

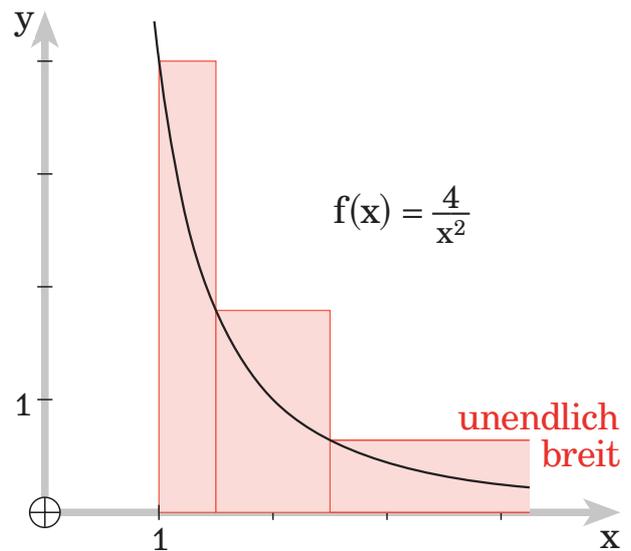
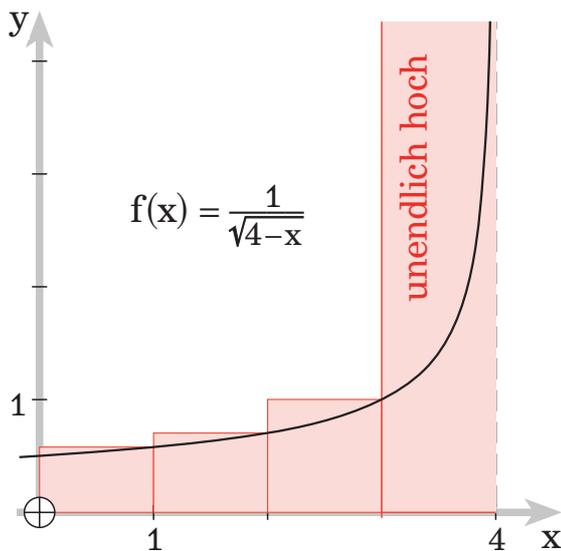
Zeige, ohne $I_1^*(x)$ zu berechnen: $\int_0^1 I_1^*(x) dx$ divergiert.

3. Uneigentliches Integral

Ein bestimmtes Integral $\int_a^b f(x)dx$ ist definiert als Grenzwert einer Summe von Rechteckinhalten (einschließlich Vorzeichen). Diese Definition greift nur dann, wenn alle Rechtecke endlichen Flächeninhalt haben. Sie versagt in 2 Fällen:

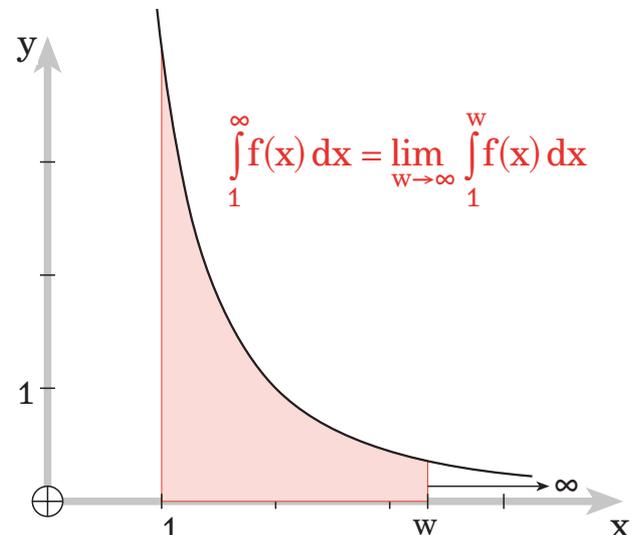
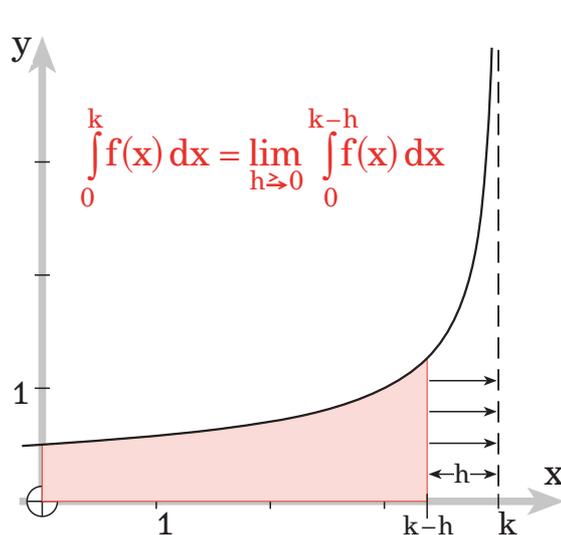
Der Integrand $f(x)$ wird unendlich in $[a;b]$: dann ist mindestens 1 Rechteck unendlich hoch.

Mindestens 1 Integrationsgrenze ist unendlich: dann ist mindestens 1 Rechteck unendlich breit.



Definition Ein bestimmtes Integral heißt **uneigentlich**, wenn der Integrand oder eine Grenze unendlich wird.

Der Grenzwert erlaubt es, die Definition des bestimmten Integrals so zu erweitern, dass auch in diesen Fällen eine Berechnung manchmal möglich ist. Die Lösungs-idee ist jedesmal die selbe: Man beschränkt das Integrationsintervall so, dass weder Integrand noch Grenzen unendlich sind. Erst nach der Integration nähert man eine Integrationsgrenze der kritischen Stelle durch Grenzwertbildung.



Ist der Grenzwert endlich, so spricht man von einem **konvergenten** Integral, sonst von einem **divergenten** Integral.

Beispiel: $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{4-x}} dx$ kritische Stelle ist hier $x=4$;
dort wird der Integrand unendlich.

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x}} dx = -2\sqrt{4-x} + C$$

Integration bis kurz vor die kritische Stelle 4

$$\int_0^{4-h} \frac{1}{\sqrt{4-x}} dx = [-2\sqrt{4-x}]_0^{4-h} = -2\sqrt{h} - (-2\sqrt{4}) = -2\sqrt{h} + 4$$

Grenzwert für $h \rightarrow 0$: $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{4-x}} dx = \lim_{h \rightarrow 0} (-2\sqrt{h} + 4) = 4$

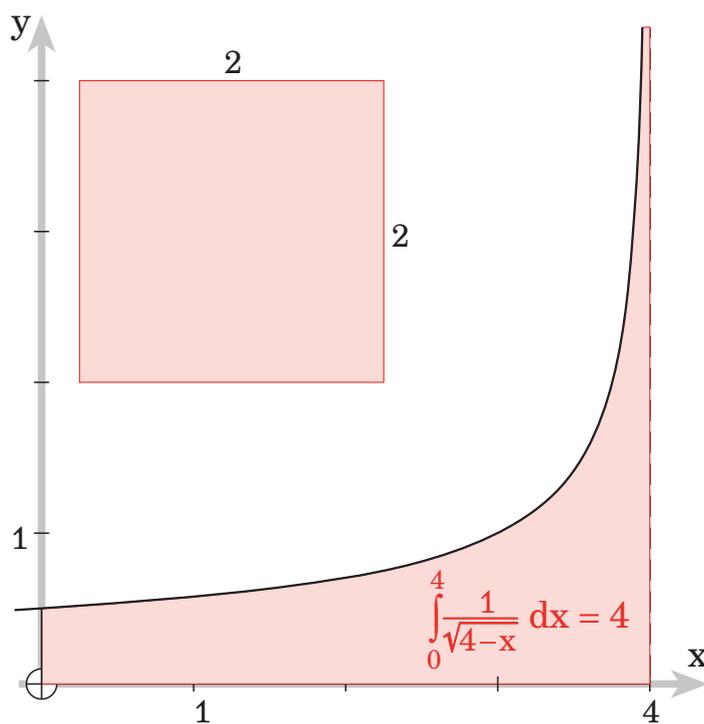
Das uneigentliche Integral konvergiert gegen 4.

Die Flächendarstellung liefert ein seltsames Paradoxon:

Die rosa Fläche erstreckt sich zwar ins Unendliche,

hat also unendlichen Umfang,

ihr Inhalt aber ist endlich, nämlich 4.



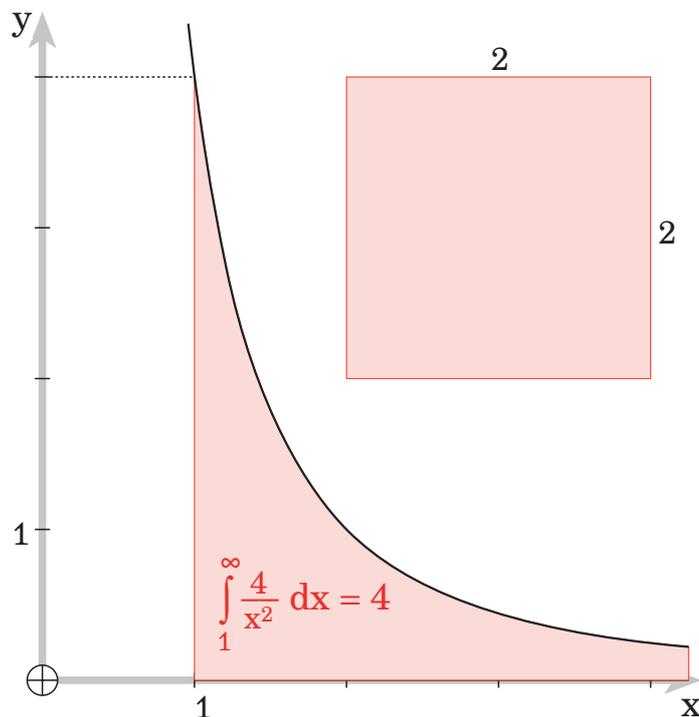
Beispiel: $\int_1^{\infty} \frac{4}{x^2} dx$ kritische Stelle ist hier die obere Integrationsgrenze ∞ .

$$\int \frac{4}{x^2} dx = -\frac{4}{x} + C$$

$$\int_1^w \frac{4}{x^2} dx = \left[-\frac{4}{x}\right]_1^w = -\frac{4}{w} + 4$$

Grenzwert für $w \rightarrow \infty$ $\int_1^{\infty} \frac{4}{x^2} dx = \lim_{w \rightarrow \infty} \left(-\frac{4}{w} + 4\right) = 4$

Das uneigentliche Integral konvergiert gegen 4.



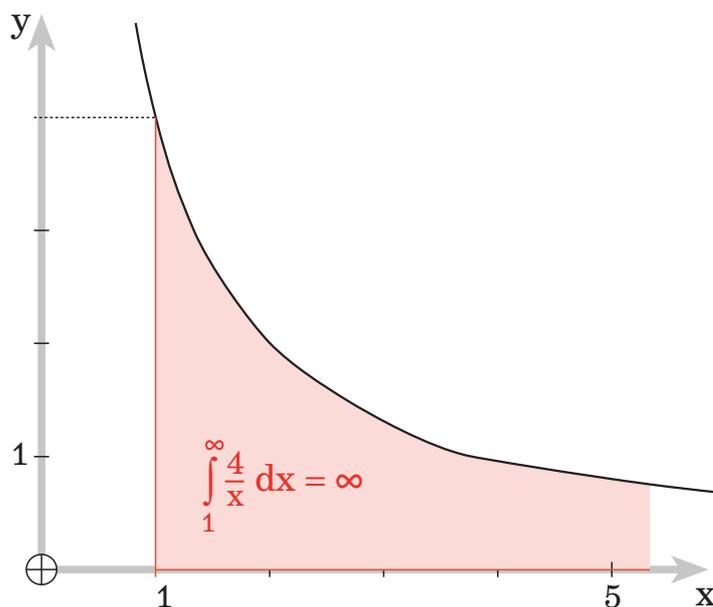
Beispiel: $\int_1^{\infty} \frac{4}{x} dx$ kritische Stelle ist hier die obere Integrationsgrenze ∞ .

$$\int \frac{4}{x} dx = 4 \ln|x| + C$$

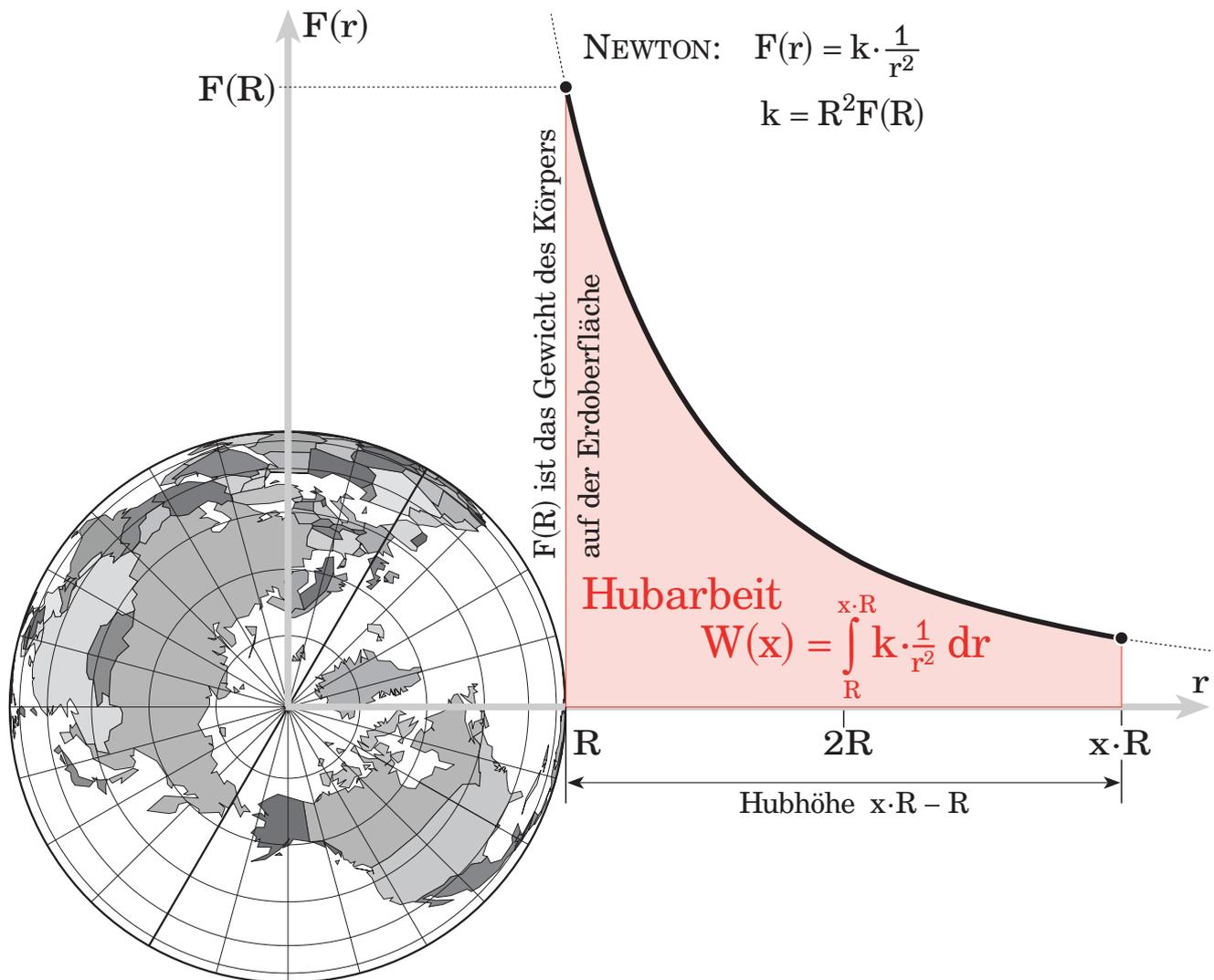
$$\int_1^w \frac{4}{x} dx = [4 \ln|x|]_1^w = 4 \ln w, \quad w > 0$$

$$\int_1^{\infty} \frac{4}{x} dx = \lim_{w \rightarrow \infty} 4 \ln w = \infty$$

Das uneigentliche Integral divergiert.



Beispiel: Schuss ins All



Im Kapitel IV haben wir eine Formel hergeleitet für die Hubarbeit, die nötig ist, um einen Körper vom Gewicht $F(R) = mg$ in die Höhe $3R$ zu heben, R ist der Erdradius. Ersetzt man $3R$ durch $x \cdot R$, so ergibt sich

$$W(x) = \int_R^{xR} k \cdot \frac{1}{r^2} dr \quad \text{mit} \quad k = R^2 F(R).$$

Soll ein Körper auf Nimmerwiedersehn im All verschwinden, dann muss x gegen ∞ gehen. Ist die dazu nötige Energie endlich ?

$$\int_R^{\infty} k \cdot \frac{1}{r^2} dr = ?$$

$$\int k \cdot \frac{1}{r^2} dr = -\frac{k}{r} + C$$

$$\int_R^{xR} k \cdot \frac{1}{r^2} dr = \left[-\frac{k}{r} \right]_R^{xR} = -\frac{k}{xR} + \frac{k}{R}$$

$$\int_R^{\infty} k \cdot \frac{1}{r^2} dr = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{k}{xR} + \frac{k}{R} \right) = \frac{k}{R} = \frac{R^2 F(R)}{R} = R \cdot F(R) = R \cdot mg$$

Das Integral ist konvergent:

Zum Schuss ins Unendliche braucht man mindestens die Energie $R \cdot mg$.

Ein Raumfahrer der Masse 75kg ist auf der Erde $mg = 750\text{N}$ schwer.

Für die Flucht weg von der Erde braucht er die Energie

$$R \cdot mg = 6,37 \cdot 10^6 \text{m} \cdot 750 \text{N} = 4,78 \cdot 10^9 \text{Nm.}$$

Diese hat er als Bewegungsenergie, wenn seine Startgeschwindigkeit v

die Bedingung erfüllt: $\frac{1}{2}mv^2 = R \cdot mg$

$$v = \sqrt{2Rg} = \sqrt{2 \cdot 6,37 \cdot 10^6 \text{m} \cdot 10 \text{m/s}^2} = 11,3 \text{km/s}$$

Diese Geschwindigkeit heißt **Fluchtgeschwindigkeit** oder

2.kosmische Geschwindigkeit. Sie hängt ab vom Planeten, also der Erde, nicht aber von der Masse des fliehenden Körpers.

Aufgaben

◇1 Berechne, falls möglich

a) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$

b) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx$

c) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} dx$

d) $\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt[3]{x^4}} dx$

e) $\int_{-16}^{16} \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx$

f) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

2 Berechne, falls möglich

a) $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{(\sin x)^2} dx$

b) $\int_0^{\pi} \frac{1}{(\cos x)^2} dx$

◇3 Für welche Werte von a konvergiert $\int_0^1 \frac{1}{x^a} dx$?

◇4 Für welche Werte von a konvergiert $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^a} dx$?

◇5 Berechne, falls möglich

a) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} dx$

b) $\int_0^{\infty} \frac{x}{x^2+1} dx$

c) $\int_1^{\infty} \frac{x^2+x+1}{x^4} dx$

d) $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$

6 Berechne, falls möglich

a) $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$

b) $\int_0^{\infty} x e^{-x} dx$

c) $\int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx$

◊7 Berechne, falls möglich

a) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2} dx$

b) $\int_1^{\infty} \left(1 + \frac{e^x}{1-e^x}\right) dx$

c) $\int_0^{\infty} \left(1 + \frac{e^x}{1-e^x}\right) dx$

•8 Zeige, dass für $x \geq 2$ gilt: $\frac{1}{\sqrt{x^3-1}} < \frac{2}{\sqrt{x^3}}$ und damit $\int_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3-1}} dx < A$.

Bestimme einen möglichst kleinen Wert für A.

Bestimme gegebenenfalls einen Näherungswert des Integrals mit einem passenden Computer-Programm.

•9 Zeige, dass für $x > 0$ gilt: $0 < \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) < \frac{1}{x^2}$ und damit $0 < \int_1^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx < A$.

Bestimme einen möglichst kleinen Wert A.

Bestimme gegebenenfalls einen Näherungswert des Integrals mit einem passenden Computer-Programm.

•10 a) Zeige, dass $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$ divergiert und deute dies geometrisch.

b) Das zu $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$ gehörige Flächenstück rotiere um die x-Achse.

Berechne das Volumen des dabei entstehenden Rotationskörpers.

•11 a) Bestimme $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ und $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ und deute dies geometrisch.

b) Das zu $\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ gehörige Flächenstück rotiere um die x-Achse,

das zu $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ gehörige Flächenstück rotiere um die y-Achse.

Berechne die Volumina der dabei entstehenden Rotationskörper.

Zum Nachdenken

① Substitution der Integrationsgrenzen

Beim Integrieren durch Substitution haben wir die Substitution nur dazu verwendet, eine Stammfunktion zu finden. Für bestimmte Integrale mussten wir sie rückgängig machen, um die Integrationsgrenzen einsetzen zu können: $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

Man kann aber auch die Integrationsgrenzen gleich mitsubstituieren:

| | | |
|---|----------------------------|--|
| $\int_a^b f(x) dx =$ | Substitution $t = h(x)$ | |
| $x = g(t) = h^{-1}(t)$ $dx = g'(t) dt$ | | Substitution der Grenzen $t_1 = h(a)$ $t_2 = h(b)$ |

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{h(a)}^{h(b)} f[g(t)] \cdot g'(t) dt$$

Beispiel: $\int_0^{\pi/2} (\cos x)^3 \sin x dx =$

| | |
|--------------------|------------------------|
| $t = \cos x$ | $dt = -\sin x dx$ |
| $t_1 = \cos 0 = 1$ | $t_2 = \cos \pi/2 = 0$ |

$$= \int_1^0 (-t^3) dt = \left[-\frac{1}{4} t^4 \right]_1^0 = 0 - \left(-\frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4}$$

Man erspart sich die Rücksubstitution, muss dafür aber die Integrationsgrenzen substituieren.

② Auf Definitionsmengen achten

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}} dx, \quad x \neq 2$$

=

| | |
|-------------|-----------|
| $t = x - 2$ | $dt = dx$ |
|-------------|-----------|

$$= \int \frac{1}{\sqrt[3]{t^2}} dt, \quad t \neq 0$$

! Obacht: $\frac{1}{\sqrt[3]{t^2}} = |t|^{-2/3}$, denn $t^{-2/3}$ ist nur definiert für $t > 0$

andererseits ist $t^2 = |t|^2$

$$\int |t|^{-2/3} dt = \begin{cases} \int t^{-2/3} dt & \text{für } t > 0 \\ \int (-t)^{-2/3} dt & \text{für } t < 0 \end{cases} = \begin{cases} 3t^{1/3} + C_1 & \text{für } t > 0 \\ -3(-t)^{1/3} + C_2 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}} dx = \begin{cases} 3\sqrt[3]{x-2} + C_1 & \text{für } x > 2 \\ -3\sqrt[3]{2-x} + C_2 & \text{für } x < 2 \end{cases}$$

③ Grenzen der Integrationsmethoden

Mit den Ableitungsregeln lassen sich alle Terme ableiten, die aufgebaut sind aus Termen der Grundfunktionen. Beim Integrieren ist das anders. Schon bei einfachen Integranden findet man keinen Term für die Stammfunktion – Beispiele:

$$f(x) = e^{-x^2} \quad f'(x) = -2xe^{-x^2} \quad \int e^{-x^2} dx = ?$$

$$g(x) = \frac{1}{\ln x} \quad g'(x) = \frac{-1}{x(\ln x)^2} \quad \int \frac{1}{\ln x} dx = ?$$

Erstaunlicherweise sind kompliziertere Integranden oft leichter integrierbar:

$$\int xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C \quad \text{oder} \quad \int \frac{1}{x \ln x} dx = \begin{cases} \ln \ln x + C_1 & \text{für } 1 < x \\ \ln(-\ln x) + C_2 & \text{für } 0 < x < 1 \end{cases}$$

④ Rekursive Berechnung bestimmter Integrale

Man führt ein Integral schrittweise zurück auf einfachere Integrale, bis man auf eines stößt, das sich berechnen lässt. Beispiel: Wallis-Produkt (John WALLIS 1616 bis 1703).

$$J_k = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^k dx, \quad k \in \{2, 3, 4, \dots\}$$

| | |
|----------------------|-----------------------------------|
| $u' = \sin x$ | $u = -\cos x$ |
| $v = (\sin x)^{k-1}$ | $v' = (k-1)(\sin x)^{k-2} \cos x$ |

$$= [-\cos x (\sin x)^{k-1}]_0^{\pi/2} + (k-1) \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{k-2} (\cos x)^2 dx$$

$$= 0 + (k-1) \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{k-2} [1 - (\sin x)^2] dx$$

$$= (k-1) \int_0^{\pi/2} (\sin x)^{k-2} dx - (k-1) \int_0^{\pi/2} (\sin x)^k dx$$

$$J_k = (k-1)J_{k-2} - (k-1)J_k \quad \text{aufgelöst nach } J_k \text{ ergibt } J_k = \frac{k-1}{k} J_{k-2}$$

k ist gerade: $k = 2n$

$$J_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{2n-5}{2n-4} \cdot \dots \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot J_0 \quad J_0 = \int_0^{\pi/2} 1 dx = \frac{1}{2} \pi$$

$$J_{2n} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} \cdot \frac{1}{2} \pi$$

k ist ungerade: $k = 2n+1$

$$J_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n-4}{2n-3} \cdot \dots \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot J_1 \quad J_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi/2} = 1$$

$$J_{2n+1} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)} \cdot 1$$

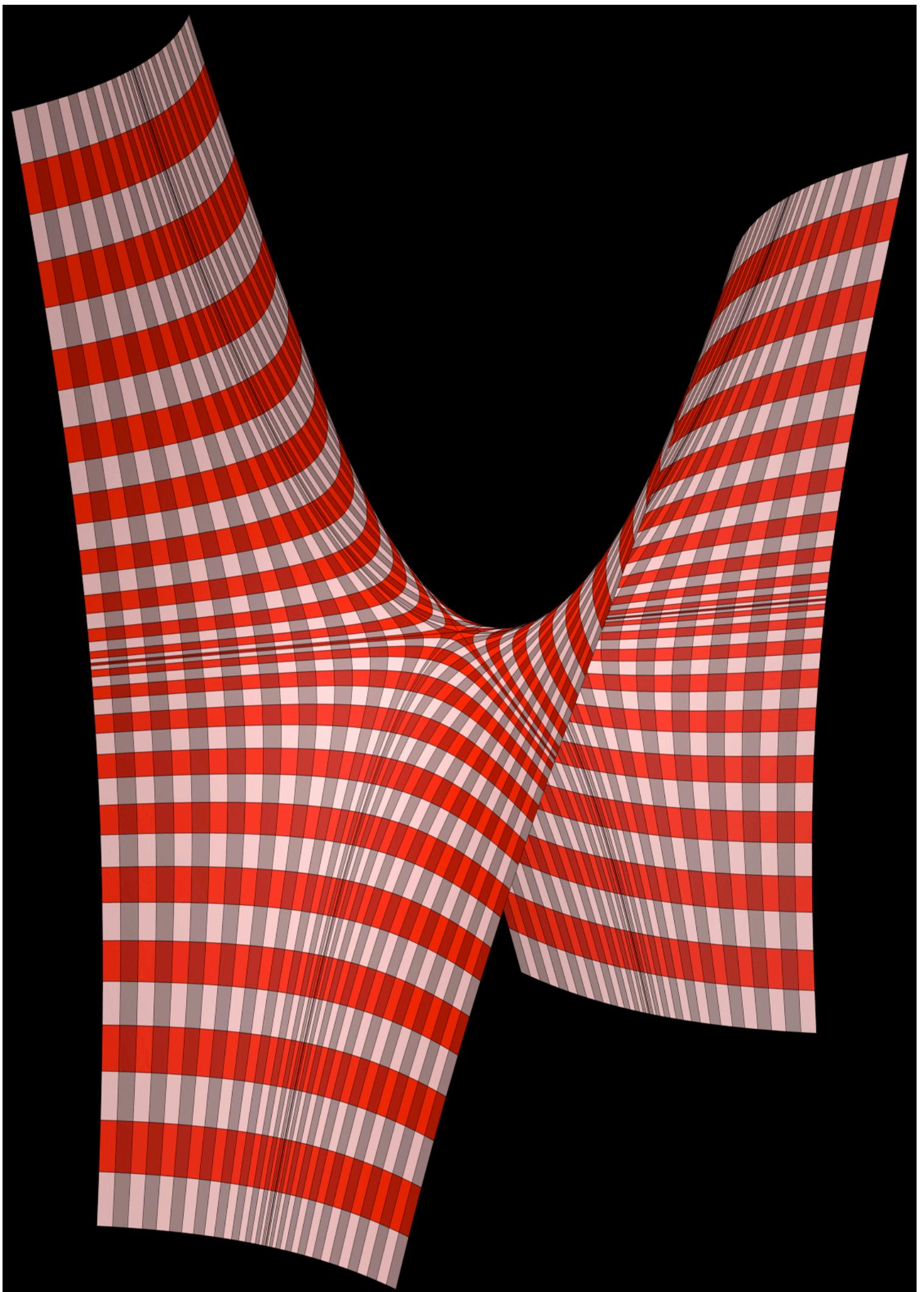
Für $0 < x < \frac{1}{2} \pi$ ist $0 < \sin x < 1$ und damit $0 < (\sin x)^{2n+1} < (\sin x)^{2n} < (\sin x)^{2n-1}$.

Integration dieser Ungleichungskette $\int_0^{\pi/2} \dots dx$ ergibt $0 < J_{2n+1} < J_{2n} < J_{2n-1} \quad || : J_{2n+1}$

$$\Rightarrow 1 < \frac{J_{2n}}{J_{2n+1}} < \frac{J_{2n-1}}{J_{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n} = 1 + \frac{1}{2n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{J_{2n}}{J_{2n+1}} = 1$$

$$\frac{J_{2n}}{J_{2n+1}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)(2n+1)}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n \cdot 2n} \cdot \frac{1}{2} \pi. \quad \text{Für große Werte von } n \text{ ergibt sich das}$$

$$\text{Wallis-Produkt für } \frac{1}{2} \pi \text{ (1655): } \frac{1}{2} \pi \approx \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)}$$



X. Wurzel- und Arkus-Funktionen

1. Potenzfunktion mit rationalen Exponenten

Potenzen von x im Funktionsterm haben wir bisher beschränkt auf ganzzahlige Exponenten und den Exponenten $\frac{1}{2}$. Die Erweiterung auf rationale Exponenten führt zur Potenzfunktion mit $f(x) = x^{z/n}$, $z \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$.

Wegen der Definition von $x^{z/n}$ ist die Definitionsmenge $D = \begin{cases} \mathbb{R}_0^+ & \text{für } \frac{z}{n} > 0 \\ \mathbb{R}^+ & \text{für } \frac{z}{n} < 0 \end{cases}$
Für ganzzahlige Exponenten z gilt $(x^z)' = z \cdot x^{z-1}$,

analog gilt auch für rationale Exponenten $\left(x^{\frac{z}{n}}\right)' = \frac{z}{n} \cdot x^{\frac{z}{n}-1}$

Beweis: Ableitung von $x^{1/n}$

Ableitung der Umkehrfunktion (siehe V.2) $x = f(y) = y^n \iff y = f^{-1}(x) = x^{1/n}$

$$f'(y) = n \cdot y^{n-1}$$

$$\left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{n \cdot (x^{1/n})^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1}$$

Die Kettenregel liefert die Ableitung von $x^{z/n}$

$$\left(x^{\frac{z}{n}}\right)' = \left(\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^z\right)' = z \cdot \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{z-1} \cdot \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{z}{n} \cdot x^{\frac{z}{n}-1} \quad \text{q.e.d.}$$

Damit gilt fürs Integrieren

$$\int x^{\frac{z}{n}} dx = \frac{n}{z+n} \cdot x^{\frac{z+n}{n}} + C, \quad \frac{z}{n} \neq -1$$

Beispiel: **Neil-Parabel** (W. NEIL [ni:l], englischer Mathematiker, 1637 bis 1670)

$$f(x) = |x|^{2/3}$$

Wegen $|x| = |-x|$ ist die Neil-Parabel symmetrisch zur y -Achse.

$$f(x) = |x|^{2/3} = \begin{cases} x^{2/3} & \text{für } x \geq 0 \\ (-x)^{2/3} & \text{für } x < 0 \end{cases} \quad f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x^{-1/3} & \text{für } x > 0 \\ -\frac{2}{3}(-x)^{-1/3} & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Monotonie: $\left. \begin{array}{l} f'(x) > 0 \text{ für } x > 0 \\ f'(x) < 0 \text{ für } x < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow O(0|0) \text{ ist Tiefpunkt.}$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{3 \sqrt[3]{x}} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2}{3 \sqrt[3]{-x}} = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \text{die } y\text{-Achse ist senkrechte Tangente im Tiefpunkt}$$

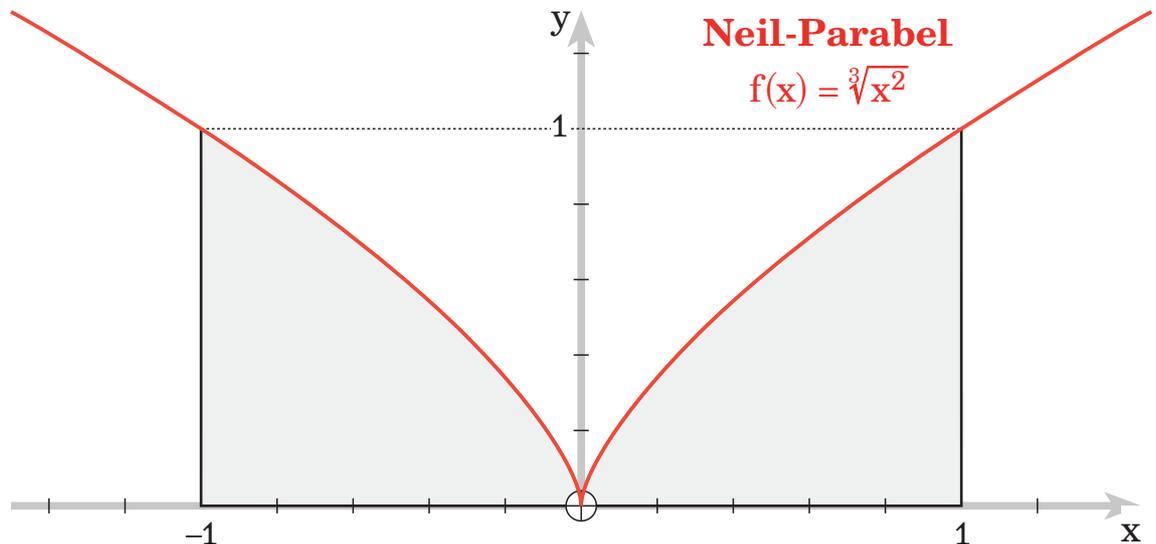
Der Tiefpunkt ist Ecke mit dem Eckwinkel 0° .

Solche Ecken heißen **Spitzen**.

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{-2}{9}x^{-4/3} & \text{für } x > 0 \\ \frac{-2}{9}(-x)^{-4/3} & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Krümmung: Rechtskurve für $x \neq 0$

$$\int_{-1}^1 |x|^{2/3} dx = 2 \int_0^1 x^{2/3} dx = 2 \left[\frac{3}{5} x^{5/3} \right]_0^1 = \frac{6}{5}$$



Beispiel: Halbkreis um O mit Radius 5

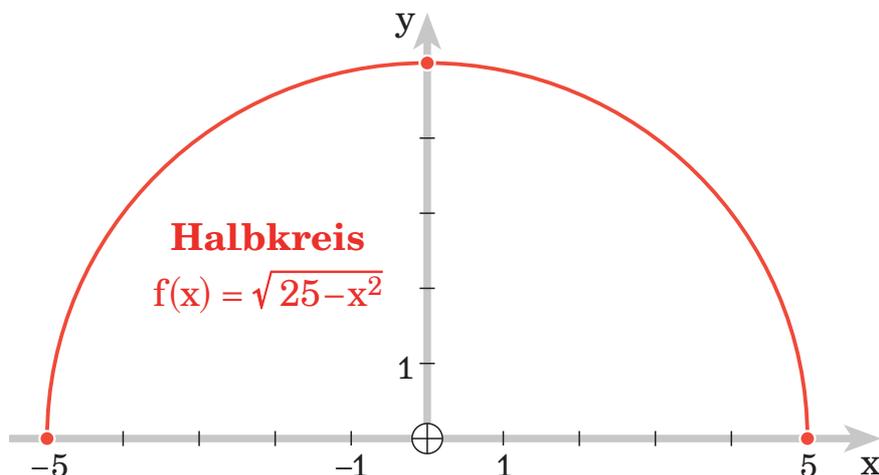
$$f(x) = \sqrt{25-x^2} \quad -5 \leq x \leq 5 \quad f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{25-x^2}} \quad -5 < x < 5$$

Weil nur x^2 vorkommt, ist $f(-x) = f(x)$, also Symmetrie zur y -Achse.
 $(-5|0)$ und $(5|0)$ sind Randtiefpunkte.

Monotonie: $\left. \begin{array}{l} f'(x) < 0 \text{ für } x > 0 \\ f'(x) > 0 \text{ für } x < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow O(0|5) \text{ ist Hochpunkt.}$

$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \nearrow -5} f'(x) = \gg \frac{5}{+0} \ll = \infty \\ \lim_{x \searrow 5} f'(x) = \gg \frac{-5}{+0} \ll = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \text{senkrechte Tangenten} \\ \text{in den Randtiefpunkten}$

Wegen $y = \sqrt{25-x^2}$ ist $x^2 + y^2 = 5^2$, das heißt, jeder Kurvenpunkt hat vom Ursprung die Entfernung 5 (Pythagoras): Die Kurve ist ein Halbkreis.



Asymptotisches Verhalten von Wurzelfunktionen

Für große x -Werte gilt $ax^2 + bx + c \approx ax^2$ und damit $\sqrt{ax^2 + bx + c} \approx \sqrt{ax^2} = \sqrt{a} \cdot |x|$ für $a > 0$. Im Groben verhält sich also eine Wurzelfunktion mit einem quadratischen Polynom als Radikanden für $x \rightarrow \infty$ wie eine lineare Funktion: Wir erwarten eine Asymptote mit Steigung \sqrt{a} und entsprechend eine mit Steigung $-\sqrt{a}$ für $x \rightarrow -\infty$.

$g(x) = mx + t$ sei Term einer Asymptote der Wurzelfunktion mit $w(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$. Dann gilt $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [w(x) - g(x)] = 0$, also $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [\sqrt{ax^2 + bx + c} - (mx + t)] = 0$.

Trickreiche Erweiterung: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{[\sqrt{ax^2 + bx + c} - (mx + t)][\sqrt{ax^2 + bx + c} + (mx + t)]}{\sqrt{ax^2 + bx + c} + (mx + t)} = 0$

vereinfacht und sortiert: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(a - m^2)x^2 + (b - 2mt)x + (c - t^2)}{\sqrt{ax^2 + bx + c} + (mx + t)} = 0$

Der Nenner wird ∞ ; der Grenzwert 0 ergibt sich nur dann, wenn der Zähler konstant ist, das heißt wenn seine ersten beiden Summanden gleich 0 sind: $a - m^2 = 0$ und $b - 2mt = 0$, also $m = \pm\sqrt{a}$ und $t = \pm\frac{b}{2\sqrt{a}}$.

Das ergibt für $x \rightarrow \infty$ die Asymptote $y = \sqrt{a} \cdot x + \frac{b}{2\sqrt{a}}$
und für $x \rightarrow -\infty$ die Asymptote $y = -\sqrt{a} \cdot x - \frac{b}{2\sqrt{a}}$.

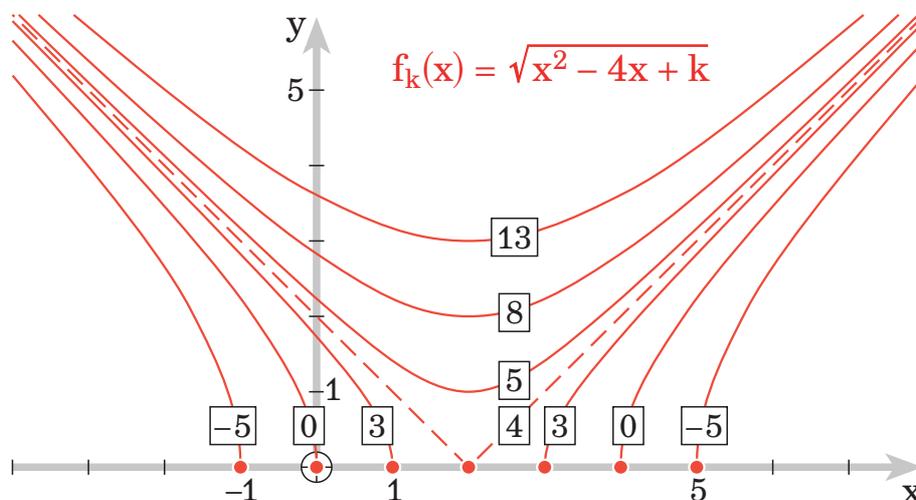
Beispiel: $f_k(x) = \sqrt{x^2 - 4x + k}$

Die Definitionsmenge D liest man ab aus der Vorzeichenübersicht des Radikanden: $x^2 - 4x + k = 0 \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{4 - k}$, $k \leq 4$

$D =]-\infty; 2 - \sqrt{4 - k}] \cup [2 + \sqrt{4 - k}; \infty[$ für $k \leq 4$, $D = \mathbb{R}$ für $k > 4$

Die Asymptoten: $y = x - 2$ für $x \rightarrow \infty$, $y = -x + 2$ für $x \rightarrow -\infty$

sind unabhängig vom Scharparameter k , jede Scharcurve hat diese beiden Asymptoten. Die Scharcurve G_4 liegt sogar auf ihnen, denn $f_4(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{(x - 2)^2} = |x - 2|$.



Im Allgemeinen gilt für große x -Werte: $a_n x^n + \dots + a_0 \approx a_n x^n$

und damit für $a_n > 0$ auch: $\sqrt[n]{a_n x^n + \dots + a_0} \approx \sqrt[n]{a_n} \cdot |x|$

Aufgaben

1 Zeichne die Lösungsmengen der Gleichungen:

a) $x^1 - y^1 = 0$ **b)** $x^2 - y^1 = 0$ **c)** $x^2 - y^2 = 0$ **d)** $x^2 + y^2 = 0$
e) $x^{-1} - y^{-1} = 0$ **f)** $x^{-1} - y^{-2} = 0$ **g)** $x^{-2} - y^{-2} = 0$ **h)** $x^{-2} + y^{-2} = 0$

2 Löse auf nach x :

a) $x^3 + 1 = 0$ **b)** $x^3 + 0,1^{-3} = 0$ **c)** $\sqrt[3]{x} + 1 = 0$
d) $\sqrt[3]{|x|} + 1 = 0$ **e)** $x\sqrt[3]{x^2} + p^2 = 0$ **f)** $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} = 6$

3 Diskutiere (Maximale Definitionsmenge D , Symmetrie, Nullstellen, Verhalten am Rand von D , Monotonie, Ort und Art der Waagrechtspunkte, Krümmungsverhalten, Ort und Art der Flachpunkte, Zeichnung, Wertemenge)

a) $f(x) = x^{2/5}$ **b)** $f(x) = x^{5/2}$ **c)** $f(x) = x^{-2/5}$ **d)** $f(x) = x^{-5/2}$
e) $f(x) = (-x)^{2/5}$ **f)** $f(x) = |x|^{2/5}$ **g)** $f(x) = -(-x)^{-2/5}$

4 Berechne

a) $\int_0^1 x^{2/3} dx$ **b)** $\int_0^1 x^{3/2} dx$ **c)** $\int_1^{64} x^{-3/2} dx$ **d)** $\int_1^{64} x^{-2/3} dx$
e) $\int_a^{a^2} \sqrt{x} dx, a \geq 0$ **f)** $\int_8^{64} \sqrt[3]{|x|} dx$

5 Berechne

a) $\int_1^8 x\sqrt[3]{x} dx$ **b)** $\int_9^{36} \frac{x}{\sqrt{x}} dx$ **c)** $\int_1^8 \frac{1-x^2}{\sqrt[3]{x^2}} dx$

6 $f_a(x) = x^a, a \in \mathbb{Q}^+$ Berechne den Inhalt der Fläche, die zwischen den Scharkurven mit den Parametern a und $1/a$ liegt. Was ergibt sich für $a \rightarrow \infty$?

Wurzelhaltige Funktionen: Diskutiere die Funktionen in den Aufgaben **7** bis **16** nach den Gesichtspunkten von Aufgabe **3**.

7 a) $a(x) = \sqrt{x-1}$ **b)** $b(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{x}$
c) $c(x) = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x}$ **d)** $d(x) = \sqrt{(x-1)x}$

8 a) $a(x) = \frac{x}{x-1}$ **b)** $b(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}$
c) $c(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1}}$ **d)** $d(x) = \sqrt{\frac{x}{|x-1|}}$

•9 a) $a(x) = \sqrt[3]{x^3}$

b) $b(x) = \sqrt[3]{|x|} \cdot \operatorname{sgn} x$

•c) $c(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{(x+1)^2}$

•d) $d(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{(x+1)^2}$

•e) $e(x) = \sqrt[3]{(x-1)^4} + \sqrt[3]{(x+1)^4}$

•f) $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^4} - \sqrt[3]{(x+1)^4}$

•♦10 a) $a(x) = x\sqrt{1-x^2}$

b) $b(x) = \sqrt{x^2(1-x^2)}$

c) $c(x) = x\sqrt{x^2-1}$

d) $d(x) = x\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}$

11 a) $a(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x-1}}$

•b) $b(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}-1}$

•c) $c(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-x}}$

•d) $d(x) = \frac{\sqrt{x^2-8}}{x-4}$

•12 a) $a(x) = x - \sqrt{x^2-1}$

b) $b(x) = x + \sqrt{x^2+1}$

c) $c(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$

d) $d(x) = \sqrt{x^2+x} - x$

Bestimme soweit möglich die Umkehrfunktion.

•♦13 a) $a(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

b) $b(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$

c) $c(x) = \ln(x - \sqrt{x^2-1})$

Bestimme soweit möglich die Umkehrfunktion.

•14 $f_a(x) = x - a\sqrt{x}$

•15 $f_a(x) = \frac{2}{\sqrt{x(2a-x)}}$, $a > 0$ Bearbeite außerdem:

a) Zeige, dass für $0 \leq d < a$ gilt: $f_a(a-d) = f_a(a+d)$

Was bedeutet dies für die Scharkurven ?

b) Stelle fest, ob sich die zu a_1 und a_2 gehörigen Kurven ($a_1 \neq a_2$) schneiden.

c) Weise ohne die 2. Ableitung nach, dass jede Scharkurve genau einen Tiefpunkt hat. Bestimme die Tiefpunkte und ihre Ortlinie.

d) Zeichne die Ortlinie der Tiefpunkte und Scharkurven für $a \in \{1, 2, 4\}$.

•16 $f_a(x) = \sqrt{\frac{3(a-x)}{x}}$, $a > 0$ Bearbeite außerdem:

a) Weise ohne die 2. Ableitung nach, dass jede Scharkurve mindestens einen Wendepunkt hat.

b) Welche Kurventangente schneidet die x-Achse am weitesten rechts ?

c) Bestimme die Schar der Umkehrfunktionen.

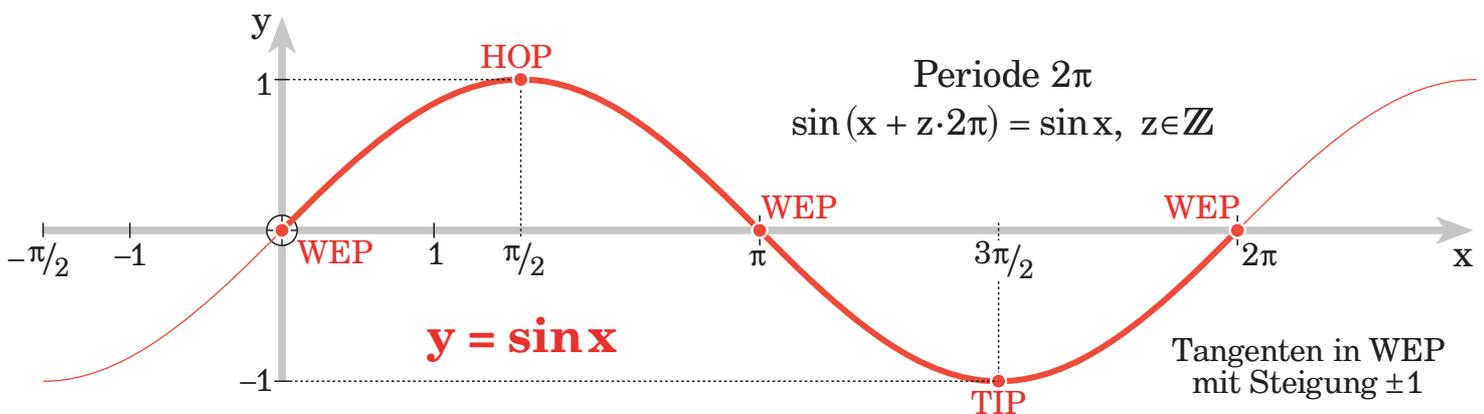
2. Arkusfunktionen

Wie in der Geometrie verwendet man auch in der Analysis für Schnittwinkel das Gradmaß (Taschenrechner DEG). Dagegen gibt man Winkel im Bogenmaß an (Taschenrechner RAD), wenn sie als Variablen im Funktionsterm stehen.

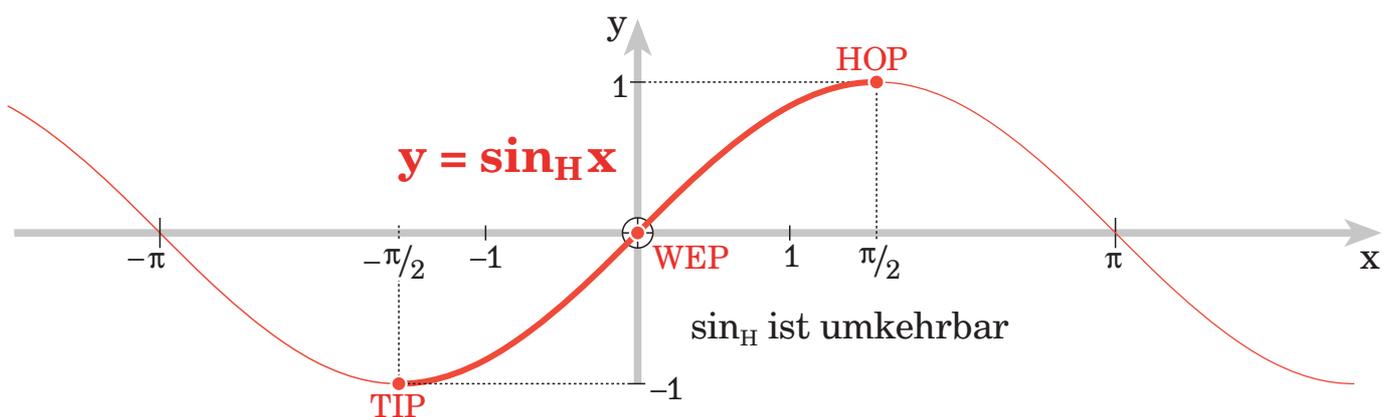
Beachte $\pi = 180^\circ$ also $1 = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57,3^\circ$
 oder $1^\circ = \frac{\pi}{180} \approx 0,017$

Arkussinus

Die Sinusfunktion ist definiert auf \mathbb{R} und dort nicht eineindeutig, also nicht umkehrbar.



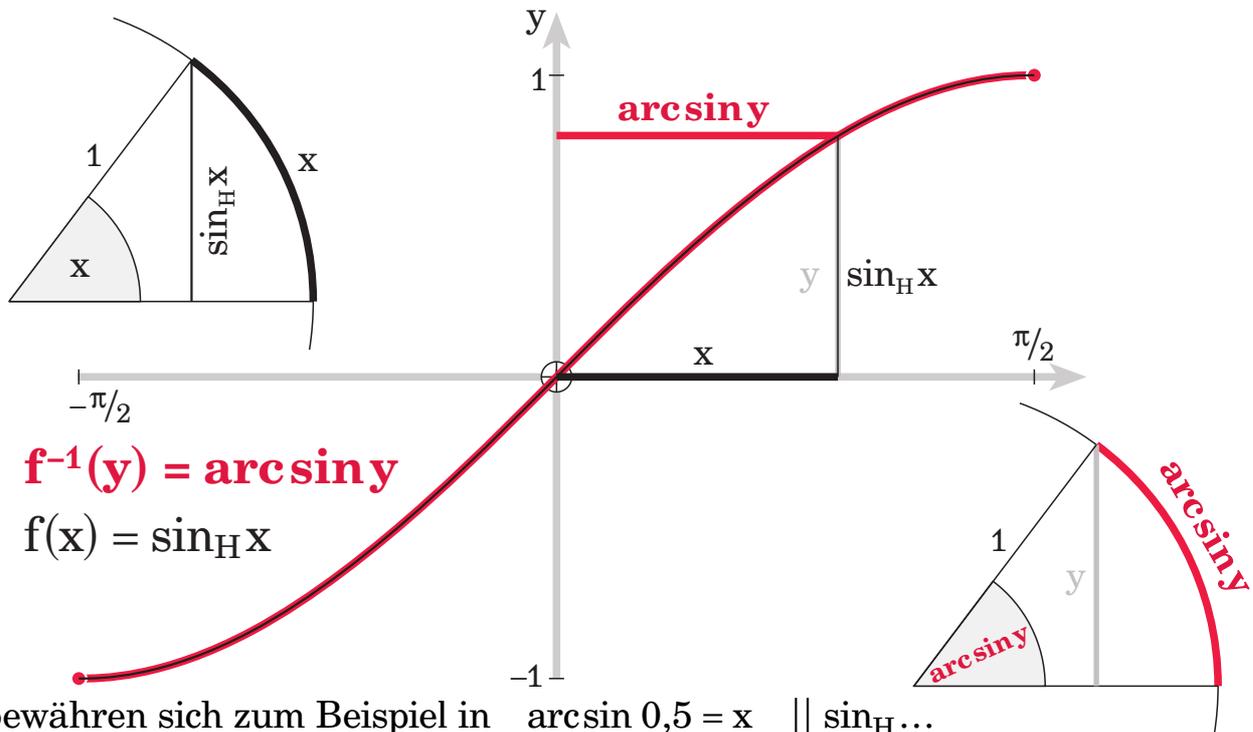
Beschränkt man die Definitionsmenge auf $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, dann ist die Funktion eineindeutig, also umkehrbar. Sie heißt **Hauptwert des Sinus**; wir bezeichnen sie mit \sin_H .



Die Umkehrfunktion von \sin_H heißt **arcsin** (sprich: arkus sinus):

$$y = \sin_H x \Leftrightarrow x = \arcsin y$$

Darin stecken 2 nützliche Identitäten: $y = \sin_H(\arcsin y)$
 $x = \arcsin(\sin_H x)$



Sie bewähren sich zum Beispiel in $\arcsin 0,5 = x \quad || \sin_H \dots$
 $0,5 = \sin_H x \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$
 $\arcsin y = \frac{\pi}{4} \quad || \sin_H \dots \Rightarrow y = \sin_H \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \sqrt{2}$

Eigenschaften von arcsin

$f(x) = \arcsin x, \quad D = [-1; +1], \quad W = [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$
 Der Graph ist die an $y=x$ gespiegelte Kurve von $y = \sin_H x$; er ist symmetrisch zu O:

$\arcsin(-x) = -\arcsin x$

\sin_H ist ableitbar in $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ mit $(\sin_H x)' > 0$, also ist auch \arcsin ableitbar in $]-1; +1[$.

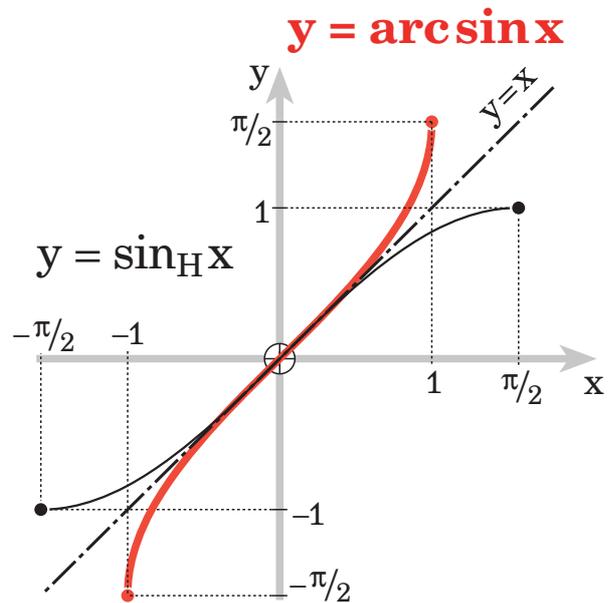
Ableitung: $g(x) = \sin_H(\arcsin x) = x$
 $g'(x) = \cos(\arcsin x) \cdot (\arcsin x)' = 1$
 $(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$

Nebenrechnung:
 Wegen $\cos a = \sqrt{1 - (\sin a)^2}$ für $-\frac{\pi}{2} \leq a \leq \frac{\pi}{2}$
 setzt man $a = \arcsin x$

$$\cos a = \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - (\sin(\arcsin x))^2} = \sqrt{1 - x^2}$$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad -1 < x < 1$

Die arcsin-Kurve steigt echt monoton.



Am Rand der Definitionsmenge ist die Ableitung nicht definiert.

Dort gilt $\lim_{x \rightarrow 1} (\arcsin x)' = \lim_{x \rightarrow -1} (\arcsin x)' = +\infty$.

In den Randpunkten $(1 | \frac{\pi}{2})$ und $(-1 | -\frac{\pi}{2})$ sind die Tangenten senkrecht.

Mit dieser Ableitung haben wir auch ein neues Grundintegral gefunden:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

Zur Vereinfachung schreiben wir künftig \sin statt \sin_H .

Beispiel: Kreisintegral

$$J = \int \sqrt{1-x^2} dx =$$

| | |
|--------------------|--------------------------------|
| $u' = 1$ | $u = x$ |
| $v = \sqrt{1-x^2}$ | $v' = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ |

$$= x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= x\sqrt{1-x^2} - \underbrace{\int \sqrt{1-x^2} dx}_J + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$2J = x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x + C^*$$

$$J = \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x + C$$

Inhalt des halben Einheitskreises

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \left[\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x \right]_{-1}^1 \\ &= 0 + \frac{1}{2}\arcsin 1 - \left(0 + \frac{1}{2}\arcsin(-1) \right) \\ &= \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

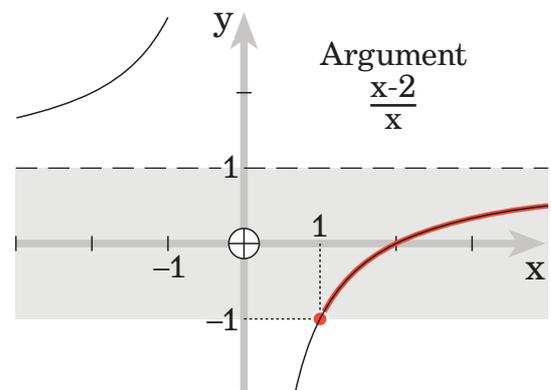
Beispiel: $f(x) = 2\arcsin \frac{x-2}{x}$ (nach dem Abitur in Bayern 1980)

Maximale Definitionsmenge

Das Argument $\frac{x-2}{x}$ darf nur Werte haben, die im Intervall $[-1;1]$ liegen:

$$-1 \leq \frac{x-2}{x} \leq 1.$$

Dem Kurvenverlauf von $\frac{x-2}{x}$ entnimmt man: $D_f = [1; \infty[$.



$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x-2}{x}\right)^2}} \cdot \frac{x-(x-2)}{x^2} = 4 \cdot \frac{1}{x\sqrt{x^2-(x-2)^2}} = \frac{4}{x\sqrt{4x-4}} = \frac{2}{x\sqrt{x-1}}, D_{f'} =]1; \infty[$$

$$f''(x) = \frac{-2\left(\sqrt{x-1} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-1}}\right)}{x^2(x-1)} = \frac{-2\left(x-1 + \frac{1}{2}x\right)}{x^2(x-1)\sqrt{x-1}} = \frac{2-3x}{x^2(x-1)\sqrt{x-1}}, D_{f''} =]1; \infty[$$

Verhalten am Rand von D_f

Wegen $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-2}{x} = 1$ ist $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2 \arcsin 1 = 2 \cdot \frac{1}{2} \pi = \pi$,
 $y = \pi$ ist waagrechte Tangente für $x \rightarrow \infty$.

Randpunkt ist $(1|f(1)) = (1|-\pi)$.

Nullstellen

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x-2}{x} = 0 \Rightarrow x = 2$$

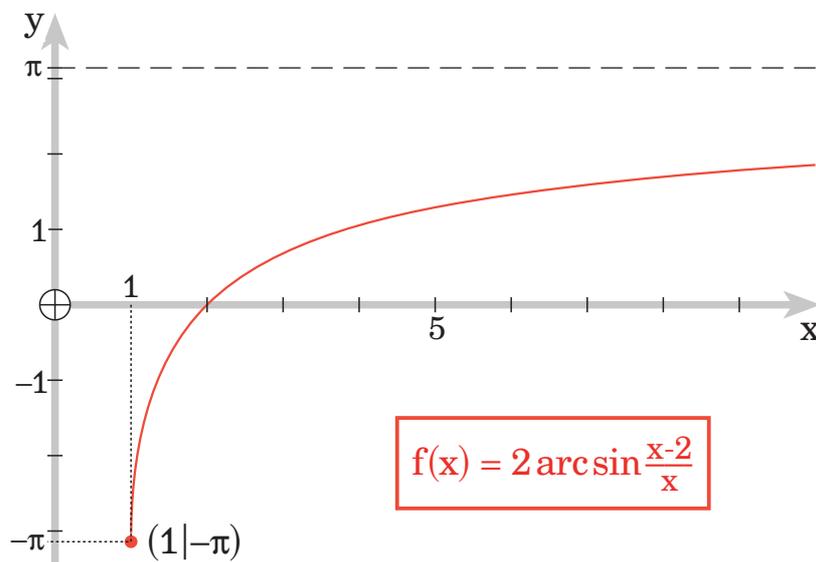
Monotonie

$f'(x) > 0 \Rightarrow G_f$ steigt echt monoton, $(1|-\pi)$ ist also Rand-Tiefpunkt.

$\lim_{x \geq 1} f'(x) = \infty \Rightarrow G_f$ mündet senkrecht in den Rand-Tiefpunkt $(1|-\pi)$.

Krümmungsverhalten

$f''(x) < 0 \Rightarrow G_f$ ist Rechtskurve.



Wertemenge $W_f = [-\pi; \pi[$

Mit f werde nun eine neue Funktion g verglichen:

$$g(x) = 4 \arcsin \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{mit } D_g = D_f$$

Man zeige: $f(x) + g(x) = \pi$ für $x \geq 1$.

Für die Summe $s(x) = f(x) + g(x)$ gilt:

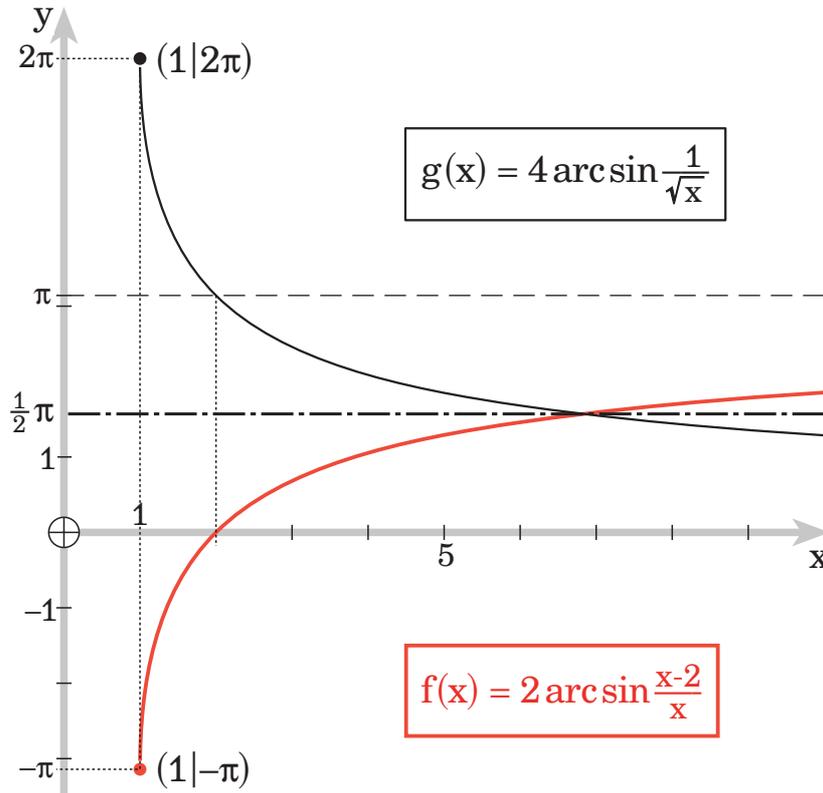
$$s'(x) = f'(x) + g'(x) = \frac{2}{x\sqrt{x-1}} + 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}} \cdot \frac{-1}{2x\sqrt{x}} = \frac{2}{x\sqrt{x-1}} - \frac{2}{x\sqrt{x-1}} = 0$$

Also ist $s(x)$ konstant. Zum Beispiel ist

$$s(x) = s(1) = f(1) + g(1) = -\pi + 4 \arcsin 1 = -\pi + 2\pi = \pi.$$

Damit gilt auch: $f(x) - \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{2}\pi - g(x)$, das heißt

- G_f liegt immer genau so weit über $\frac{1}{2}\pi$ wie G_g unter $\frac{1}{2}\pi$ liegt,
- G_f und G_g sind zueinander symmetrisch bezüglich der Gerade $y = \frac{1}{2}\pi$.



Mithilfe der Umkehrfunktion g^{-1} soll der Inhalt eines Flächenstücks berechnet werden, das begrenzt ist von G_g und den Geraden $x=1$ und $y=\pi$.

Term der Umkehrfunktion von $y = 4 \arcsin \frac{1}{\sqrt{x}}$
 $\sin \frac{1}{4}y = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow x = \left(\frac{1}{\sin \frac{1}{4}y}\right)^2 = g^{-1}(y)$

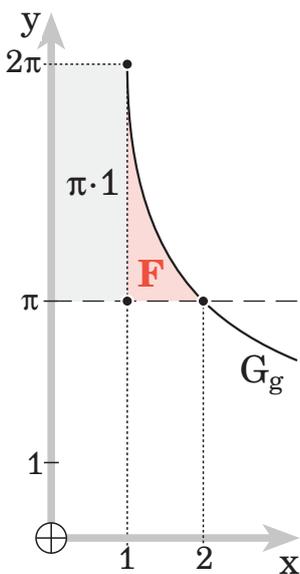
Flächeninhalt $F = \int_{\pi}^{2\pi} \left(\frac{1}{\sin \frac{1}{4}y}\right)^2 dy - \pi \cdot 1$

Nebenrechnung $\int \frac{1}{(\sin \frac{1}{4}y)^2} dy =$

| | | |
|--------------------|----------------------|------------|
| $t = \frac{1}{4}y$ | $dt = \frac{1}{4}dy$ | $dy = 4dt$ |
|--------------------|----------------------|------------|

$= 4 \int \frac{1}{(\sin t)^2} dt$ (Formelsammlung)

$= -4 \cdot \frac{\cos t}{\sin t} + C = -4 \cdot \frac{\cos \frac{1}{4}y}{\sin \frac{1}{4}y} + C$



$F = \int_{\pi}^{2\pi} \left(\frac{1}{\sin \frac{1}{4}y}\right)^2 dy - \pi = \left[-4 \cdot \frac{\cos \frac{1}{4}y}{\sin \frac{1}{4}y}\right]_{\pi}^{2\pi} - \pi$

$= -4 \cdot \frac{\cos \frac{1}{2}\pi}{\sin \frac{1}{2}\pi} - \left(-4 \cdot \frac{\cos \frac{1}{4}\pi}{\sin \frac{1}{4}\pi}\right) - \pi = -4 \cdot 0 + 4 \cdot 1 - \pi = 4 - \pi$

Zum Ergebnis $4 - \pi$ kommt man auch ohne Umkehrfunktion g^{-1} :

$$F = \int_1^2 (4 \arcsin \frac{1}{\sqrt{x}} - \pi) dx$$

Nebenrechnung: $\int \arcsin \frac{1}{\sqrt{x}} dx =$

| | |
|----------------------------------|--------------------------------|
| $u' = 1$ | $u = x$ |
| $v = \arcsin \frac{1}{\sqrt{x}}$ | $v' = \frac{-1}{2x\sqrt{x-1}}$ |

$$= x \cdot \arcsin \frac{1}{\sqrt{x}} + \int \frac{x}{2x\sqrt{x-1}} dx$$

$$= x \cdot \arcsin \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x-1} + C$$

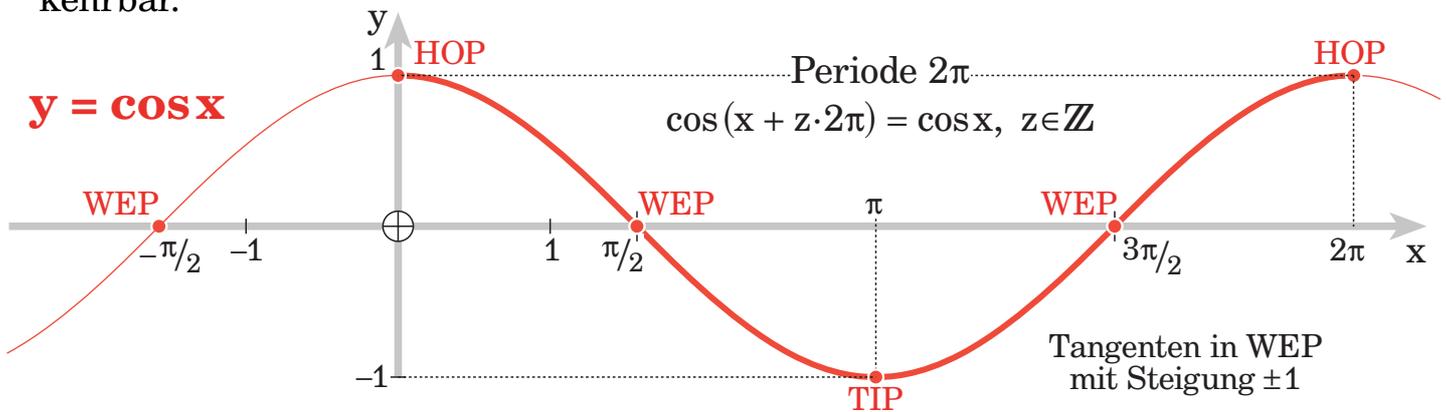
$$F = [4x \cdot \arcsin \frac{1}{\sqrt{x}} + 4\sqrt{x-1} - \pi x]_1^2$$

$$= 8 \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} + 4 \cdot 1 - 2\pi - (4 \arcsin 1 + 4 \cdot 0 - \pi)$$

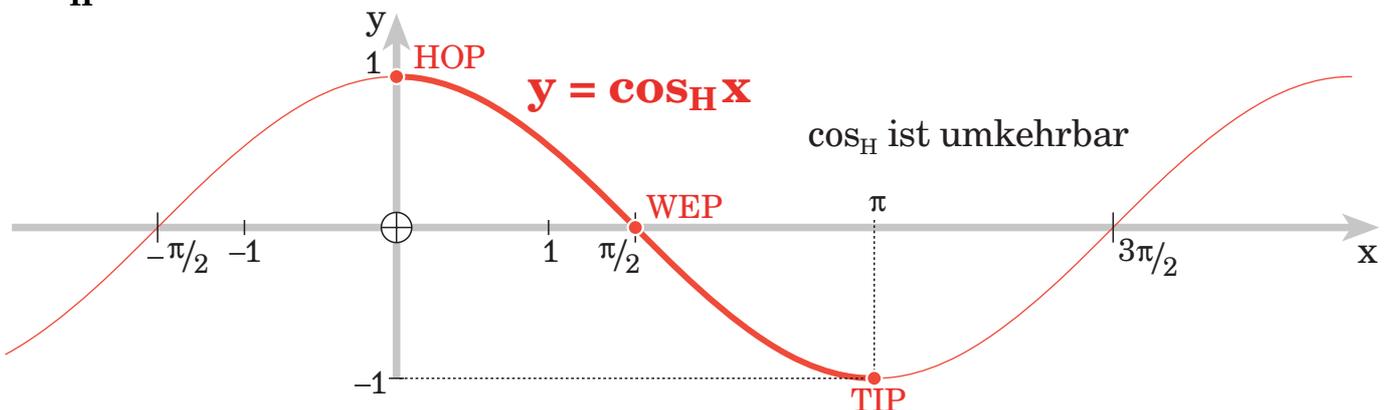
$$= 8 \cdot \frac{1}{4}\pi + 4 - 2\pi - 4 \cdot \frac{1}{2}\pi - 0 + \pi = 4 - \pi$$

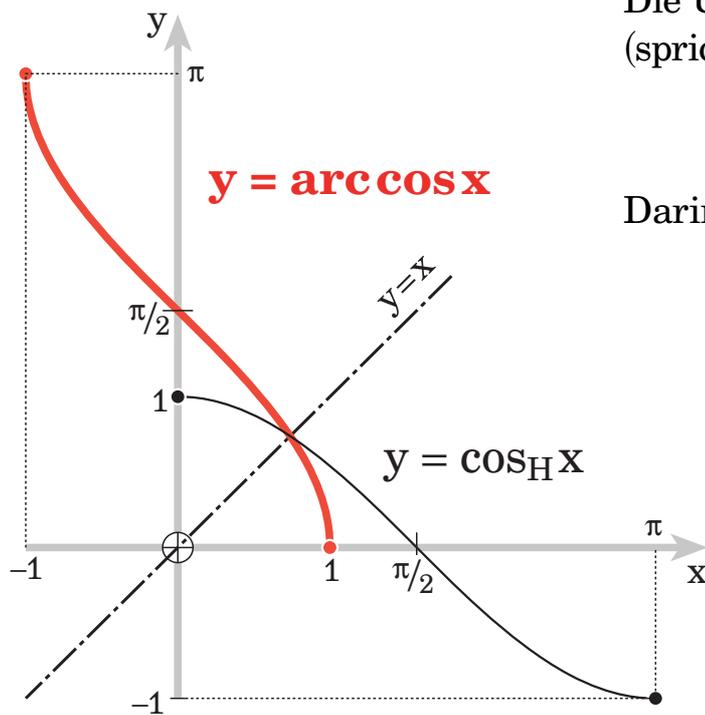
Arkuskosinus

Die Kosinusfunktion ist definiert auf \mathbb{R} und dort nicht eineindeutig, also nicht umkehrbar.



Beschränkt man die Definitionsmenge auf $[0; \pi]$, dann ist die Funktion eineindeutig, also umkehrbar. Sie heißt **Hauptwert des Kosinus**; wir bezeichnen sie mit **cos_H**.





Die Umkehrfunktion von \cos_H heißt **arccos** (sprich: arkus kosinus):

$$y = \cos_H x \Leftrightarrow x = \arccos y$$

Darin stecken 2 nützliche Identitäten:

$$y = \cos_H(\arccos y)$$

$$x = \arccos(\cos_H x)$$

Sie bewähren sich zum Beispiel in:

$$\arccos 0,5 = x \quad || \cos_H \dots$$

$$0,5 = \cos_H x \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

$$\arccos y = \frac{\pi}{4} \quad || \cos_H \dots$$

$$y = \cos_H \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \sqrt{2}$$

Eigenschaften von arccos

$$f(x) = \arccos x, \quad D = [-1; +1], \quad W = [0; \pi]$$

Der Graph ist die an $y=x$ gespiegelte Kurve von $y = \cos_H x$;

er ist symmetrisch zu $(0 | \frac{1}{2} \pi)$:

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$$

\cos_H ist ableitbar in $]0; \pi[$ mit $(\cos_H x)' < 0$, also ist auch arccos ableitbar in $] -1; +1[$.

$$\text{Ableitung: } g(x) = \cos_H(\arccos x) = x$$

$$g'(x) = -\sin(\arccos x) \cdot (\arccos x)' = 1$$

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sin(\arccos x)}$$

Nebenrechnung:

$$\text{Wegen } \sin a = \sqrt{1 - (\cos a)^2} \text{ für } 0 \leq a \leq \pi$$

setzt man $a = \arccos x$

$$\sin a = \sin(\arccos x) = \sqrt{1 - (\cos(\arccos x))^2} = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\boxed{(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1} \quad \text{Die arccos-Kurve fällt echt monoton.}$$

Am Rand der Definitionsmenge ist die Ableitung nicht definiert.

$$\text{Dort gilt } \lim_{x \nearrow 1} (\arccos x)' = \lim_{x \nearrow 1} (\arccos x)' = -\infty.$$

In den Randpunkten $(-1 | \pi)$ und $(1 | 0)$ sind die Tangenten senkrecht.

$$\text{Mit dieser Ableitung gilt } \int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x + C$$

$$\text{und damit auch } \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\arccos x + C_1 = \arcsin x + C_2$$

Also unterscheiden sich \arccos und \arcsin nur in einer Konstante K

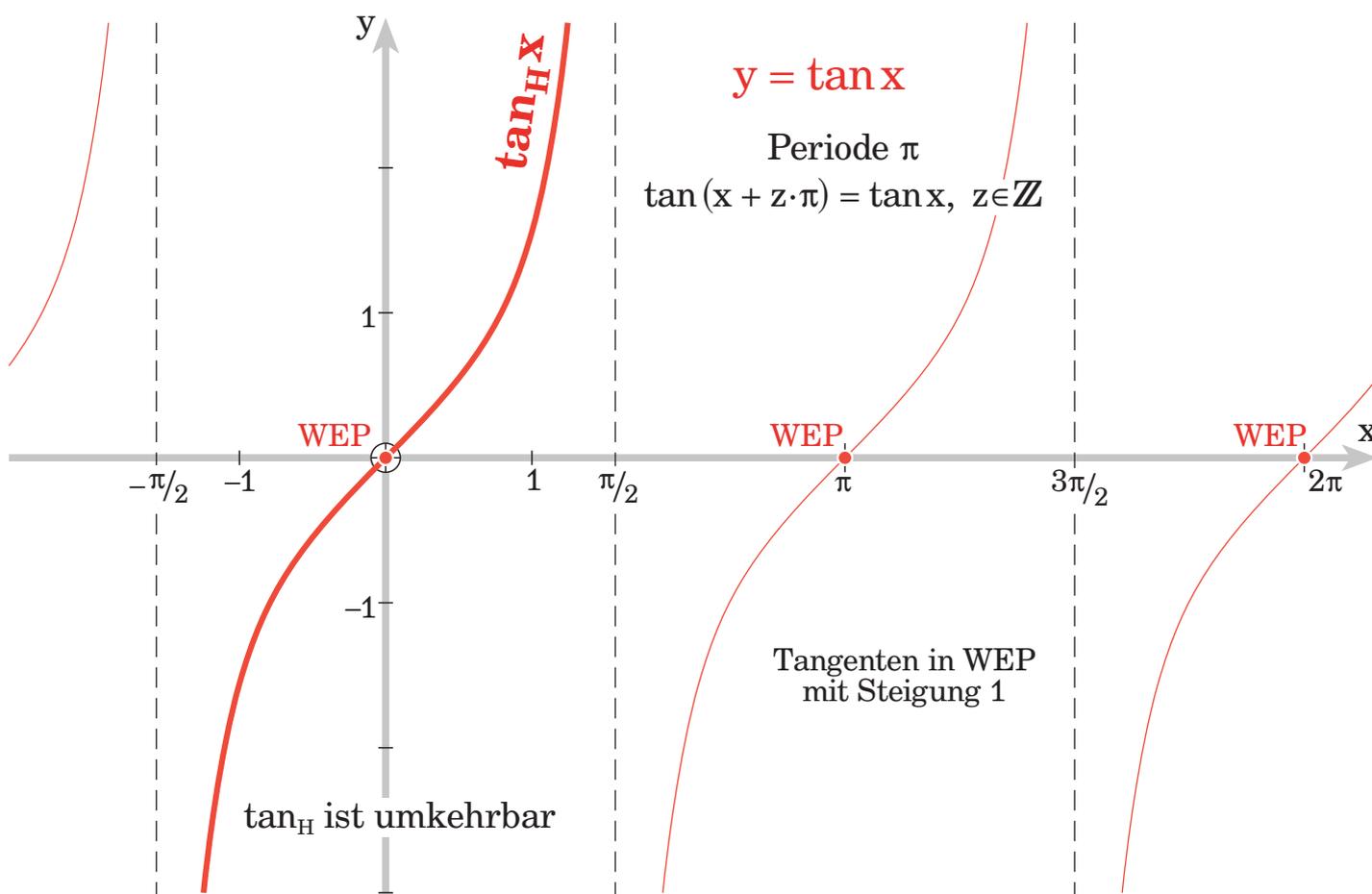
$$\arccos x = K - \arcsin x.$$

Für $x=0$ folgt $\frac{\pi}{2} = K - 0 \Rightarrow K = \frac{\pi}{2}$

$$\boxed{\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x}$$

Arkustangens

Die Tangensfunktion ist definiert auf \mathbb{R} bis auf die Stellen $\frac{\pi}{2}(2z+1)$, $z \in \mathbb{Z}$, und dort nicht eineindeutig, also nicht umkehrbar.



Beschränkt man die Definitionsmenge auf $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, dann ist die Funktion eindeutig, also umkehrbar. Sie heißt **Hauptwert des Tangens**; wir bezeichnen sie mit \tan_{H} .

Die Umkehrfunktion von \tan_{H} heißt **arctan** (sprich: arkus tangens):

$$\boxed{y = \tan_{\text{H}} x \Leftrightarrow x = \arctan y}$$

Darin stecken 2 nützliche Identitäten: $y = \tan_{\text{H}}(\arctan y)$
 $x = \arctan(\tan_{\text{H}} x)$

Sie bewähren sich zum Beispiel in $\arctan \sqrt{3} = x \mid \tan_{\text{H}} \dots$

$$\sqrt{3} = \tan_{\text{H}} x \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

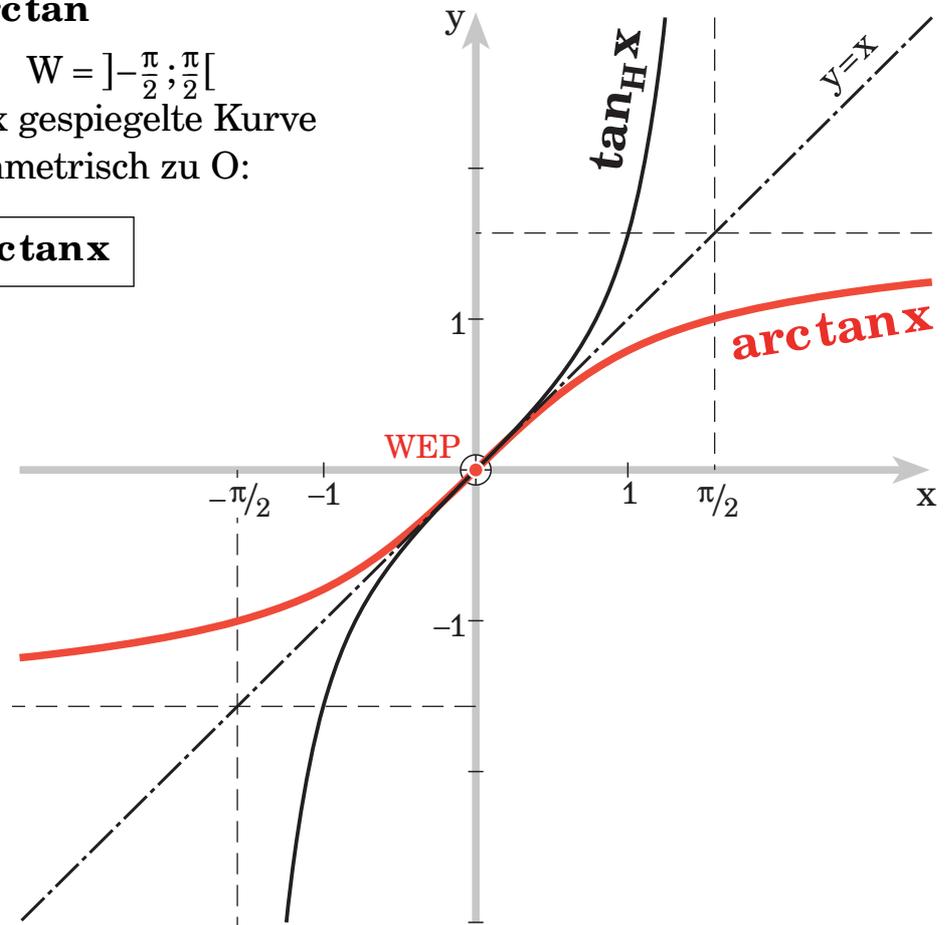
$$\arctan y = \frac{\pi}{6} \mid \tan_{\text{H}} \dots \Rightarrow y = \tan_{\text{H}} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{3} \sqrt{3}$$

Eigenschaften von arctan

$$f(x) = \arctan x, \quad D = \mathbb{R}, \quad W =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$$

Der Graph ist die an $y=x$ gespiegelte Kurve von $y = \tan_{\text{H}} x$; er ist symmetrisch zu O:

$$\boxed{\arctan(-x) = -\arctan x}$$



Grenzwerte: Wegen $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \tan x = +\infty$ gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x = \frac{1}{2} \pi$

Wegen Symmetrie zu $(0|0)$ gilt $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{1}{2} \pi$

\tan_{H} ist ableitbar in $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ mit $(\tan_{\text{H}} x)' > 0$, also ist auch \arctan ableitbar in $]-1; 1[$.

Ableitung: $g(x) = \tan_{\text{H}}(\arctan x) = x$

$$g'(x) = [1 + (\tan_{\text{H}}(\arctan x))^2] \cdot (\arctan x)' = 1$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1 + (\tan_{\text{H}}(\arctan x))^2} \quad \text{und wegen } x = \tan_{\text{H}}(\arctan x)$$

$$\boxed{(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}} \quad \text{Die arctan-Kurve steigt echt monoton.}$$

Mit dieser Ableitung haben wir auch ein neues Grundintegral gefunden:

$$\boxed{\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C}$$

Zur Vereinfachung schreiben wir künftig \cos statt \cos_{H} und \tan statt \tan_{H} .

Zum Nachdenken

① Integration mit Partialbruch-Zerlegung

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

Man kann zeigen, dass sich mit diesen beiden Integralen jede rationale Funktion integrieren lässt. Der große Mathematiker Carl Friedrich GAUß (1777 bis 1855) hat bewiesen:

Jedes Polynom ist faktorisiertbar mit linearen Faktoren und mit quadratischen Faktoren, deren Diskriminante negativ ist.

Beispiel: $4x^3 - 4x^2 + x - 1 = (x-1)(4x^2 + 1)$

Beim Integrieren einer rationalen Funktion geht man so vor:

Ist der Zählergrad größer oder gleich dem Nennergrad, dann zerlegt man den Bruch mit der Polynomdivision in ein Polynom und einen Restbruch, dessen Zählergrad kleiner ist als der Nennergrad.

$$f(x) = \frac{4x^4 + 9x^2 - 3}{4x^3 - 4x^2 + x - 1} = x + 1 + \frac{12x^2 - 2}{4x^3 - 4x^2 + x - 1}$$

$$\int f(x) dx = \int (x+1) dx + \int \frac{12x^2 - 2}{4x^3 - 4x^2 + x - 1} dx$$

Im Bruch $\frac{12x^2 - 2}{4x^3 - 4x^2 + x - 1}$ faktorisiert man den Nenner: $\frac{12x^2 - 2}{4x^3 - 4x^2 + x - 1} = \frac{12x^2 - 2}{(x-1)(4x^2 + 1)}$

Man zerlegt diesen Bruch in eine Summe von Teilbrüchen (Partialbruch-Zerlegung), deren Nenner die Faktoren des ursprünglichen Nenners sind:

$$\frac{12x^2 - 2}{(x-1)(4x^2 + 1)} = \frac{2}{x-1} + \frac{4(x+1)}{4x^2 + 1}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{12x^2 - 2}{(x-1)(4x^2 + 1)} dx &= \int \frac{2}{x-1} dx + \int \frac{4(x+1)}{4x^2 + 1} dx \\ &= 2 \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{4x}{4x^2 + 1} dx + \int \frac{4}{4x^2 + 1} dx \end{aligned}$$

$$t = 2x \quad dt = 2dx$$

$$= 2 \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln(4x^2 + 1) + \int \frac{2}{t^2 + 1} dt$$

$$= 2 \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln(4x^2 + 1) + 2 \arctan t + C$$

$$\int \frac{12x^2 - 2}{(x-1)(4x^2 + 1)} dx = 2 \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln(4x^2 + 1) + 2 \arctan 2x + C$$

$$\int f(x) dx = \frac{1}{2} x^2 + x + 2 \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln(4x^2 + 1) + 2 \arctan 2x + C$$

Im Allgemeinen ergibt sich bei solchen Integralen eine Summe aus einem Polynom,

Logarithmstermen mit linearen und quadratischen Argumenten, arctan-Termen mit linearen Argumenten.

② Algebraische Relationen und implizite Differenziation

Bis jetzt kennen wir Polynome mit nur einer Variable, zum Beispiel $p(x) = x^3 - 3x + 2$.

Es gibt aber auch Polynome mit mehr Variablen; wir beschränken uns auf solche mit 2 Variablen, zum Beispiel $p(x,y) = x^3 - 3x + 2 - y^2$.

Setzt man so ein Polynom gleich 0, dann ergibt sich eine Gleichung mit 2 Unbekannten x und y : $x^3 - 3x + 2 - y^2 = 0$. Ihre Lösungen $(x|y)$ lassen sich veranschaulichen als Punkte im Koordinatensystem. Man nennt die Gleichung $p(x,y) = 0$ eine **Relation** von x und y ; die veranschaulichte Lösungsmenge heißt Graph der Relation.

Manchmal lässt sich die Relation auflösen nach y , im Beispiel:

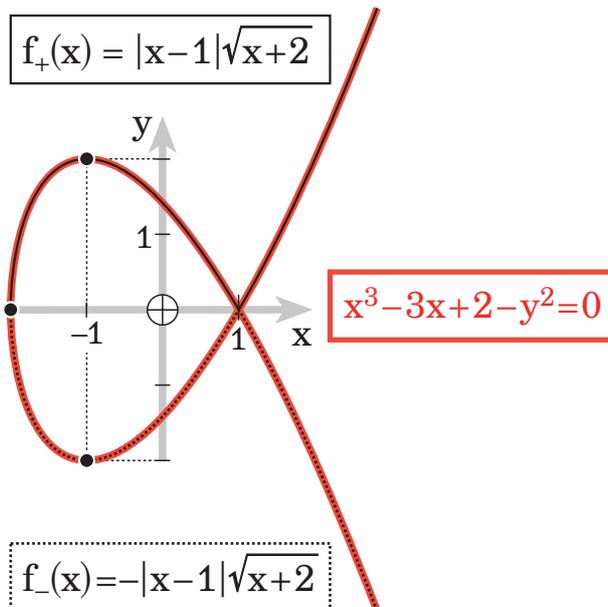
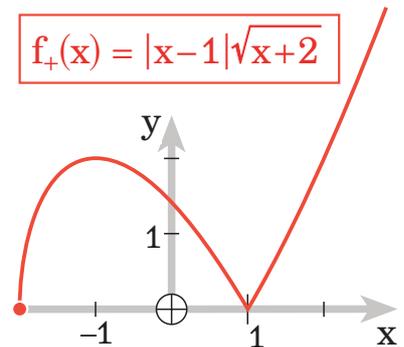
$$|y| = \sqrt{x^3 - 3x + 2} = \sqrt{(x-1)^2(x+2)} = |x-1|\sqrt{x+2}.$$

Darin sind enthalten die beiden Funktionsgleichungen

$$y = f_+(x) = +|x-1|\sqrt{x+2} \text{ und}$$

$$y = f_-(x) = -|x-1|\sqrt{x+2}.$$

Die beiden zugehörigen Graphen sind symmetrisch zur x -Achse. Die Kurvendiskussion von f_+ liefert den Teilgraphen G_+ . Der Graph G der Relation entsteht dann durch achsensymmetrische Ergänzung.



Manchmal ist es nicht möglich, die Relation aufzulösen nach y .

Man kann sie trotzdem differenzieren, wenn man sich vorstellt,

dass y der Term $f(x)$ einer Funktion f ist, die in der Relation versteckt ist:

$$\text{Relation} \quad x^3 - 3x + 2 - y^2 = 0$$

$$\text{Ableitung nach } x \text{ mit Kettenregel} \quad 3x^2 - 3 - 2y \cdot y' = 0.$$

Diese Art des Ableitens heißt **implizites Differenzieren**.

(Siehe Kapitel V »Zum Nachdenken«)

Die Waagrechtspunkte findet man durch Auflösen nach y' : $y' = \frac{3x^2 - 3}{2y}$, $y \neq 0$ und anschließendes Nullsetzen: $y' = 0$, also $3(x^2 - 1) = 0$.

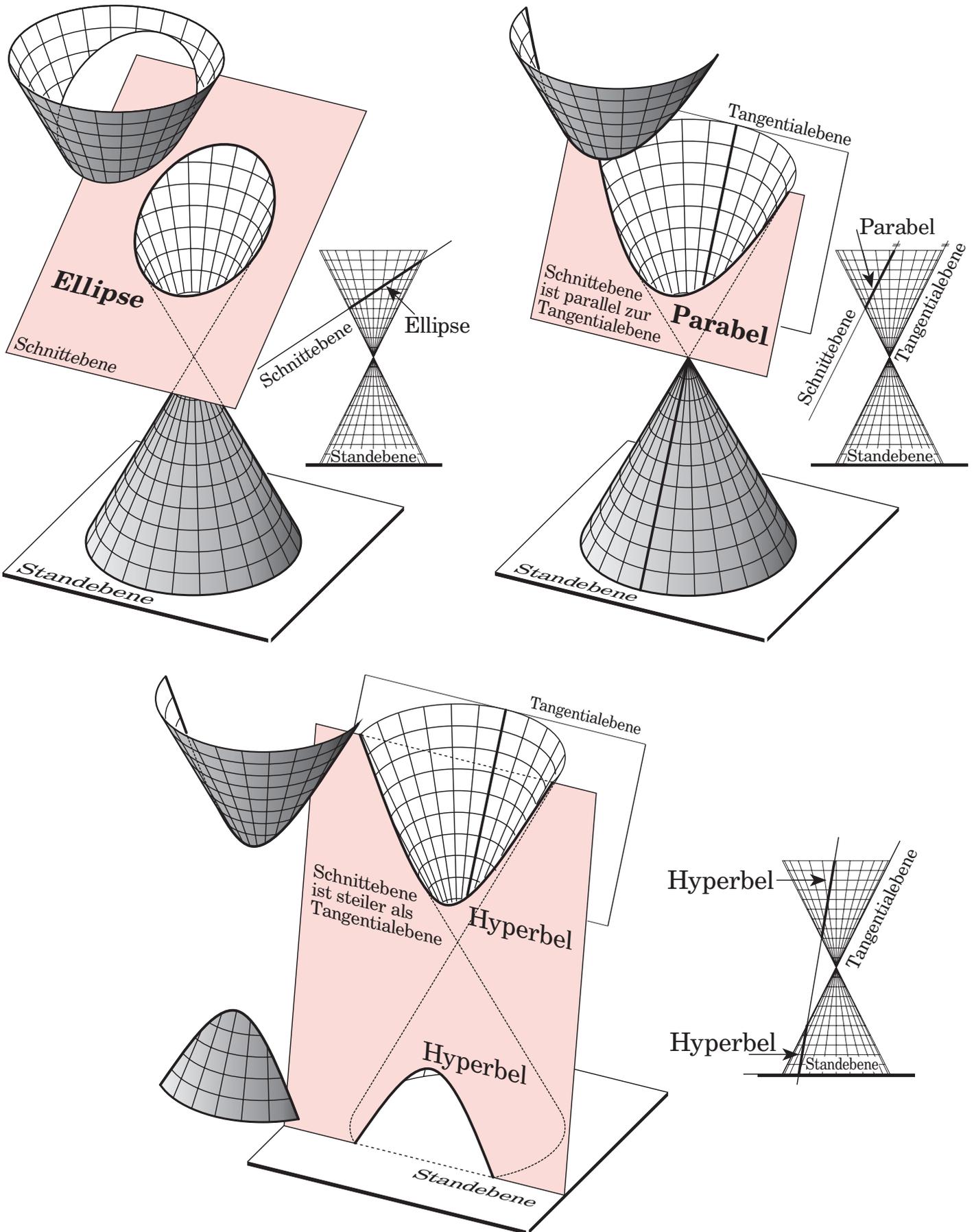
Es ergibt sich $x = 1$ oder $x = -1$ mit den y -Werten $y = 0$ oder $y = \pm 2$.

Im Punkt $(1|0)$ ist die Ableitung nicht definiert, weil der Nenner $2y$ gleich 0 ist.

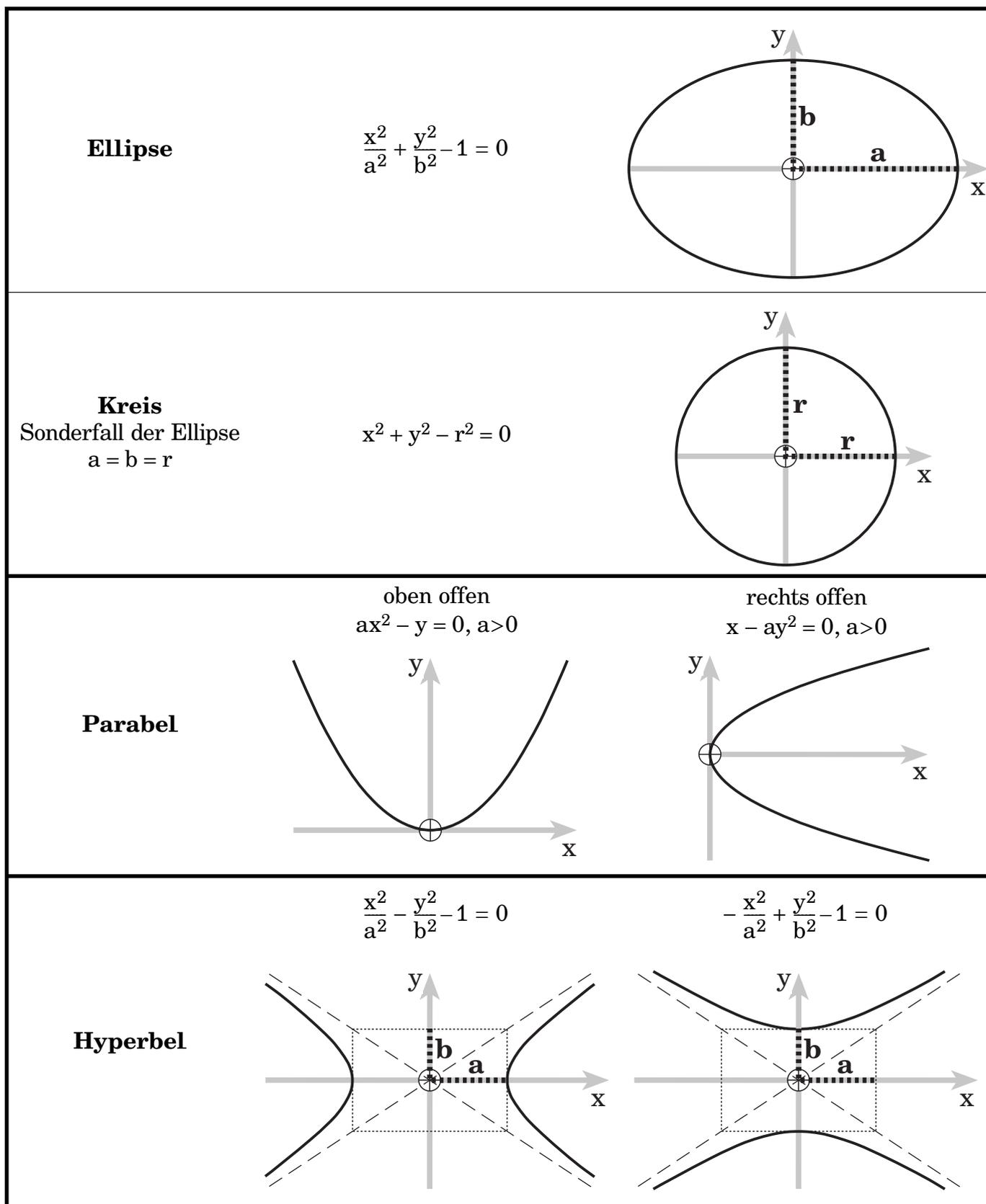
Die beiden Punkte $(-1|\pm 2)$ sind die Waagrechtspunkte der Relation.

③ Kegelschnitte

sind Graphen spezieller Relationen. In Natur, Technik und Architektur spielen sie eine große Rolle. Geometrisch entstehen sie beim Schnitt einer Ebene und eines Kreiskegels.



Schon vor gut 2000 Jahren hat der griechische Mathematiker APPOLONIOS (262 bis 190) gezeigt, dass sich im Wesentlichen 3 Kurventypen ergeben: Ellipse, Parabel und Hyperbel.



③ Reihenentwicklungen

Die Werte von Exponential- und Logarithmusfunktion lassen sich mit Reihen berechnen. Ebenso auch die der Trigonometrischen Funktionen und ihrer Umkehrfunktionen. Am einfachsten geht das beim Arkustangens. Die Formel für die geometrische Reihe liefert:

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots - \dots \quad \text{für } |t| < 1$$

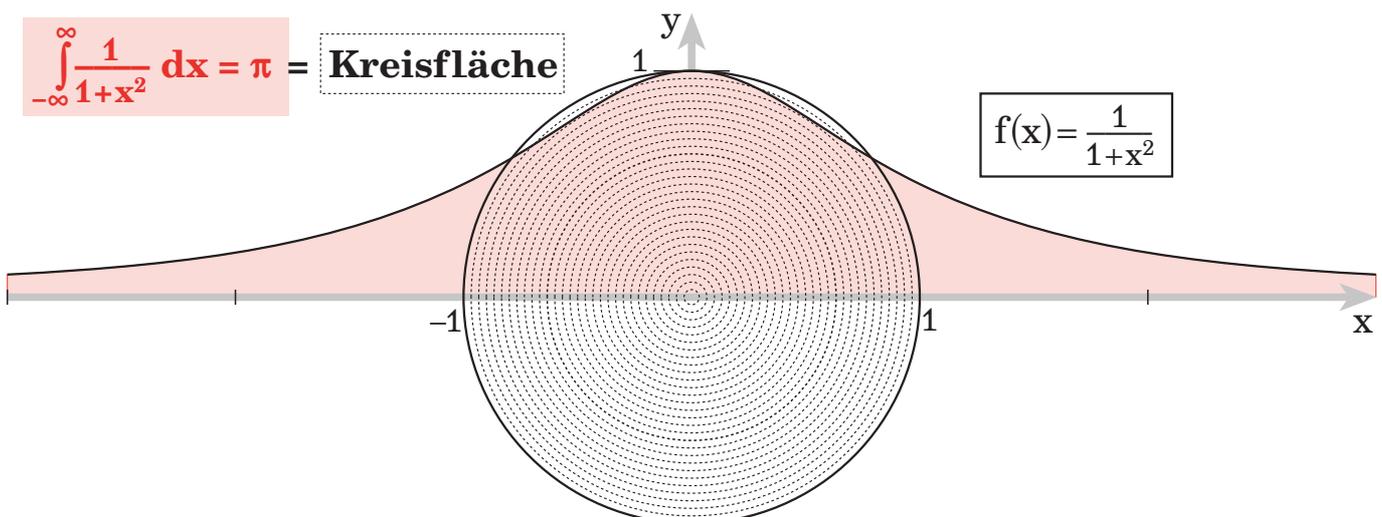
Integration: $\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^x (1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots - \dots) dt$

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \dots - \dots \quad \text{für } |x| \leq 1.$$

Eigentlich müssten jetzt noch Konvergenzbetrachtungen folgen; sie gehören jedoch in die höhere Mathematik.

J.GREGORY (1638 bis 1675) und G.WLEIBNIZ (1646 bis 1716) haben diese Reihe verwendet, um π durch eine unendliche Reihe auszudrücken: $\pi = 4 \cdot \arctan 1 = 4(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots - \dots)$. Erstaunlicherweise kannte diese Beziehung schon der indische Mathematiker MADAHVA (1340 bis 1425) !

Deutet man das uneigentliche Integral $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x = \frac{1}{2} \pi$ als Flächeninhalt, so ist π Inhalt der Rosafläche im Bild.



Beim Sinus ist es komplizierter. Man verfährt zum Beispiel so:

$$\begin{aligned} \sin x &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n + \dots + a_{n+2} x^{n+2} + \dots \\ (\sin x)'' &= 2 \cdot 1 \cdot a_2 + 3 \cdot 2 \cdot a_3 x + \dots + n(n-1) a_n x^{n-2} + \dots + (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \dots \end{aligned}$$

Andererseits gilt wegen $(\sin x)'' = -\sin x$:

$$(\sin x)'' = -a_0 - a_1 x - a_2 x^2 - a_3 x^3 - \dots - a_n x^n - \dots$$

Vergleicht man die Koeffizienten der Gleichungen für $(\sin x)''$, so gilt:

$$-a_n = (n+2)(n+1) a_{n+2} \quad \Rightarrow \quad a_{n+2} = \frac{-1}{(n+1)(n+2)} a_n$$

Wegen $\sin 0 = 0$ ist $a_0 = a_2 = a_4 = \dots a_{2n} = 0$.

Wegen $\cos x = (\sin x)' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots$ und $\cos 0 = 1$ gilt:

$$a_1 = 1, \quad a_3 = \frac{-1}{2 \cdot 3} a_1 = \frac{-1}{3!}, \quad a_5 = \frac{-1}{4 \cdot 5} a_3 = \frac{1}{5!} \quad \text{usw} \quad a_{n+2} = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}$$

endlich: $\sin x = \frac{1}{1!} x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 - \frac{1}{7!} x^7 + \dots - \dots \quad \text{für } |x| < \infty$

Aufgaben

- ◇1 Berechne
- | | | |
|------------------|------------------------------------|------------------------------|
| a) $\arcsin 1$ | b) $\arcsin \frac{1}{2}$ | c) $\arcsin \frac{\pi}{6}$ |
| d) $\arcsin(-1)$ | e) $\arcsin(-\frac{1}{2}\sqrt{3})$ | f) $\arcsin(-\frac{\pi}{3})$ |
- 2 Berechne
- | | | |
|---------------------|-----------------------|--------------------|
| a) $\arcsin 0,9093$ | b) $\arcsin(-0,9975)$ | c) $\arcsin 0,565$ |
| d) $\arcsin 0,1$ | e) $\arcsin 0,01$ | |
- ◇3 Für welche x-Werte gilt:
- | | | |
|-------------------------------------|-----------------------------------|--------------------------|
| a) $\arcsin x = \frac{\pi}{3}$ | b) $\arcsin x = \frac{1}{2}$ | c) $\arcsin x = -0,1109$ |
| d) $\arcsin x = \sin \frac{\pi}{4}$ | e) $\arcsin \frac{1}{x} = 0,2014$ | f) $\arcsin(x^2) = 0,04$ |
- 4 Für welche x-Werte gilt:
- | | | |
|---------------------------------|-------------------------------------|---|
| a) $\arcsin x < \frac{\pi}{4}$ | b) $ \arcsin x \geq \frac{\pi}{4}$ | c) $\arcsin x \leq 0,2014$ |
| d) $\arcsin x \leq \arcsin x $ | e) $\arcsin x > \sin x$ | f) $-\frac{\pi}{6} < \arcsin x < \frac{\pi}{3}$ |
- ◇5 Diskutiere die Funktion in D_{\max} :
- | | | |
|------------------------|---------------------------|---------------------------------------|
| a) $a(x) = \arcsin 2x$ | b) $b(x) = x - \arcsin x$ | c) $c(x) = \arcsin(\frac{1}{2}x - 1)$ |
|------------------------|---------------------------|---------------------------------------|
- 6 Diskutiere die Funktion in D_{\max} :
- | | |
|----------------------------------|---------------------------------------|
| a) $a(x) = \arcsin \sqrt{1-x^2}$ | b) $b(x) = x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x$ |
|----------------------------------|---------------------------------------|
- 7 Diskutiere die Funktion in D_{\max} . Untersuche f auf Differenzierbarkeit und berechne gegebenenfalls die Knickwinkel.
- | | |
|-----------------------------|---|
| a) $a(x) = \arcsin(\sin x)$ | b) $b(x) = \arcsin(\cos x)$ |
| c) $c(x) = \arcsin(\tan x)$ | d) $d(x) = \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x}$ |
- ◇8 Berechne
- | | | |
|------------------|------------------------------------|------------------------------|
| a) $\arccos 1$ | b) $\arccos \frac{1}{2}$ | c) $\arccos \frac{\pi}{6}$ |
| d) $\arccos(-1)$ | e) $\arccos(-\frac{1}{2}\sqrt{3})$ | f) $\arccos(-\frac{\pi}{3})$ |
- ◇9 Berechne
- | | | |
|-----------------|-----------------------|--------------------|
| a) $\arctan 1$ | b) $\arctan \sqrt{3}$ | c) $\arctan(-\pi)$ |
| d) $\arctan 10$ | e) $\arctan(-4711)$ | f) $\arctan 0,789$ |
- ◇10 Für welche x-Werte gilt:
- | | | |
|--------------------------------|--------------------------------|-----------------------------------|
| a) $\arccos x = \frac{\pi}{3}$ | b) $\arccos x = \frac{1}{2}$ | c) $\arccos \frac{1}{x} = 1,0472$ |
| d) $\arccos(x^2) = 1,4595$ | e) $\arctan x = \frac{\pi}{4}$ | f) $\arctan \frac{1}{x} = -1$ |

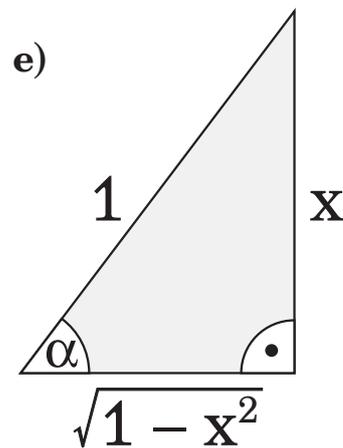
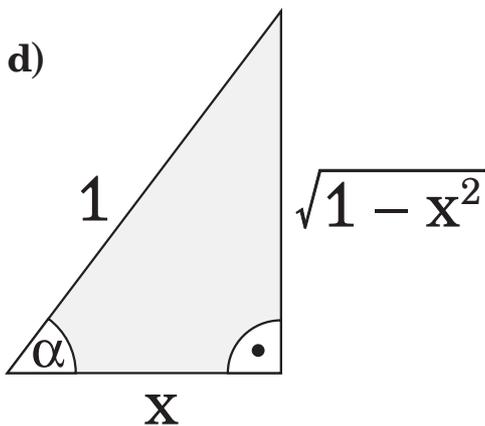
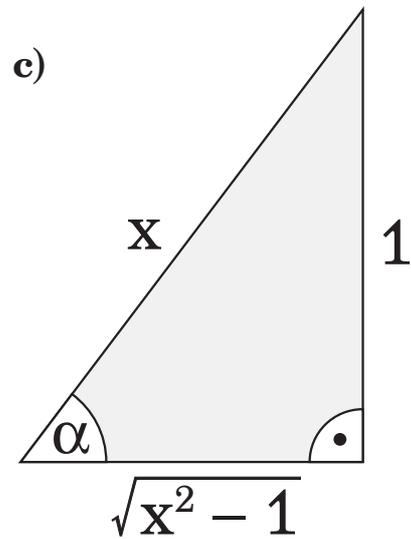
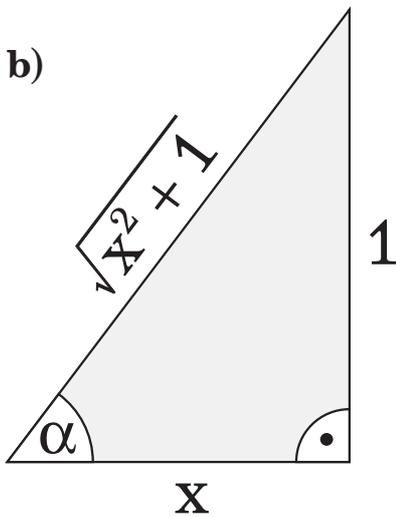
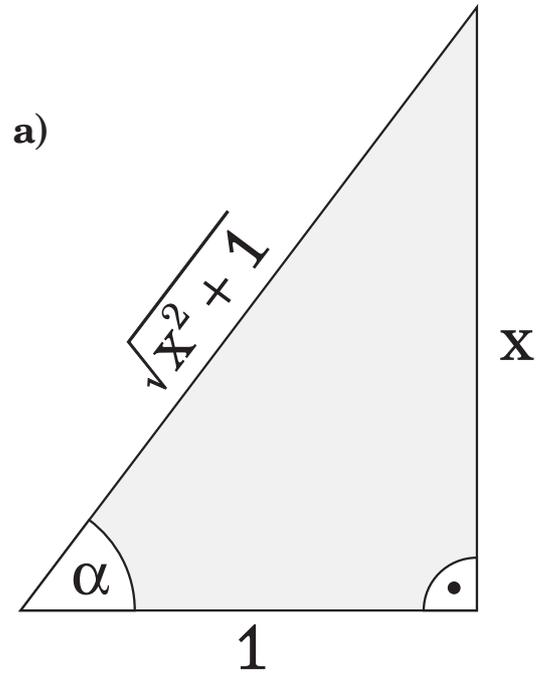
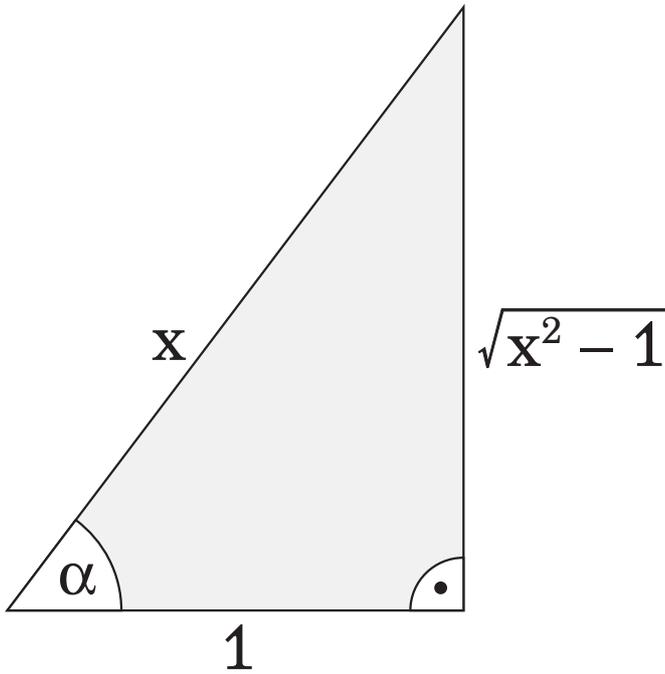
11 Seltsame Verwandtschaften

Bilder zeigen Zusammenhänge zwischen den Arkusfunktionen.

Beispiel:

$$\alpha = \arccos \frac{1}{x} = \arcsin \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \arctan \sqrt{x^2-1}$$

Bearbeite ebenso:



- 12 Zeige, dass gilt: a) $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$, $x \in [-1;1]$
 b) $\arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \arctan x$, $x \in \mathbb{R}^+$
 c) $\arctan \frac{1}{x} + \arctan x = ?$, $x \in \mathbb{R}^-$

•13 Für welche x-Werte gilt:

- a) $\arccos x = \arcsin \sqrt{1-x^2}$ b) $\operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - \arctan x$
 c) $\operatorname{arccot} x = \arctan \frac{1}{x}$ d) $\arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
 e) $\arcsin x = \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

•14 Diskutiere:

- a) $a(x) = x - \arctan x$ b) $b(x) = \arctan(x+1) - \arctan(x-1)$
 c) $c(x) = \arctan 2x - \arctan \frac{1}{2}x$ d) $d(x) = 4 \arctan \frac{1}{4}x - \arctan x$
 e) $e(x) = \arctan x^2$ f) $f(x) = \arctan \frac{1}{x}$
 g) $f(x) = \arctan \frac{1}{x^2}$

- 15 Diskutiere: a) $a(x) = \arctan(\tan x)$ b) $b(x) = \arctan(\tan x)^2$
 c) $c(x) = \arctan(5 \tan x)$ d) $d(x) = \arctan(\frac{1}{5} \tan x)$

◊16 Berechne: a) $\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ b) $\int_{1/2}^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2-2x^2}} dx$ c) $\int_0^{\sin 1} \frac{2-\sqrt{1-x^2}^3}{\sqrt{1-x^2}} dx$

◊17 Berechne: a) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ b) $\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} dx$ c) $\int_{\tan 1}^0 \frac{2}{3+3x^2} dx$

- 18 Berechne: a) $\int_1^2 \frac{1}{x^4+x^2} dx$ (Tipp: Zerlege den Integranden in $\frac{A}{x^2} + \frac{B}{x^2+1}$)
 b) $\int_{-1}^1 \frac{x^4-x^3+3x^2-x}{x^2+1} dx$ (Tipp: Polynomdivision)

- 19 Berechne: a) $\int_1^0 \arcsin x dx$ b) $\int_{-1}^1 \arccos x dx$ c) $\int_0^{\sqrt{3}} \arctan x dx$

20 Entscheide, ob das Integral konvergiert, und berechne es gegebenenfalls:

a) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$ b) $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx$ c) $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2} dx$

•21 Berechne: a) $\int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^4} dx$ b) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx$

•22 Bestimme die Menge der Stammfunktionen von f . ($D_f = D_{f_{\max}}$)

a) $f(x) = \frac{1}{1+2x^2}$ b) $f(x) = \frac{-2}{2+3x^2}$ c) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{1-3x^2}}$

◇23 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

- a) Diskutiere f und zeichne G_f .
 b) Berechne den Inhalt der Fläche zwischen G_f und der Gerade $y = \frac{2}{3}\sqrt{3}$
 c) Berechne den Inhalt der Fläche, die begrenzt ist von G_f , der x -Achse und den beiden Asymptoten.

◇24 $f(x) = \frac{12}{3+x^2}$

- a) Diskutiere f und zeichne G_f .
 b) Berechne den Inhalt der Fläche zwischen G_f und der Gerade durch die beiden Wendepunkte.

•25 $f(x) = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{2x}{1+x^2}$

- a) Bestimme die maximale Definitionsmenge D_f .
 b) Bestimme $f'(x)$ und $D_{f'}$.
 c) Bestimme das Verhalten von f und f' an den Grenzen ihrer Definitionsmengen.
 d) Bestimme Extrem- und Wendepunkte, zeichne G_f .

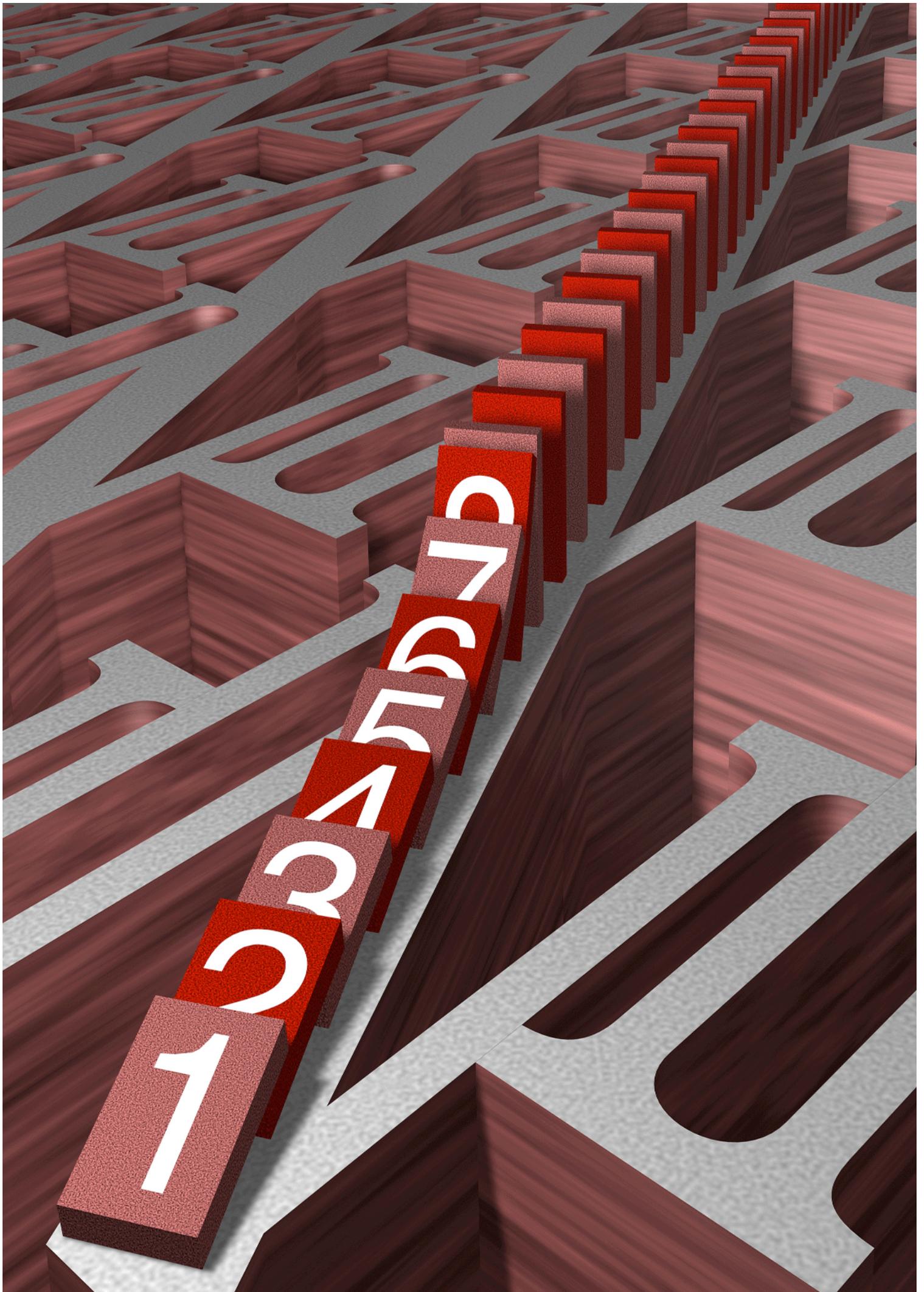
•◇26 $f(x) = \arcsin(2x-1)$

- a) Bestimme die maximale Definitionsmenge D_f .
 b) Zeige: G_f ist symmetrisch zu $(0,5|0)$.
 c) Bestimme $f'(x)$ und $D_{f'}$ und untersuche das Verhalten von f' am Rand von $D_{f'}$.
 d) Zeichne G_f und bestimme die Wertemenge von f .
 e) Bestimme $f^{-1}(x)$.

f) $F(x) = \int_0^x f(t) dt$; bestimme ohne zu integrieren: D_F , Null- und Extremstellen von F .

•27 $f(x) = \arctan(x + \sqrt{x^2-1})$

- a) Bestimme die maximale Definitionsmenge D_f und das Verhalten von f am Rand von D_f .
 b) Bestimme $f'(x)$ und $D_{f'}$ und untersuche das Verhalten von f' am Rand von $D_{f'}$.
 c) Bestimme die Extrempunkte und zeichne G_f .
 d) Begründe, dass f umkehrbar ist, und bestimme $f^{-1}(x)$.

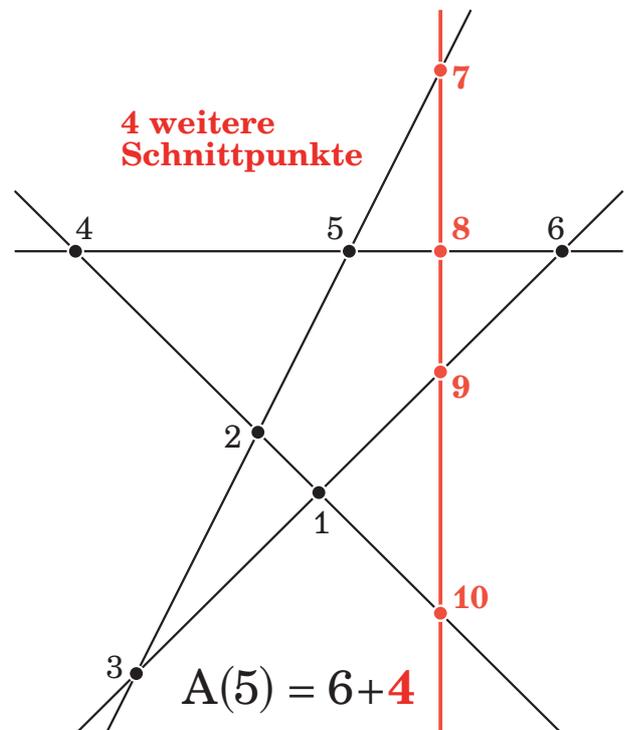
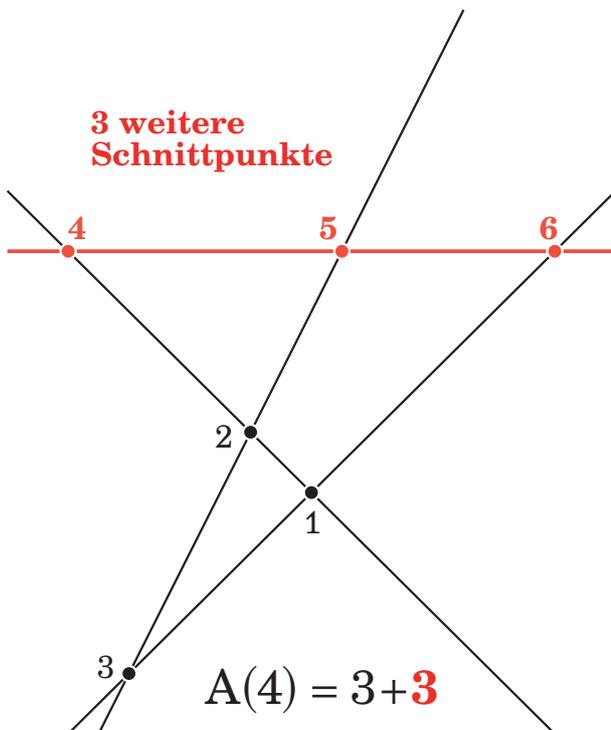
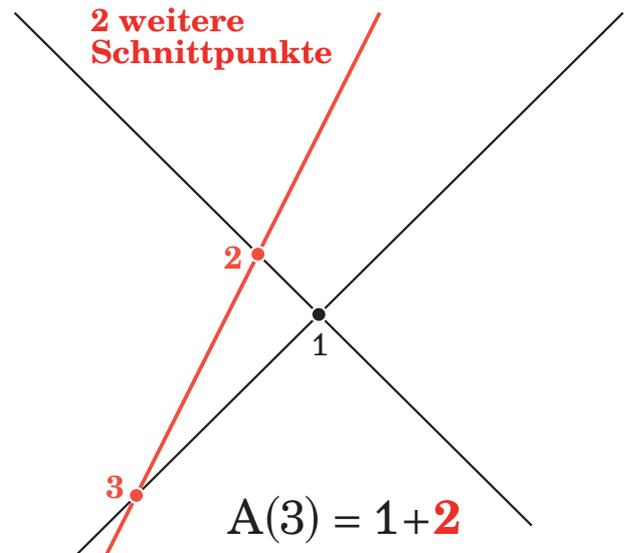
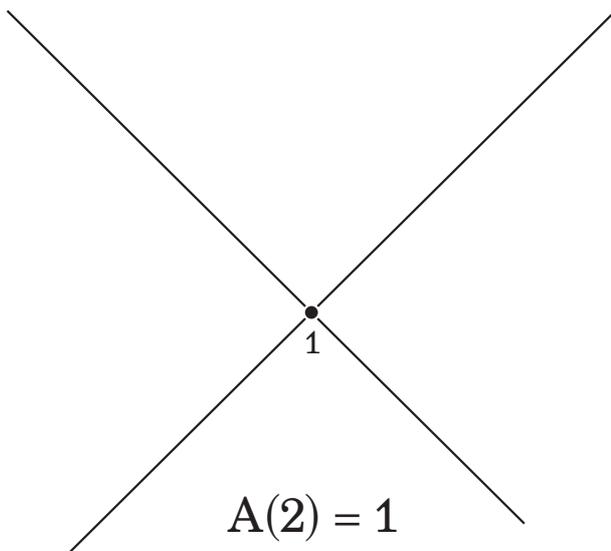


XI. Anhang: Vollständige Induktion

Wieviel Schnittpunkte haben 1000 (verschiedene) Geraden höchstens ?

Wir fangen klein an und probierens aus:

- 1 Gerade hat höchstens 0 Schnittpunkte.
- 2 Geraden haben höchstens 1 Schnittpunkt.
- 3 Geraden haben höchstens 3 Schnittpunkte.
- 4 Geraden haben höchstens 6 Schnittpunkte.
- 5 Geraden haben höchstens 10 Schnittpunkte.



Das Ganze ist übersichtlich in einer Tabelle:

| Anzahl n der Geraden | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|--|---|---|---|---|----|
| maximale Anzahl $A(n)$ der Schnittpunkte | 0 | 1 | 3 | 6 | 10 |

und noch übersichtlicher als Veranschaulichung der Zahlenpaare $(n|A(n))$ in einem Koordinatensystem:

Der Kenner vermutet, dass die 5 Punkte auf einer Parabel liegen, und setzt an:

$$A(n) = a \cdot n^2 + b \cdot n + c$$

Für die ersten 3 Punkte gilt dann:

$$0 = a + b + c$$

$$1 = 4a + 2b + c$$

$$3 = 9a + 3b + c$$

Diese 3 Gleichungen genügen, um die Koeffizienten a , b und c zu berechnen; es ergibt sich $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = 0$, und damit die Formel:

$$A(n) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n = \frac{1}{2}n(n-1)$$

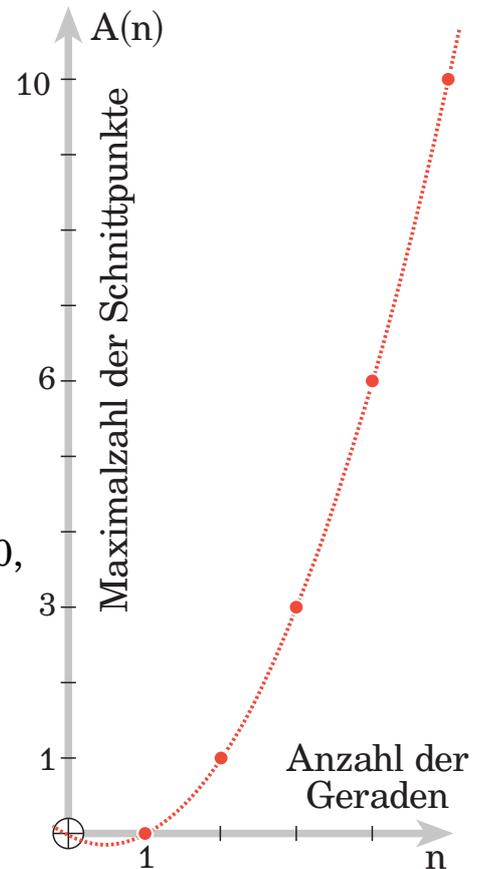
Die Formel passt auch für 4 und für 5 Geraden, denn $A(4) = 6$ und $A(5) = 10$.

Passt sie aber auch für jede beliebige Anzahl n ? Dazu müssen wir etwas weiter ausholen.

Der italienische Mathematiker Giuseppe PEANO (1858 bis 1932) hat ein berühmtes System von Axiomen formuliert, das die Menge \mathbb{N} der natürlichen Zahlen charakterisiert:

- I 1 ist eine natürliche Zahl.
- II Jede natürliche Zahl hat genau einen Nachfolger.
- III Der Nachfolger ist nie 1.
- IV Verschiedene Zahlen haben nie den selben Nachfolger.
- V Ist L eine Teilmenge der natürlichen Zahlen mit den Eigenschaften
 1. $1 \in L$
 2. $k \in L$, also $(k+1) \in L$
 so ist $L = \mathbb{N}$.

Zurück zur Frage nach der Allgemeingültigkeit von $A(n) = \frac{1}{2}n(n-1)$. L sei davon die Lösungsmenge. Um zu zeigen, dass $A(n) = \frac{1}{2}n(n-1)$ für alle natürlichen Zahlen n gilt, muss man nachweisen: $L = \mathbb{N}$. Das 5. Axiom von PEANO zeigt dazu einen Weg:



1 ∈ L

Beim Vergleich der beiden Seiten von $A(n) = \frac{1}{2}n(n-1)$ sieht man, dass einerseits die Maximalzahl der Schnittpunkte $A(1)=0$ ist, andererseits $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1-1) = 0$ ist, dass folglich gilt $1 \in L$.

 $k \in L \Rightarrow (k+1) \in L$

$k \in L$ bedeutet, dass $A(k) = \frac{1}{2}k(k-1)$ richtig ist.

Zu zeigen ist, dass dann auch richtig ist: $A(k+1) = \frac{1}{2}(k+1)k$.

Die $(k+1)$ -te Gerade liefert höchstens k neue Schnittpunkte:

$$A(k+1) = A(k) + k = \frac{1}{2}k(k-1) + k = \frac{1}{2}k(k-1+2) = \frac{1}{2}k(k+1)$$

Damit ist auch $(k+1) \in L$.

Es sind also beide Forderungen des 5. Peano-Axioms erfüllt, und es gilt $L = \mathbb{N}$.

Die Formel $A(n) = \frac{1}{2}n(n-1)$ gilt demnach für jede natürliche Zahl n , auch für 1000. 1000 Geraden haben somit höchstens $A(1000) = \frac{1}{2} \cdot 1000(1000-1) = 499500$ Schnittpunkte.

Das hier vorgestellte Beweisverfahren heißt **vollständige Induktion**.

Seine 3 wesentlichen Schritte:

- **Zeige: die Behauptung ist richtig für $n=1$.**
- **Schreibe die Behauptung auf für $n=k$ und für $n=k+1$.**
- **Zeige: die Behauptung für $n=k+1$ folgt aus der Behauptung für $n=k$.**

Beispiel: Potenzen von x , also $f_n(x) = x^n$ haben die Ableitung $f'_n(x) = n \cdot x^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$

$$\text{Fall } n=1: f_1(x) = x^1, f'_1(x) = 1,$$

$$\text{es ist aber auch } 1 \cdot x^{1-1} = 1,$$

also stimmt die Behauptung für $n=1$ und $x \neq 0$.

$$\text{Für } n=1 \text{ und } x=0 \text{ gilt } f'_1(0) = 1;$$

der Term $1 \cdot 0^{1-1}$ ist zwar nicht definiert,

kann aber wegen $\lim_{x \rightarrow 0} x^0 = 1$ gleich 1 gesetzt werden.

$$\text{Fall } n=k: f_k(x) = x^k, f'_k(x) = k \cdot x^{k-1},$$

$$\text{Fall } n=k+1: f_{k+1}(x) = x^{k+1} = x \cdot x^k = x \cdot f_k(x)$$

$$\text{Zu zeigen ist: } f'_{k+1}(x) = (k+1) \cdot x^k$$

nach der Produktregel ist

$$\begin{aligned} f'_{k+1}(x) &= (x \cdot f_k(x))' = f_k(x) + x \cdot f'_k(x) = x^k + x \cdot k \cdot x^{k-1} \\ &= x^k + k \cdot x^k = (k+1) \cdot x^k. \end{aligned}$$

Das ist aber gerade die Behauptung für $n=k+1$, und damit ist der Beweis erbracht.

Aufgaben ($n \in \mathbb{N}$)

Untersuche mit vollständiger Induktion, ob die Behauptung richtig oder falsch ist; ist sie falsch, dann gib ein Gegenbeispiel an.

- ◇1 $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$
- ◇2 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$
- 3 Bernoulli-Ungleichung: $(1+x)^n \geq 1+n \cdot x$ für $x \geq -1$
- 4 n Geraden in allgemeiner Lage zerlegen die Ebene in
 a) $(n-1)^2 + (n-1) + 2$ Teile b) $1 + \frac{1}{2}n(n+1)$ Teile.
- 5 n Ebenen in allgemeiner Lage zerlegen den dreidimensionalen Raum in
 a) 2^n Teile b) $\frac{1}{6}(n^3 + 5n + 6)$ Teile.
- ◇6 Eine Menge mit n Elementen hat 2^n Teilmengen.
- 7 $1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$ für $x \neq 1$
- 8 Die Summe der 3. Potenzen dreier aufeinander folgender natürlicher Zahlen ist teilbar durch 9.
- 9 Alle Zahlen der Form $4n^3 - n$ sind teilbar durch 3.
- 10 Alle Zahlen der Form $n^3 - 7n$ sind teilbar durch 6.
- 11 Alle Zahlen der Form $n^3 - 2n + 6$ sind teilbar durch 5.
- 12 Alle Zahlen der Form $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ sind teilbar durch 133.
- 13 $\frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3$ ist eine natürliche Zahl.
- 14 $3^n > 3n + 3$
- 15 $2^n > n^2$
- 16 Zeige: Für die Behauptung
 »Für $n \in \mathbb{N}$ gilt: $2n+1$ ist teilbar durch 2.«
 ist der Schritt von k auf $k+1$ beweisbar,
 aber man findet keine Startzahl.

| | | | |
|--------------------------------------|-----------|----------------------------------|----------|
| 2. kosmische Geschwindigkeit | 215 | Berührkurven | |
| Abkühlen | 134 | Nachweis | 121 |
| Abkühlungsgesetz von Newton | 134 | Bestand | 129 |
| Ableitung | | bestimmte Ausdrücke | 113 |
| der e-Funktion | 100 | bestimmtes Integral | 21, 211 |
| der Exponentialfunktion | 99 | Additivität | 33 |
| ln-Funktion | 142 | Definition | 27 |
| von b hoch x | 103 | Linearität | 33 |
| Ableitung der Umkehrfunktion | 93 | binärer Logarithmus | 147 |
| Ableitung von Gleichungen | 96 | Bogenlänge | 81 |
| Ableitung von Ungleichungen | 96 | Bogenmaß | 225 |
| Abnahme | | Bolzano, Bernhard | 7 |
| beim Luftdruck | 135 | Bruchungleichungen | 189, 192 |
| der Intensität | 133 | Cauchy, Augustin-Louis | 7 |
| exponentielle | 132 | Cavalieri | 6 |
| Absorption | 133 | Cavalieri, Francesco Bonaventura | 36 |
| Additivität des bestimmten Integrals | 33 | Computer, Grafische Integration | 18 |
| adiabatische Kompression | 77 | Computer, Konvergenz von Reihen | 170 |
| algebraische Relationen | 235 | Computer, Simpson-Regel | 87 |
| Änderungsrate | 7, 128 | Computer, Streifenmethode | 31 |
| Angleichung der Temperatur | 134 | Dedekind, Richard | 7 |
| Appolonios | 237 | Definitionsücke | 173 |
| Arbeit im Schwerfeld | 75, 214 | dekadischer Logarithmus | 147 |
| Archimedes | 6, 22, 36 | Descartes, René | 6 |
| Areakosinus, hyperbolischer | 160 | Differenziale | 7 |
| arithmetisches Mittel | 168 | Differenzialgleichung | 123, 129 |
| Arkuskosinus | 230 | Differenzieren von Gleichungen | 96 |
| Arkussinus | 225 | Differenzieren von Ungleichungen | 96 |
| Arkustangens | 232 | Differenzieren, implizites | 96, 235 |
| Asymptote | 173 | Differenzterm | 175 |
| bei Wurzelfunktionen | 222 | Dirichlet-Funktion | 28 |
| der ln-Kurve | 142 | divergentes Integral | 212 |
| e-Kurve | 101 | doppelt-logarithmisches Papier | 166 |
| nicht senkrechte | 174 | dualer Logarithmus | 147 |
| senkrechte | 173 | Effektivwerte beim Wechselstrom | 80 |
| asymptotische Kurve | 174 | e-Funktion | 99 |
| asymptotischer Term | 175 | Ableitung | 100 |
| Ausdrücke | | Anwendungen | 128 |
| bestimmte | 113 | Basisänderung | 103 |
| mit 0 und ∞ | 113 | Definition | 100 |
| unbestimmte | 113 | Eigenschaften | 101 |
| Axiome des Flächeninhalts | 35 | Umkehrfunktion | 102 |
| Axiome von Peano | 245 | einbeschriebene Streifen | 22 |
| Basis | | Eineindeutige Funktion | 89 |
| Exponentialfunktion | 98 | Einheitshyperbel | 160 |
| Basis der Logarithmusfunktion | 147 | e-Kurve | 100 |
| Basisänderung bei e-Funktion | 103 | Asymptote | 101 |
| Basiswechsel bei Logarithmen | 147 | Ellipse als Kegelschnitt | 237 |
| Beleuchtung | 198 | Ellipse, Flächeninhalt | 39 |
| Berechnung von ln-Werten | 145, 148 | | |

| | | | |
|--------------------------------------|----------|---|----------------------------|
| EllipseFlächeninhalt | 39 | Gleichungen, Differenzieren | 96 |
| Empfindung und Reiz | 164 | Gleichungen, Integration | 96 |
| Eudoxos | 6 | Grafische Integration | 18 |
| Euklid | 169 | grafische Integration | 13 |
| Euler, Leonhard | 100, 136 | Gravitationsgesetz | 75 |
| Euler-Zahl | 100 | Gregory | 238 |
| Grenzwert | 110 | Grenzen der Integrationsmethoden | 218 |
| Exponentialfunktion | | Grenzwert | 7 |
| Ableitung | 99 | Grenzwert für Euler-Zahl | 110 |
| anderer Zugang | 138 | Grenzwertregeln von de L'Hospital | 114 |
| Definition | 98 | Grundintegral | 227, 233 |
| und Polynomfunktion | 109 | Guldin | 81 |
| Exponentialkurve | 98, 103 | Guldin-Regel 1 | 82 |
| charakteristischer Punkt | 98 | Guldin-Regel 2 | 83 |
| exponentielle Abnahme | 132 | | |
| exponentielle Zunahme | 131 | Halbkreis | 221 |
| exponentielles Wachstum | 129 | halb-logarithmisches Papier | 165, 166 |
| | | Halbwertdicke | 133 |
| Faktorformel | 32 | Halbwertzeit | 130 |
| Faktorregel | 11 | Harmonielehre | 167 |
| Fakultät | 109 | harmonische Obertöne | 167 |
| Fassregel von Kepler | 86 | harmonische Reihe | 167 |
| Fechner, Gustav Theodor | 164 | harmonischen Reihe | 170 |
| Fehler, relativer | 115 | harmonisches Mittel | 168 |
| Fermat, Pierre de | 6, 36 | Hauptsatz | 44 |
| Fläche zwischen 2 Kurven | 64, 68 | Hauptsatz d. Differenzial- & Integralrechnung | 44 |
| Fläche zwischen Kurve und x-Achse | 63 | Hauptsatz und Stetigkeit | 51 |
| Flächenbilanz | 34, 41 | Hauptwert | |
| Flächeninhalt | 63 | des Tangens | 232 |
| Flächeninhalt, Axiome | 35 | Hauptwert des Kosinus | 230 |
| Flächenparadoxon | 212 | Hauptwert des Sinus | 225 |
| Flächenproblem | 6 | Hörsamkeit eines Raums | 134 |
| Flachpunkt | | Hörschwelle | 164 |
| Super-Flachpunkt | 127 | Hospital | |
| Fluchtgeschwindigkeit | 215 | Grenzwertregeln | 114 |
| Funktion | | Hospital, Guillaume François Antoine de L' | 114 |
| eineindeutige | 89 | Hubarbeit | 75 |
| hyperbolische | 123 | Hüllkurve | 123 |
| injektive | 89 | Hyperbel als Kegelschnitt | 237 |
| innere | 93 | Hyperbolische Funktionen | 123 |
| nicht integrierbar | 28 | hyperbolischer Areakosinus | 160 |
| rationale | 172 | hyperbolischer Kosinus | 123 |
| umkehrbare | 89 | hyperbolischer Sinus | 124 |
| umkehren | 90 | | |
| Funktion, Mittelwert | 78 | ideales Gas, Zustandgleichung | 193 |
| | | Identität | 90, 93, 102, 225, 231, 232 |
| Galilei, Galileo 6 | | Identität in IR | 96 |
| Gasverflüssigung | 195 | Identität, Anwendungen | 103 |
| Gauß, Carl Friedrich | 234 | implizites Differenzieren | 96, 235 |
| geometrisches Mittel | 168 | Induktion, vollständige | 244 |
| Glättungseffekt der Integralfunktion | 57 | Infimum | 29 |
| Gleichungen, Ableitung | 96 | infinitesimale Größen | 7 |

| | | | |
|---|---------|--|-----------------|
| Infinitesimal-Rechnung | 7 | Kettenregel | 93, 94 |
| Injektive Funktion | 89 | Kompression, adiabatische | 77 |
| innere Funktion | 93 | konvergentes Integral | 212 |
| Integral | | Konvergenz der Logarithmusreihe | 148 |
| bestimmtes | 21, 211 | Konvergenz von Reihen am Computer | 170 |
| divergentes | 212 | Kosinus, Hauptwert | 230 |
| konvergentes | 212 | Kosinus, hyperbolischer | 123 |
| unbestimmtes | 10 | Kreisintegral | 227 |
| uneigentliches | 211 | Kugel | 70 |
| Integral- und Stammfunktion | 52 | Kurve, asymptotische | 174 |
| Integralfunktion | 41 | Kurvenloch | 173 |
| Integralfunktion – Integrand | 46 | | |
| Integralfunktion – Stammfunktion | 48 | Lambert-Beer-Gesetz | 133 |
| Integralfunktion, Glättungseffekt | 57 | Lautstärke | 164 |
| Integral-Logarithmus | 169 | Lebensdauer, mittlere | 130 |
| Integralzeichen | 27 | Lehmann | 169 |
| Integrand | 10, 27 | Leibniz, Gottfried Wilhelm | 7, 27, 43, 238 |
| Integrand – Integralfunktion | 46 | Licht-Absorption | 133 |
| Integrand ist unstetig | 47 | lineare Zunahme | 128 |
| Integrandfunktion | 10, 41 | Linearität des bestimmten Integrals | 33 |
| Integration | | Linsengleichung | 199 |
| grafische | 13 | Littlewood | 169 |
| mit Partialbruch-Zerlegung | 234 | ln-Funktion | 102, 142 |
| partielle | 201 | Ableitung | 142 |
| Substitutionsregel | 205 | als Stammfunktion | 145 |
| Typ »Abräumen« | 202 | ln-Kurve | 102, 142 |
| Typ »Faktor 1« | 202 | Asymptote | 142 |
| Typ »Phönix« | 203 | ln-Werte, Berechnung | 145, 148 |
| Integration mit der Umkehrfunktion | 95 | Löcher | 173 |
| Integration von $(a \sin x + b \cos x) \cdot e^x$ | 112 | Logarithmische Papiere | 165 |
| Integration von Gleichungen | 96 | Logarithmus | |
| Integration von $p_n(x) \cdot e^x$ | 112 | Basis | 147 |
| Integration von Ungleichungen | 96 | binärer | 147 |
| Integrationsgrenzen | 27 | dekadischer | 147 |
| Integrationsgrenzen vertauschen | 45 | dualer | 147 |
| Integrationsgrenzen, Substitution | 217 | Logarithmus, natürlicher | 102 |
| Integrationsintervall | 27 | Logarithmusfunktion | 142 |
| Integrationsregeln | 11 | Logarithmusfunkt.: Umkehrg. der e-Funktion | 102 |
| Integrationsrichtung | 45, 49 | Luftdruck, Änderung mit der Höhe | 135 |
| Integrationsvariable | 10 | Luftdruck, mittlerer | 135 |
| Integrationsvariable, Bezeichnung | 35 | | |
| integrierbar | 27 | Madahva | 238 |
| Isothermen | 193 | Mantisse | 147 |
| | | Mathematica | 18, 31, 87, 170 |
| Kapitalvermehrung | 131 | Maxwell | 195 |
| Kegel | 70 | Mercator, Nicolaus | 148 |
| Kegelschnitte | 236 | Mittel | |
| Kehrwertkurven | 189 | arithmetisches | 168 |
| Kennzahl | 147 | geometrisches | 168 |
| Kepler, Fassregel | 86 | harmonisches | 168 |
| Kepler, Johannes | 6 | Mittelwert einer Funktion | 78 |
| Kettenlinie | 123 | mittlere Lebensdauer | 130 |

| | | | |
|---|------------|--------------------------------------|--------|
| mittlere Reichweite | 133 | Riemann, Bernhard | 32 |
| mittlerer Luftdruck | 135 | Rotationskörper, Volumen | 70 |
| | | Rotationsparaboloid | 70, 72 |
| Nachhallzeit | 134 | Rutherford, Physiker Ernest | 196 |
| natürlicher Logarithmus | 102 | Rutherford-Hyperbeln | 196 |
| Neil-Parabel | 220 | Rutherford-Streuung | 198 |
| Nennerpolynom | 172 | | |
| Newton | 43, 50, 75 | Satellitenumlauf | 199 |
| Newton, Isaac | 7 | Schall-Absorption | 133 |
| Newton-Abkühlungsgesetz | 134 | Schalldruck | 164 |
| Newtons Weg zum Hauptsatz | 50 | Schar von Stammfunktionen | 9 |
| n-Fakultät | 109 | Schranke | |
| Nicht integrierbare Funktionen | 28 | obere | 29 |
| Normalfrequenz | 164 | untere | 29 |
| Numerus | 147 | Schuss ins All | 214 |
| | | Schwellenreiz | 164 |
| obere Schranke | 29 | Schwellenwert | 164 |
| Obersumme | 23 | Sektglas, Volumen | 73 |
| Obertöne, harmonische | 167 | Simpson-Regel | 86 |
| | | Simpson-Regel, Computer | 87 |
| Parabel als Kegelschnitt | 237 | Sinus, Hauptwert | 225 |
| Parallelschaltung von Widerständen | 199 | Sinus, hyperbolischer | 124 |
| Partialbruch-Zerlegung und Integration | 234 | Skewes | 169 |
| Peano, Giuseppe | 245 | Spannarbeit | 21 |
| Phon | 164 | Spannarbeit bei Federn | 77 |
| Pol | 173 | spiegeln an $y=x$ | 91 |
| 2facher | 173 | Spitzen | 220 |
| v-facher | 173 | Stamm- und Integralfunktion | 52 |
| Polynom- und e-Funktion im Unendlichen | 111 | Stammfunktion | 8, 201 |
| Polynom- und Exponentialfunktion | 109 | Stammfunktion – Integralfunktion | 48 |
| Polynomdivision | 174, 175 | Stammfunktionen, Schar | 9 |
| Population, Vermehrung | 132 | stetige Verzinsung | 131 |
| Potenzfunktion | 220 | Stetigkeit | 7 |
| Potenzsummen | 36 | Stetigkeit und Hauptsatz | 51 |
| Primzahlsatz | 169 | Streifen | |
| Problem der Zahlentheorie | 169 | einbeschriebene | 22 |
| Proportionalitätskonstante | 129 | umbeschriebene | 22 |
| | | Streifenmethode | 22, 31 |
| quadratische Zunahme | 128 | Streuversuche | 196 |
| | | Substitution der Integrationsgrenzen | 217 |
| radioaktiver Zerfall | 132 | Summenformel | 32 |
| rationale Funktion | 172 | Summenregel | 11 |
| reales Gas, Zustandgleichung | 193 | Super-Flachpunkt | 127 |
| Regeln von de L'Hospital | 114 | Supremum | 29 |
| Reichweite, mittlere | 133 | | |
| Reihe, harmonische | 167 | Tangens, Hauptwert | 232 |
| Reihenentwicklungen | 238 | Tangentenproblem | 6 |
| Reiz und Empfindung | 164 | Technik des Integrierens | 201 |
| Rekursive Berechnung bestimmter Integrale | 218 | Teilintervalle | 23 |
| Relation | 235 | Temperatur, Angleichung | 134 |
| Relationen, algebraische | 235 | Temperaturverlauf | 79 |
| relativer Fehler | 115 | Term, asymptotischer | 175 |

| | | | |
|--|--------|-------------------------------------|-----|
| Thermogramm | 79 | Zunahme | |
| Torus | 82, 83 | beim Luftdruck | 135 |
| transzendente Zahlen | 100 | exponentielle | 131 |
| Trapezregel | 85 | lineare | 128 |
| | | quadratische | 128 |
| umbeschriebene Streifen | 22 | Zustandsgleichung des idealen Gases | 193 |
| Umkehrbare Funktion | 89 | Zustandsgleichung realer Gase | 193 |
| Umkehrfunktion | | Zwischensumme | 32 |
| Ableitung | 93 | Zylinder | 70 |
| Definition | 89 | Zylinderscheiben | 71 |
| Umkehrfunktion bestimmen | 90 | | |
| Umkehrfunktion der e-Funktion | 102 | | |
| Umkehrfunktion und Integration | 95 | | |
| Umkehrfunktion und Ungleichung | 92 | | |
| unbestimmte Ausdrücke | 113 | | |
| unbestimmtes Integral | 10 | | |
| uneigentliches Integral | 211 | | |
| Ungleichung und Umkehrfunktion | 92 | | |
| Unleichungen, Ableitung | 96 | | |
| Unleichungen, Differenzieren | 96 | | |
| Unleichungen, Integration | 96 | | |
| unstetiger Integrand | 47 | | |
| untere Schranke | 29 | | |
| Untersumme | 24 | | |
| | | | |
| Van-der-Waals-Gleichung | 198 | | |
| Verdopplungszeit | 130 | | |
| Vermehrung einer Population | 132 | | |
| Vertauschen der Integrationsgrenzen | 45 | | |
| Verzinsung, stetige | 131 | | |
| Vielfachheit | | | |
| von Nullstellen | 173 | | |
| von Polen | 173 | | |
| vollständige Induktion | 244 | | |
| Volumen von Rotationskörpern | 70 | | |
| Vorzeichenwechsel und Pol | 174 | | |
| | | | |
| Waals-Gleichung | 193 | | |
| Wachstum, exponentielles | 129 | | |
| Wallis, John | 218 | | |
| Weber, Ernst Heinrich | 164 | | |
| Weber-Fechner-Gesetz | 164 | | |
| Weg | 74 | | |
| Weierstraß, Karl 7 | | | |
| Wurzelfunktion, asymptotisches Verhalten | 222 | | |
| | | | |
| Zahlentheorie, ein Problem | 169 | | |
| Zählerpolynom | 172 | | |
| Zerfall, radioaktiver | 132 | | |
| Zinseszins | 131 | | |
| Zinsfuß | 131 | | |